

# Efeitos Não-Lineares na Redundância e Observabilidade em Estimadores de Estado para Sistemas Elétricos de Potência

Julio A. D. Massignan, Vitor H. P. de Melo, João Bosco A. London Jr.

*Depto. de Engenharia Elétrica e de Computação, EESC - USP,  
(julio.massignan@usp.br, vitohpmelo@usp.br, jbalj@sc.usp.br).*

**Abstract:** Real-time monitoring of electric power systems, through state estimators, is closely linked to characteristics from the supervisory systems and the installed meters across the networks, especially the redundancy among such measured information. Thereby, a deep understanding of the redundancy relations is strategic for power systems operation. This work seeks to improve such discussion of redundancy effects on state estimators, through an exploration of the nonlinear characteristic of the state estimation problem along with observability analysis: topological, algebraical and numerical. Simulation results with the test systems IEEE14, IEEE30 and IEEE118 present the influence of state vector initialization, the iterative process of the estimator and the weighting of the measurements, that may incur in increments on redundancy due to nonlinear characteristics of the measurement model.

**Resumo:** O monitoramento em tempo real de sistemas elétricos de potência, através de estimadores de estado, está intimamente ligado a características dos sistemas supervisórios e dos medidores instalados na rede elétrica, em especial da redundância destas informações medidas. Desta forma, compreender profundamente estas relações de redundância se torna estratégico no âmbito de operação de sistemas elétricos. Este trabalho busca aprofundar a discussão dos efeitos de redundância nos estimadores de estado, através da exploração da característica não-linear do problema de estimação de estado em conjunto com métodos de análise de observabilidade: topológica, algébrica e numérica. Resultados de simulações computacionais nos sistemas de teste IEEE14, IEEE30 e IEEE118 apresentam a influência da inicialização do vetor de estado, do processo iterativo do estimador e da ponderação de medidas, que podem acarretar no incremento de redundância devido a características não lineares do modelo de medição.

*Keywords:* Power Systems, State Estimation, Observability, Metering Systems, Redundancy.

*Palavras-chaves:* Sistemas Elétricos de Potência, Estimação de Estado, Observabilidade, Planos de Medição, Redundância.

## 1. INTRODUÇÃO

Os Centros de Controle e Operação (CCOs) dos Sistemas Elétricos de Potência (SEPs) dependem do processo de estimação de estado como ferramenta computacional crucial em seus sistemas de gerenciamento de energia. Desde sua concepção, no início dos anos 1970, o processo de estimação de estado baseado no método dos mínimos quadrados ponderados (WLS do inglês *Weighted Least Squares*) vem sendo trabalhado e já se consolidou nos sistemas de transmissão (Abur and Exposito, 2004) e nos últimos anos tem ganho novos impulsos para serem adotados pelos nos sistemas de distribuição (Hebling et al., 2020).

A acurácia do processo de estimação de estado, e mesmo as limitações de sua aplicação, dependem fundamentalmente de características do plano de medição e sua aderência ao modelo da rede elétrica, frente às relações intrínsecas entre as grandezas elétricas mensuradas e as variáveis de estado. Capturar e compreender de forma sistemática

estas relações possibilita inferir qualitativamente sobre a capacidade e acurácia do processo de estimação de estado como um todo. Para isso foram desenvolvidos métodos para análise observabilidade e de redundância de medidas. Vale lembrar que o conceito de observabilidade está intimamente relacionado à capacidade de se solucionar o problema de estimação de estado, em especial sob três óticas complementares: topológica, algébrica e numérica. Através das análises de observabilidade e redundância de medidas pode-se inferir o grau de redundância do plano de medição, necessidade da inclusão de informações complementares para observabilidade, queda de performance em contingências do sistema supervisório e identificar regiões vulneráveis dos planos de medição (Krumpholz et al., 1980; Abur and Exposito, 2004; London et al., 2007).

Diversos métodos para análise de observabilidade foram propostos com o objetivo de capturar estes efeitos, qualificar os planos de medição e identificar suas vulnerabilidades. Desde o início da concepção dos estimadores, esta análise se baseava em um conjunto de condições e avaliações topológicas, algébrica e numérica

\* Este trabalho recebeu apoio financeiro do CNPq (processo n° 308297/2018-0), CAPES e FAPESP (processo n° 2016/19646-6).

de observabilidade (Krumpholz et al., 1980), abordagens mistas algébrica-numérica (Wu and Monticelli, 1985), e estruturais-algébricas (Bretas, 1996) do problema de estimação de estado, e que se consolidaram ao longo do tempo (Abur and Exposito, 2004).

Vários aspectos foram sendo assimilados a esta análise buscando uma maior aplicação da análise de observabilidade e seus resultados. Buscando uma maior generalização para os métodos algébricos, o trabalho de London et al. (2007) apresenta uma abordagem inteiramente baseada na matriz Jacobiana, possibilitando uma análise qualitativa completa de observabilidade e redundância de medidas. Outra abordagem algébrica, proposta por de Almeida et al. (2008), aplica conceitos da chamada matriz Gramiana para realizar as análises de observabilidade, com fortes inspirações provenientes da área de controle de sistemas dinâmicos. Em consonância com o aumento do grau de detalhamento dos modelos, Costa et al. (2002) propõe uma abordagem de observabilidade generalizada, incluindo a condição de disjuntores na análise de observabilidade topológica. Ainda recentemente, cabe destacar o conceito de observabilidade probabilística proposto por Augusto et al. (2016), buscando capturar efeitos aleatórios que permeiam a disponibilidade das medidas em um centro de operação. Cabe ainda ressaltar os trabalhos recentes que estendem os conceitos de observabilidade para a discussão de detectabilidade de eventos no contexto de estimação dinâmica, por exemplo por Zhou et al. (2020), incorporando aspectos temporais no problema de estimação de estado.

Entretanto, cada método de análise de observabilidade tende a se basear em uma das diferentes definições, topológica, algébrica ou numérica. Resultando assim em diferenças sutis entre seus resultados, mas que podem afetar sensivelmente a caracterização qualitativa dos planos de medição. No intuito de aprofundar esta discussão, a contribuição deste trabalho consiste em apresentar uma análise detalhada do problema de observabilidade no contexto de estimação de estado em SEPs, destacando novos resultados relacionados a alterações de redundância frente a diferentes pontos de inicialização do vetor de estado, topologia da rede, plano de medição e do processo iterativo do Estimador de Estado (EE) WLS. Além disto, apresentar-se-á um maior detalhamento numérico das análises de observabilidade frente à característica não-linear do problema de estimação de estado em SEPs, visto que diversos métodos baseiam-se em modelos lineares para realizar as análises.

Para realizar o estudo proposto, são utilizadas diferentes métricas para capturar efeitos na redundância dos planos de medição e conseqüentemente na observabilidade da rede elétrica. Simulações computacionais utilizando um sistema teste de 5 barras, e os sistemas de teste IEEE14, IEEE30 e IEEE118, sustentam as análises teóricas apresentadas neste trabalho e seus efeitos práticos. Desta forma, espera-se fomentar a discussão sobre os efeitos da análise de observabilidade nos EEs, aprimorando aspectos de confiabilidade dos sistemas SCADA nos centros de operação.

## 2. ESTIMAÇÃO DE ESTADO EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

O EE WLS baseia-se no seguinte modelo de medição não linear: (Abur and Exposito, 2004):

$$z = h(x) + e, \quad (1)$$

na qual  $z$  é o vetor de medidas ( $m \times 1$ ) composto pelas grandezas elétricas medidas;  $x$  é o vetor de variáveis de estado ( $n \times 1$ ) do sistema elétrico;  $h(x)$  é o conjunto de equações não lineares ( $m \times 1$ ) que relacionam as variáveis de estado com o vetor de medidas; e  $e$  é o vetor de erros nas medidas ( $m \times 1$ ), geralmente assumido como independente com distribuição Normal de média zero e matriz de covariância conhecida  $\Sigma(m \times m)$ . As tensões complexas nodais na forma polar correspondem às variáveis de estado.

O problema de estimação formulado no EE WLS consiste na minimização da norma quadrática ponderada do vetor de resíduo entre as medidas e o modelo de medição:

$$\min J(x) = \frac{1}{2} \cdot [z - h(x)]^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot [z - h(x)] \quad (2)$$

A inversa da matriz de covariância  $\Sigma^{-1}$  é também denotada por  $W$  e chamada matriz de ponderação. Basicamente, a minimização da função acima é obtida através da solução iterativa da chamada Equação Normal do EE WLS (3) (Abur and Exposito, 2004). O critério de convergência é dado pela comparação da atualização das variáveis de estado em cada iteração  $k$  com uma tolerância pré-especificada.

$$\begin{aligned} H(x^k)^T \cdot W \cdot H(x^k) \cdot \Delta x &= H(x^k)^T \cdot W \cdot [z - h(x^k)] \quad (3) \\ |\Delta x|_{\infty} &\leq tol, \quad (4) \end{aligned}$$

na qual,  $H(x^k)$  representa a matriz Jacobiana do modelo de medição avaliada no ponto  $x^k$ . A abordagem tradicional de estimação de estado se baseia na solução das equações normais acima apresentadas. A obtenção da solução do sistema linear acima em geral é realizada através de métodos de fatoração, isto é, sem o cálculo explícito da inversa da matriz Ganho do estimador, definida por:

$$G = H(x^k)^T \cdot W \cdot H(x^k) \quad (5)$$

### 2.1 Aplicação de Métodos Ortogonais em Estimação de Estado para Sistemas Elétricos de Potência

Um aspecto importante, do método tradicional de estimação de estado em sistemas elétricos, é o cálculo explícito da matriz Ganho, que acarreta numa sensível deterioração do condicionamento numérico do problema de estimação. Neste sentido, destaca-se neste trabalho a abordagem de solução baseada em métodos ortogonais, resultando em uma sensível redução no número de condicionamento associado à equação (3). Inicialmente é obtida a fatoração ortogonal, ou fatoração QR, da seguinte matriz:

$$W^{1/2}H(x^k) = Q^T R \quad (6)$$

São diversos os métodos de ortogonalização já desenvolvidos, como, por exemplo, o método de Gram-Schmidt (Golub and Van Loan, 2012), o método de Rotações de Givens (Pires et al., 1999) e o método de Reflexões de Householder (Hebling et al., 2020). Este trabalho baseia-se na aplicação do método de Reflexões de Householder, devido a recentes implementações eficientes deste método Hebling et al. (2020). Com isto, podemos reescrever as equações normais como:

$$((R^T Q)(Q^T R)\Delta x^k = (R^T Q)W^{1/2}[z - h(x^k)] \quad (7)$$

Simplificando através da propriedade de ortogonalidade da matriz  $QQ^T = I$ , temos:

$$(R^T R)\Delta x^k = (R^T Q)W^{1/2}[z - h(x^k)] \quad (8)$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados por  $R^{T-1}$ :

$$R\Delta x^k = QW^{1/2}[z - h(x^k)] \quad (9)$$

Uma vez que a matriz  $R$  é triangular superior, a solução do sistema (9) é obtida diretamente pela multiplicação matriz-vetor da parcela da direita da equação e aplicando o método de substituição *Backward*.

### 3. OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

O conceito de Observabilidade está intimamente relacionado com a possibilidade de se obter os valores das variáveis de estado em toda a rede elétrica considerando um plano de medição específico. Ou seja, esta relacionado com a factibilidade de solução do problema descrito em (3). Formalmente, Krumpholz et al. (1980) apresenta esse conceito sob três diferentes pontos de vista para analisar um SEP e respectivo conjunto de medidas:

- Observabilidade Topológica: “Um SEP é topologicamente observável unicamente se existir uma árvore geradora observável (AGO) do grafo da rede associada a esse SEP.”
- Observabilidade Algébrica: “Um SEP é algebricamente observável se a matriz Jacobiana tem posto igual ao número de variáveis de estado.”
- Observabilidade Numérica: “Um SEP é dito numericamente observável se for possível fazer uma estimativa para o vetor de estado, através da solução iterativa da equação normal, partindo do *flat start* (valores iniciais de 1 p.u. e 0 radianos respectivamente para os módulos e ângulos de fase das tensões nodais).”

#### 3.1 Análise Linearizada de Observabilidade

Em geral, os métodos para análise de observabilidade foram propostos, e têm sido utilizados, em sua formulação linear. Isto inspirado no desacoplamento  $P\theta-QV$  da formulação do problema de estimação de acordo com o modelo estático da rede elétrica (Abur and Exposito, 2004). A paridade de medidas de potência ativa e reativa e a presença de pelo menos uma medida de magnitude de tensão permitem que este modelo linearizado da rede elétrica seja aplicado de forma ampla em situações reais (Krumpholz et al., 1980). Desta forma, as análises algébrica e numérica, em geral, se baseiam na matriz Jacobiana do modelo linear  $P\theta$  ao invés da matriz Jacobiana do problema original, descrita em (3), e cujo efeito em três métodos de análise de observabilidade é revisto neste trabalho.

#### 3.2 Análise Topológica de Observabilidade

A análise topológica de observabilidade baseia-se na caracterização dos planos de medição através da representação

por meio de grafos. Pela definição topológica de observabilidade, esta análise se dá pela busca de uma AGO, sendo a análise feita através de características de conectividade deste grafo. O conjunto de vértices do grafo de medição  $G_m$  tem uma correspondência um-a-um com as barras do SEP. Para realizar a análise topológica, medidas de injeção e de fluxo de potência são utilizadas para criar os ramos do grafo de medição (Costa et al., 2002), da seguinte maneira:

- (1) Se um ramo  $i - j$  do SEP (linhas de transmissão, transformadores, compensadores estáticos, etc.) possui seu fluxo monitorado, então um ramo é criado no grafo de medição conectando os nós  $i$  e  $j$ ;
- (2) Se uma barra  $i$  possui sua injeção de potência monitorada, então são criados ramos no grafo de medição conectando o nó  $i$  com todos os nós  $j$  que são adjacentes a esta barra na topologia do SEP.

Associado ao grafo de medição, surge também o conceito de árvore geradora de grafo. Uma árvore geradora de  $G_m$  consiste em um subgrafo de  $G_m$ , que seja uma árvore (isto é, um grafo não-dirigido conexo sem ciclos) que contém todos os vértices de  $G_m$ . A análise de observabilidade consiste em uma análise combinatória neste grafo de medição, buscando árvores geradoras dependendo se as conexões no grafo de medição são consequência da existência de medidas de injeção ou de fluxo de potência. Esta árvore é dita observável, uma AGO, se conecta todos os nós do grafo de topologia da rede com ao menos uma medida diferente associada à cada ramo da árvore geradora. A Figura 1 exemplifica esta análise e detalhes podem ser obtidos em (Abur and Exposito, 2004; Costa et al., 2002).

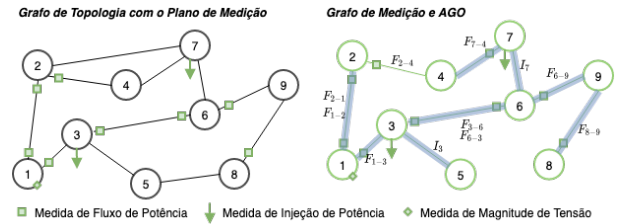


Figura 1. Exemplo de topologia da rede com plano de medição, análise do grafo de medição e AGO.

Uma vez que esta análise é realizada com o grafo de medição, e na matriz de incidência deste grafo, uma relação puramente linear se dá entre o plano de medição e a topologia da rede. Desta forma, esta análise não está completamente relacionada com o modelo de medição não-linear descrito em (1), mas somente com a sua estrutura.

#### 3.3 Análise Algébrica de Observabilidade

A análise algébrica de observabilidade, por sua vez, baseia-se na avaliação do posto da matriz Jacobiana  $H(x)$  do modelo de medição em (1). Pela definição algébrica, a matriz  $H(x)$  associada a um SEP observável tem posto igual ao número de variáveis de estado  $n$ .

$$\text{Posto}(H(x)) = n \quad (10)$$

A noção do posto de uma matriz, por sua vez, está relacionada ao conceito de dependência linear entre os vetores formados pelas colunas (ou linhas) de uma matriz (Golub

and Van Loan, 2012). A Figura 2 ilustra a essência desta análise, onde a matriz Jacobiana associada ao plano de medição de exemplo, tem sua estrutura e valores avaliados na busca de relações de dependência linear.

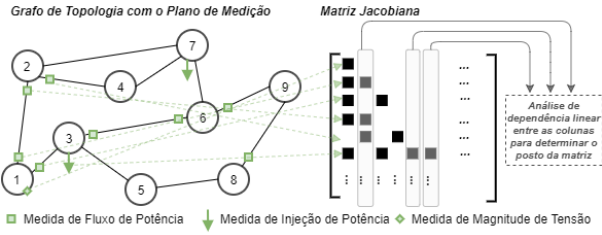


Figura 2. Exemplo de topologia da rede com um plano de medição, e análise algébrica do posto da Jacobiana.

Neste sentido, este trabalho utiliza o método de análise algébrica baseada na obtenção da chamada matriz  $H_{\Delta}$  (11), proposta por London et al. (2007). A proposta original, assim como outros métodos de análise algébrica de observabilidade, baseia-se no modelo linearizado  $P\theta$ , mas neste trabalho é estendida para averiguar o efeito dos diferentes valores do vetor de estado  $x$ . Basicamente, a matriz  $H_{\Delta}$  consiste em uma decomposição da Jacobiana, obtida por transformações lineares, cujo intuito é determinar uma base algébrica para o espaço vetorial definido pelas colunas da matriz Jacobiana. Na prática, ela pode ser obtida através de um processo baseado na eliminação da Gauss e pivoteamento de colunas. Sua análise, em conjunto com conceitos de caminhos de fatoração e aspectos estruturais desta matriz, permite inferir sobre diversos aspectos de observabilidade (determinação de ilhas observáveis e restauração de observabilidade por meio de pseudo-medidas) e de redundância de medidas (determinação de medidas críticas e conjuntos críticos de medidas, por exemplo) (London et al., 2007).

$$H(x) \xrightarrow{T} H_{\Delta}(x) = \begin{bmatrix} I \\ R(x) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

na qual,  $I$  é uma matriz identidade, cujas linhas e colunas compõem uma base algébrica para a matriz Jacobiana, e  $R(x)$  corresponde ao conjunto complementar, cujos elementos não nulos correspondem a medidas redundantes em relação a cada variável de estado.

Note que a análise algébrica da matriz Jacobiana, neste caso por meio da matriz  $H_{\Delta}$ , consiste em um mapeamento marginal do problema não linear, na região definida pela vizinhança de cada vetor de estado  $x$ . Desta forma, é esperado que diferentes vetores de estado apresentem diferentes relações algébricas de observabilidade, algo que será explorado na seção de Resultados com maiores detalhes.

### 3.4 Análise Numérica de Observabilidade

Alguns autores colocam a análise algébrica também como um caso particular da análise numérica (Abur and Exposito, 2004). Neste trabalho, apresentamos uma abordagem de avaliação numérica da observabilidade baseada em conceitos de convergência de algoritmos de otimização não-linear e de estabilidade numérica. Isto no intuito de alinhar esta análise com a definição de observabilidade numérica

proposta por Krumpholz et al. (1980). Ou seja, quais as condições necessárias para que, partindo do *flat start*, seja numericamente factível obter as variáveis de estado, como ilustrado na Figura 3.

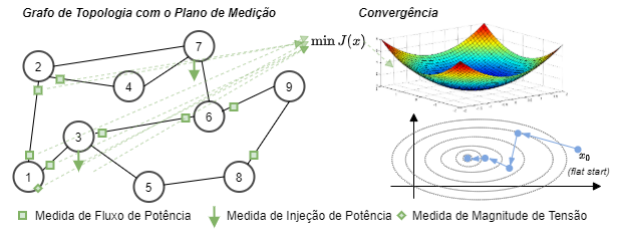


Figura 3. Exemplo de topologia da rede com um plano de medição, e análise de convergência numérica.

Inicialmente, uma característica importante para a convergência de um algoritmo de otimização irrestrito, como o descrito pelo problema de estimação de estado em (2), e pela abordagem do método de Gauss-Newton de solução da equação normal em (3), é atender as chamadas *Condições de Wolfe* (Nocedal and Wright, 2006):

$$\begin{aligned} J(x^k + \alpha^k \Delta x) &\leq J(x^k) + c_1 \alpha \\ \nabla J(x^k + \alpha^k \Delta x)^T \Delta x &\geq c_2 \nabla J(x^k)^T \Delta x, \end{aligned} \quad (12)$$

na qual,  $c_1$  e  $c_2$  são constantes tal que  $0 < c_1 < c_2 < 1$ . São conhecidas como condição de decréscimo suficiente (ou condição de Armijo) e condição de curvatura, respectivamente. Sua garantia implica em um tamanho de passo na direção do ponto ótimo que não seja muito pequeno, com uma convergência lenta, e nem muito grande, que possa causar divergência. Em geral, são garantidas pelo uso de busca linear de tamanho de passo baseada em *backtracking* (Nocedal and Wright, 2006).

Quanto ao método empregado neste trabalho, e amplamente utilizado na literatura, o método de Gauss-Newton, o seguinte Teorema atesta sua convergência:

*Teorema 1* (demonstrado em (Nocedal and Wright, 2006)): Supondo que a função de resíduo  $(z - h(x))$  é Lipschitz contínua e diferenciável em uma região do domínio na qual a função objetivo é limitada  $\mathcal{N} := \{x | J(x) \leq J(x_0)\}$ , e que a jacobiana  $H(x)$  satisfaz a condição de posto completo (igual ao número de variáveis de estado a serem estimadas) em  $\mathcal{N}$ . Então se as iterações  $x^k$  forem geradas pelo método de Gauss-Newton com tamanho de passo  $\alpha^k$  satisfazendo as condições de Wolfe, temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^T(x^k)(z - h(x^k)) = 0.$$

O resultado acima caracteriza o aspecto de convergência global do EE WLS, através do algoritmo de Gauss-Newton. Porém a estabilidade numérica do algoritmo ainda deve ser satisfeita, em especial na solução do sistema linear associado ao processo iterativo do estimador. O conceito de estabilidade numérica está relacionado com a possibilidade de se realizar diferentes operações computacionais, sem perder precisão na solução, e considerando as limitações de cálculo usando álgebra de ponto flutuante. Esta análise está intimamente relacionada com o número de condicionamento  $k(\cdot)$  das matrizes.

No caso do problema de estimação de estado é possível demonstrar que o número de condicionamento da matriz Ganho, em (5), é da ordem de grandeza do quadrado do número de condicionamento da matriz  $W^{\frac{1}{2}}H(x)$ :

$$k(G) \approx [k(W^{\frac{1}{2}}H(x))]^2. \quad (13)$$

Entretanto, a abordagem baseada no método ortogonal é numericamente melhor condicionada do que a abordagem tradicional pela matriz ganho. Considere o número de condicionamento da matriz  $R$  obtida pela fatoração ortogonal:

$$\begin{aligned} k(R) &= \|R\| \|R\|^{-1} \\ k(R) &= \|[(Q^T)^{-1}W^{1/2}H(x)]\| \|[(Q^T)^{-1}W^{1/2}H(x)]^{-1}\| \\ k(R) &\approx \|(Q^T)^{-1}\| \|(W^{1/2}H(x))\| \|(W^{1/2}H(x))^{-1}\| \|Q^T\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Uma vez que  $Q$  é ortogonal, as seguintes propriedades são válidas:  $Q^T = Q^{-1}$  e  $\|Q\| = \|(Q^T)^{-1}\| = 1$ . Desta forma, o número de condicionamento de  $R$  é aproximadamente:

$$k(R) \approx \|(W^{1/2}H(x))\| \|(W^{1/2}H(x))^{-1}\| = k(W^{1/2}H(x)). \quad (15)$$

Ou seja, a abordagem ortogonal é quadraticamente melhor condicionada que a abordagem pela matriz Ganho. Finalmente, para garantir a estabilidade numérica do problema, o método de Reflexões de Householder Hebling et al. (2020), utilizado neste trabalho, é *Backward* estável, com um majorante do erro relativo da ordem do número de condicionamento da matriz  $W^{\frac{1}{2}}H(x)$  (Higham, 2002):

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(K(W^{\frac{1}{2}}H(x))\epsilon_{mquina}), \quad (16)$$

na qual,  $\epsilon_{mquina}$  representa a precisão das operações de ponto flutuante da máquina. Esta análise permite inferir a factibilidade de se obter as variáveis de estado, mas não permite uma análise qualitativa do plano de medição.

#### 4. SISTEMÁTICA DE AVALIAÇÃO

Como destacado, este artigo busca explorar os conceitos de observabilidade e redundância de medidas sob a ótica das definições topológica, algébrica e numérica. Para demonstrar e aferir os efeitos teóricos descritos na seção anterior, este trabalho propõe o uso das seguintes métricas.

- Métrica Topológica: quantidade de medidas por nó em relação à quantidade de barras adjacentes do nó:

$$Gc_i = N_{imed} / N_{itop} \quad (\%), \quad (17)$$

na qual,  $N_{imed}$  é a quantidade de medidas instaladas em determinado nó  $i$ , e  $N_{itop}$  é a quantidade total de barras adjacentes ao nó  $i$ .

- Métrica Algébrica: quantidade de medidas redundantes de cada  $i$ -ésima variável de estado, obtida através da matriz  $H_{\Delta}$ :

$$Rl_i = nnz(H_{\Delta:i}), \quad (18)$$

na qual,  $nnz(\cdot)$  representa o número de elementos não nulos da  $i$ -ésima coluna da matriz  $H_{\Delta}$ .

- Métrica Numérica: número de condicionamento da matriz utilizada para obter a solução iterativa do estimador de estado, ou seja, da matriz Ganho  $G$ , no caso da abordagem tradicional, e da matriz  $W^{1/2}H(x)$ , no caso da abordagem baseada em método ortogonal.

$$k(\cdot) = \lambda_{max} / \lambda_{min}, \quad (19)$$

na qual,  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  representam o maior e menor autovalor, respectivamente, da matriz sendo calculado o número de condicionamento.

Quando aos testes de simulação, foram realizados com os sistemas de transmissão IEEE14, IEEE30 e IEEE118 (IEEE, 2020). A localização e tipos de medidas são apresentados nas Tabelas 1 a 3 com as respectivas quantidades.

Tabela 1. Plano de medição IEEE14 barras

Localização		
Injeção na barra	Fluxo no ramo	Tensão na barra
2;4;6;7;9;11;13	6-12;7-8;9-14;13-14;2-1 5-1;8-7;11-10	2;3;6;7;8;9
7	9	7

Tabela 2. Plano de medição IEEE30 barras

Localização		
Injeção na barra	Fluxo no ramo	Tensão na barra
1;2;5;6;8;10; 12;15;16;18;19; 2425;26;27;30;	2-1;2-6;4-12;6-7;9-10;9-11 20-10;10-22;22-10;12-13 15-23;18-19;19-20;22-24 24-25;25-27;29-27;30-29	1;2;5;8;9;10; 11;12;13;24;27
17	19	11

Finalmente, as simulações foram realizadas utilizando o cenário original de fluxo de potência destes sistemas como caso de referência. Para obtenção dos valores das medidas para simulação do EE foram inseridos ruídos nas grandezas elétricas desses casos de referência, de acordo com (20) (Castillo et al., 2011).

$$z_i = z_i^{ref} + u_i \sigma_{z_i}, \quad (20)$$

na qual,  $z_i$  é o valor da  $i$ -ésima medida,  $z_i^{ref}$  é o valor da grandeza elétrica calculado no caso de referência (resultado do estudo de fluxo de potência),  $\sigma_{z_i}$  o desvio padrão da  $i$ -ésima medida, e  $u_i$  um número aleatório de distribuição normal padrão ( $N(0, 1)$ ). O desvio padrão busca capturar a incerteza relativa de cada medida através de (21).

$$\sigma_{z_i} = \left| z_i^{ref} \right| pr_i / 3, \quad (21)$$

na qual,  $pr_i$  denota a precisão da medida  $i$  (neste trabalho 2% para medidas de injeção e fluxo de potência e 1 % para medidas de magnitude de tensão). Não são inseridos ruídos em medidas virtuais (barras com injeções nulas). Para execução do EE WLS neste trabalho um baixo desvio padrão é associado para essas medidas (1.0 e-07).

Tabela 3. Plano de medição IEEE118 barras

Injeção na barra	Localização	
	Fluxo no ramo	Tensão na barra
6;17;18;20;22;23;25;26;28 30;31;45;46;47;48;53;59 65;66;68;69;70;72;76;77 85;88;89;90;91;95;100; 103;105;107;110;113	1-2;6-7;8-9;8-5;4-11;12-14;12-16;19-20;15-33;34-37;40-41;34-43;46-48;49-50;49-51 56-57;56-58;61-62;62-67;65-68;70-71;69-75;77-78;77-82;85-86;85-88;89-90;89-92 92-93;80-96;80-97;92-102;42-40;12-117;76-118;6-5;10-9;12-11;12-2;12-3;69-49 15-14;18-17;27-115;19-18;19-15;25-26;31-17;32-27;34-19;36-35;36-34;40-37;40-39 42-41;46-45;49-45;54-53;56-55;59-54;61-59;61-60;59-63;61-64;66-49;66-65;69-47 70-24;72-24;72-71;73-71;74-70;77-76;80-77;80-79;80-81;85-83;87-86;89-85;89-88;91-90 85-84;92-91;99-80;100-92;100-98;100-99;100-94;105-104;110-109;105-103;111-110	1;4;5;6;8;10;12;15; 18;19;24;25;26;27;30;31 32;34;36;37;38;40;42;44 45;46;48;49;54;55;56;59 61;62;64;65;66;68;
37	108	67

## 5. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

### 5.1 Inicialização do Vetor de Estado e Observabilidade

Para analisar o efeito que os valores assumidos na inicialização para o vetor de estado tem na análise de observabilidade, foram realizadas algumas simulações no sistema reduzido de 5 barras apresentado na Figura 4. Este teste apresenta os resultados da análise considerando quatro pontos de inicialização distintos:

- *FS*: flat start caracterizado pelas tensões nodais iguais a 1.0 p.u. e 0 rad;
- *FSP*: ponto de operação na vizinhança do flat start, obtido através da adição de ruído aleatório de média zero e desvio padrão igual a 0.02 p.u.;
- *FC*: ponto de operação da solução do cálculo de fluxo de potência obtido no caso de referência, buscando representar uma situação onde valores históricos muito próximos do estado atual fossem utilizados para inicializar o estimador;
- *FCP*: ponto de operação na vizinhança do ponto de operação do fluxo de potência, obtido através da adição de ruído aleatório de média zero e desvio padrão igual a 0.02 p.u..

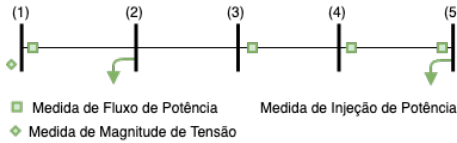


Figura 4. Sistema de teste de 5 barras e plano de medição.

São avaliadas duas condições do plano de medição: a primeira considerando as medidas da Figura 4; e a segunda removendo a medida de injeção de potência (ativa e reativa) na barra 2. A Figura 5 apresenta a análise de observabilidade topológica para estas duas condições. A segunda condição não é observável, visto que não existe AGO para o grafo de medição como um todo.

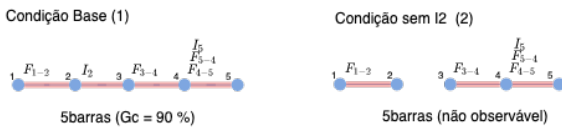


Figura 5. Análise de observabilidade topológica do sistema de teste de 5 barras: grafos de medição.

A Tabela 4, por sua vez, apresenta o posto da matriz Jacobiana nos diferentes pontos de inicialização, para as

duas condições. O número de variáveis de estado neste sistema é igual a 9 (2 x 5 barras - 1 referência). E a Figura 6 ilustra o padrão de esparsidade da matriz  $H_{\Delta}$  para este sistema nos diferentes pontos de inicialização. Nota-se novamente, que a análise algébrica também demonstra o cenário sem a medida  $I_2$  como não observável.

Tabela 4. Posto da matriz Jacobiana em diferentes pontos de inicialização.

Sistema	FS	FSP	FC	FCP
5 barras	9	9	9	9
5 barras sem $I_2$	8	8	8	8

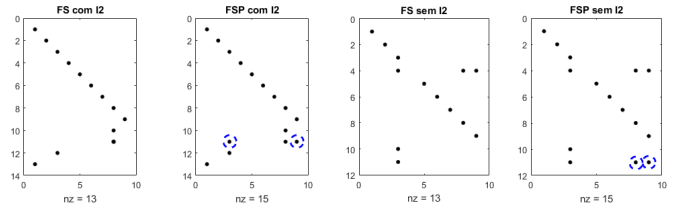


Figura 6. Padrão de esparsidade da matriz  $H_{\Delta}$  na análise algébrica para o sistema de 5 barras.

Destaca-se que, para as condições fora do flat start, surgiram novos elementos não nulos no padrão de esparsidade, ou seja, alterações na redundância das medidas não mapeadas inicialmente. Desta forma, as relações de redundância podem ser afetadas em função dos valores utilizados para inicializar o vetor de estado. Cabe ressaltar que a medida indicada que apresentou um aumento de redundância trata-se da medida de fluxo de potência ativa  $P_{5-4}$ , indicando que fora do flat start a relação de redundância entre medidas nos dois terminais de um ramo foi incrementada.

Para averiguar numericamente, foi realizado o processo de estimação de estado considerando estes outros pontos de inicialização, e os resultados de convergência são apresentados na Tabela 5. O método ortogonal manteve coerência com o esperado em termos de observabilidade. Entretanto, a abordagem pela matriz Ganho chegou ao final do processo iterativo do estimador, indicando convergência. Isto devido ao fato de que o cálculo explícito da matriz Ganho, obtido pela multiplicação de matrizes, pode acarretar em erros de arredondamento na representação em ponto flutuante. Estes erros são suficientes para introduzir fill-ins na matriz Ganho e artificialmente possibilitar a solução numérica. Cabe ressaltar que a convergência obtida nestes casos culminou em um resultado desacoplado angularmente entre os dois grafos destacados na Figura 5.

Tabela 5. Convergência numérica do estimador em diferentes pontos de operação.

Método	Sistema	FS	FSP	FC	FCP
Met. Ganho	5 barras	3	3	1	2
	5 barras sem $I_2$	4*	4*	1	2
Met. Ort.	5 barras	3	3	1	2
	5 barras sem $I_2$	NC	NC	NC	NC

\*Convergiu para um resultado distante do caso de referência.

### 5.2 Inicialização do Vetor de Estado e Redundância

Vide os resultados apresentados, esta seção apresenta análises do impacto da inicialização do estimador nos demais sistemas de teste do IEEE. A Figura 7 apresenta o grafo associado ao plano de medição de cada sistema teste para a análise topológica de observabilidade. Observa-se que todos os sistemas e planos de medição associados são observáveis, dado a existência de uma AGO. Além disto é destacada também a métrica topológica, capturando um noção média de redundância local entre cada sistema apenas com informações topológicas.

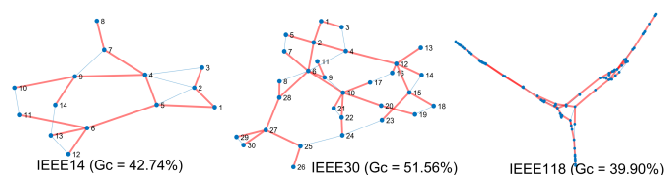


Figura 7. Análise de observabilidade topológica dos sistemas de teste IEEE14, IEEE30 e IEEE118 barras.

Em seguida, apresenta-se os resultados da análise algébrica de observabilidade para estes sistemas. Para demonstrar o impacto dos efeitos não-lineares, este teste considera os quatro pontos de inicialização apresentados na seção anterior. A Tabela 6 apresenta a métrica de redundância local baseada na matriz  $H_{\Delta}$ . Nota-se novamente uma variação da redundância local, capturada através da matriz  $\hat{H}_{\Delta}$ , entre os diferentes pontos de inicialização (um sensível aumento na mediana desta métrica). Desta forma, uma análise de redundância através de um método algébrico pode capturar mais relações que o anterior, baseado na análise topológica. Em situações práticas, este aumento de redundância local implica em aumento de confiabilidade do EE, e que poderia acarretar, por exemplo, na redução de medidas críticas e de conjuntos críticos de medidas.

Tabela 6. Mediana da métrica algébrica de redundância local para cada ponto de operação.

Sistema	FS	FSP	FC	FCP
IEEE14	5	7	7	7
IEEE30	10	12	12	12
IEEE118	5	7	7	6

Como exemplo, a Figura 8 apresenta o *boxplot* para os valores de redundância local. Nota-se não só pelo aumento da mediana, mas de uma forma geral em todas as variáveis de estado o mesmo aumento sensível de redundância local.

### 5.3 Iterações do Estimador de Estado e Redundância

As análises anteriores demonstraram que as relações de observabilidade e redundância se alteram sensivelmente dependendo da escolha dos valores para inicialização do

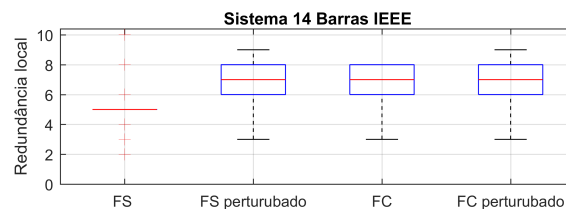


Figura 8. Boxplot da métrica de redundância local de todas as variáveis de estado para o sistema de teste IEEE14 em diferentes pontos de inicialização.

vetor de variáveis de estado. Nesta seção, este efeito é avaliado durante o processo iterativo do EE WLS, partindo da condição de *flat start*. Ou seja, em consonância com a definição de observabilidade numérica. Inicialmente a Tabela 7 apresenta a mediana da métrica de redundância local em cada iteração do estimador para os sistemas de teste.

Tabela 7. Mediana da métrica algébrica de redundância por iteração do EE WLS.

Sistema	Iteração				
	1	2	3	4	5
IEEE14	5	7	8	8	-
IEEE30	10	12	11	11	-
IEEE118	5	8	7	6	7

Novamente, para ilustrar este efeito na redundância local, a Figura 9 apresenta o *boxplot* desta métrica de redundância durante o processo iterativo do estimador.

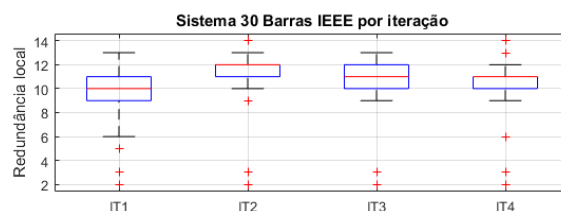


Figura 9. Boxplot da métrica de redundância local de todas as variáveis de estado para o sistema de teste IEEE30 por iteração do estimador WLS.

Finalmente, para avaliar os aspectos numéricos durante as iterações do EE, a Figura 10 apresenta o número de condicionamento para a matriz Ganho  $G(x)$ , utilizada na abordagem tradicional, e para a matriz  $W^{1/2}H(x)$ , utilizada na ortogonal. Em ambas não há mudança sensível do condicionamento numérico ao longo do processo iterativo, mantendo-se na mesma magnitude que o ponto inicial do *flat start*. Cabe ressaltar a redução quadrática do número de condicionamento, pela abordagem ortogonal.

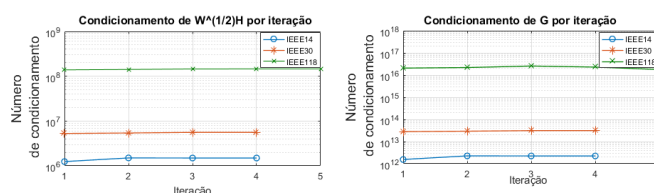


Figura 10. Número de condicionamento da matriz  $W^{1/2}H(x)$  e da matriz Ganho por iteração do EE.

#### 5.4 Efeito da Ponderação no Mal Condicionamento

Finalmente, para explorar de forma mais profunda a observabilidade numérica, o desvio-padrão associado às medidas virtuais foi alterado para  $1.0 \times 10^{-9}$ , de forma a piorar deliberadamente o condicionamento do problema de estimação. A Tabela 8 e a Figura 11 apresentam a característica de convergência e o número de condicionamento pelo método Ortogonal e para a abordagem da matriz Ganho, respectivamente. Nota-se a perda de observabilidade numérica no caso da matriz Ganho, enquanto o método Ortogonal, mais bem condicionado, mantém a característica quadrática de convergência do método de Gauss-Newton. Apesar deste mal condicionamento ter sido induzido pela excessiva ponderação das medidas virtuais (uma fonte conhecida de mal condicionamento), a escala e parâmetros da rede também influenciam este aspecto, visto que o sistema IEEE118 divergiu no caso da abordagem pela matriz Ganho, e os casos IEEE14 e IEEE30 precisaram de mais iterações.

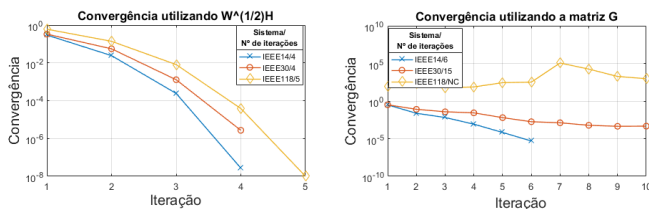


Figura 11. Característica de convergência para o método Ortogonal e para a abordagem da matriz Ganho para os sistemas do IEEE mal condicionados.

Tabela 8. Número de condicionamento no método Ortogonal e da matriz Ganho para os sistemas IEEE mal condicionados.

Matriz	Sistema		
	IEEE14	IEEE30	IEEE118
$W^{1/2}H(x_0)$	1,153 e08	5,274 e08	8,008 e09
$G(x_0)$	1,292 e16	3,472 e18	3,730 e18

## 6. CONCLUSÕES

Tradicionalmente, os métodos de análise de observabilidade se baseiam em modelos lineares para avaliar aspectos de redundância e vulnerabilidades dos planos de medição. Este trabalho apresentou resultados de situações particulares na análise de observabilidade e de redundância de medidas quando considerado o aspecto não-linear do problema de estimação. Foi observado um incremento de redundância local frente aos diferentes valores de inicialização do vetor de estado e também do processo iterativo do EE. Este aumento foi capturado através de um método de análise algébrica de observabilidade, utilizado neste trabalho para o mapeamento marginal da redundância do modelo de medição, em cada valor de vetor de estado, ao invés de utilizar o modelo linearizado.

Além disto, a análise numérica, fundamentada em aspectos de convergência e estabilidade numérica, demonstrou formalmente o impacto do mal condicionamento numérico do problema de estimação. Vale ressaltar que a abordagem baseada no método ortogonal implica em aumento significativo no quesito de observabilidade numérica, com melhoria quadrática no número de condicionamento. A abordagem

da matriz Ganho, além de pior condicionada, apresenta casos suscetíveis a erros de arredondamento numérico, podendo levar erroneamente à convergência quando os sistemas são algébrica e topologicamente não observáveis. Quanto a trabalhos futuros, destaca-se a extensão no contexto de sistemas de distribuição trifásicos, buscando no maior detalhamento na exploração das relações de redundância e seu impacto em um cenário de baixa redundância, em especial para monitorar desbalanço de tensão.

## REFERÊNCIAS

- Abur, A. and Exposito, A.G. (2004). *Power system state estimation: theory and implementation*. CRC press.
- Augusto, A.A., Do Coutto Filho, M.B., Stacchini de Souza, J.C., and Miranda, V. (2016). Probabilistic assessment of state estimation capabilities for grid observation. *IET Gen., Transm. Dist.*, 10(12), 2933–2941.
- Bretas, N.G. (1996). Network observability: theory and algorithms based on triangular factorisation and path graph concepts. *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, 143(1), 123–128.
- Castillo, M.R.M., London, J.B.A., Bretas, N.G., Lefebvre, S., Prévost, J., and Lambert, B. (2011). Offline detection, identification, and correction of branch parameter errors based on several measurement snapshots. *IEEE Trans. Power Syst.*, 26(2), 870–877.
- Costa, A.S., Lourenco, E.M., and Clements, K.A. (2002). Power system topological observability analysis including switching branches. *IEEE Trans. Power Syst.*, 17(2), 250–256.
- de Almeida, M.C., Asada, E.N., and Garcia, A.V. (2008). On the use of gram matrix in observability analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 23(1), 249–251.
- Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (2012). *Matrix computations*, volume 3. JHU press.
- Hebling, G.M., Massignan, J.A., London Jr, J.B.A., and HM, C.M. (2020). Sparse and numerically stable implementation of a distribution system state estimation based on multifrontal qr factorization. *Electric Power System Research*, (a ser publicado).
- Higham, N.J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms*, volume 80. Siam.
- IEEE (2020). Power systems test case archive. URL <https://labs.ece.uw.edu/pstca/>.
- Krumpholz, G.R., Clements, K.A., and Davis, P.W. (1980). Power system observability: A practical algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99(4), 1534–1542.
- London, J.B.A., Alberto, L.F.C., and Bretas, N.G. (2007). Analysis of measurement-set qualitative characteristics for state-estimation purposes. *IET Gen., Transm. Dist.*, 1(1), 39–45.
- Nocedal, J. and Wright, S.J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, New York, NY, USA.
- Pires, R.C., Costa, A.S., and Mili, L. (1999). Iteratively reweighted least-squares state estimation through givens rotations. *IEEE Trans. Power Syst.*, 14(4), 1499–1507.
- Wu, F.F. and Monticelli, A. (1985). Network observability: Theory. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104(5), 1042–1048.
- Zhou, N., Wang, S., Zhao, J., and Huang, Z. (2020). Application of detectability analysis for power system dynamic state estimation. *IEEE Trans. Power Syst.*