

# UMA PROPOSTA PARA O RELAXAMENTO DA CONDIÇÃO DE EXCITAÇÃO PERSISTENTE NO CONTROLE ADAPTATIVO DE SISTEMAS DINÂMICOS

LUIZ TORRES\*, LEIZER SCHNITMAN\*, BRUNO AGUIAR\*

\*CTAI - Escola Politécnica - Universidade Federal da Bahia - UFBA,  
Rua Prof. Aristides Novis, nº 02, 2º andar, Federação,  
CEP: 40.210-630, Salvador, Bahia, Brasil.

luizhstorres@gmail.com, leizer@ufba.br, brunoaguiar\_94@hotmail.com

**Abstract**— This article presents a new proposal for the relaxation of the persistent excitation (PE) condition in adaptive control of dynamic systems. It is known that this condition is undesirable or even unfeasible in many practical applications. However, on the conventional adaptive control, the estimated parameters convergence, the asymptotic stability guarantee, and the null tracking error can only be assured if the PE condition is satisfied. Thus, the new approach presented here aims to minimize this requirement by taking advantage of the dynamic information already present in the estimation data. The properties of convergence and stability are investigated using a Lyapunov candidate function. The main contribution of the proposed method is the convergence of the estimates to their true values while also keeping the tracking error bounded with respect to an external reference signal. Numerical results are offered from an application of the method in an open-loop unstable nonlinear system. To verify the efficiency, other adaptive schemes available in the literature are compared to the new proposal.

**Keywords**— Adaptive control, Persistent excitation, Dynamic systems.

**Resumo**— Este artigo apresenta uma nova proposta para o relaxamento da condição de excitação persistente (EP) no controle adaptativo de sistema dinâmicos. Sabe-se que esta condição é indesejável ou até mesmo inviável em muitas aplicações práticas. No entanto, no controle adaptativo convencional, a convergência dos parâmetros estimados, a garantia de estabilidade assintótica e o erro de rastreamento nulo somente podem ser assegurados se a condição de EP for satisfeita. Assim, a nova abordagem apresentada aqui pretende minimizar esta exigência aproveitando a informação dinâmica já presente nos dados de estimação. As propriedades de convergência e estabilidade são investigadas usando uma função candidata de Lyapunov. A principal contribuição do método proposto é a convergência das estimativas para seus valores verdadeiros enquanto também mantém limitado o erro de rastreamento com respeito a um sinal de referência externo. Resultados numéricos são oferecidos a partir de uma aplicação do método em um sistema não linear instável em malha aberta. Para verificação da eficiência, outros esquemas adaptativos disponíveis na literatura são comparados a nova proposta.

**Palavras-chave**— Controle adaptativo, Excitação persistente, Sistemas dinâmicos.

## 1 Introdução

Na Teoria de Controle Adaptativo, a convergência assintótica dos erros de rastreamento e a convergência de parâmetros não podem ser garantidas sem uma condição de excitação persistente (Ioannou and Sun, 1996; Astrom and Wittenmark, 2008; Sastry and Bodson, 2011). Isto é, sem a condição de EP não há teoricamente como assegurar a estabilidade assintótica do sistema e o rastreamento de referência em malha fechada. Entretanto, a condição de EP é bastante exigente, fato este que dificulta sua utilização em muitos casos práticos (Narendra and Annaswamy, 1987; Narendra and Annaswamy, 1989). O método mais comum para viabilizar o cumprimento da condição de excitação persistente é adicionar ao sinal de controle um sinal senoidal de baixa amplitude e rico em frequências. Tal sinal adicional serve para excitar os estados do sistema e garantir a qualidade da estimação. Entretanto, em muitos casos práticos entradas exógenas não são toleradas ou, quando são, ocorrem baseadas em eventos da planta (e não de modo persistente) (Sastry and Bodson, 2011). Assim, o método mais comumente proposto em boa parte dos trabalhos, alguns bem

recentes, e que utilizam controladores adaptativos, recomenda como solução um método de estimação sujeito a restrições ou inconvenientes práticos (Maghenem et al., 2017; Kiumarsi et al., 2017; Modares et al., 2016; Abouheaf et al., 2015; Vamvoudakis et al., 2012).

O conceito de excitação persistente em esquemas adaptativos e sua aplicação em controle é há bastante tempo conhecido (Narendra and Annaswamy, 1987). Por outro lado, algumas pesquisas e publicações recentes tem motivado novas discussões a respeito do tema. Algumas propostas disponíveis na literatura têm sugerido métodos de adaptação com relaxamento parcial ou total da condição de EP. Em (Pan, Zhang and Yu, 2016), e artigos relacionados (Pan, Pan, Darouach and Yu, 2016; Pan and Yu, 2016), propõe-se um novo esquema de controlador adaptativo para sistemas monovariáveis (SISO) e lineares e invariantes no tempo (LTI). Tal proposta de MRAC garante, sob certa condição, chamada de intervalo de excitação (IE), a convergência de parâmetros com uma condição de EP mais fraca. No estudo encontrado em (Ortega and Barabanov, 2018), algumas premissas da condição de EP são relaxadas com o objetivo de atingir um consenso global em siste-

mas multi-agente de tempo contínuo em sistemas lineares e variantes no tempo. Este último trabalho é um dos primeiros resultados reportados na literatura sobre o tema, onde múltiplos agentes interagem e atingem o consenso (sincronismo global), visando a garantir ações de controle ótimas. Em (Chowdhary and Johnson, 2010) e trabalhos associados (Chowdhary et al., 2013; Mühllegg et al., 2012), técnicas de inteligência artificial para o aprendizado concorrente são incorporadas a um esquema de controlador para estimação de parâmetros sem excitação persistente e sem a utilização das medidas instantâneas dos estados do sistema para a adaptação. Essa proposta inovadora, entretanto, exige que o algoritmo de controle realize uma busca exaustiva nos valores armazenados da entrada de controle para maximizar seu valor singular e calcular a cada iteração o erro de estimação. Tal exigência aumenta em muito o esforço computacional do algoritmo como um todo. Já em (Jha et al., 2018) é apresentado um novo algoritmo de controle ótimo adaptativo capaz de lidar com incertezas nos parâmetros, porém sem exigir conhecimento sobre as características dinâmicas de um sistema linear. O trabalho é introduzido para o caso monovariável, onde as condições de EP são minimizadas e a estabilidade global é atingida. Apesar de interessante, o trabalho apresenta em seus resultados estimativas próximas a uma vizinhança em torno dos valores reais das estimativas ótimas, o que, em suma, prejudica uma melhor avaliação dos resultados alegados.

A principal contribuição deste artigo é a apresentação de uma nova metodologia que garante a convergência dos parâmetros estimados com relaxamento da condição de excitação no controle adaptativo de sistemas dinâmicos. O novo método não propõe a adição de um sinal externo ao sinal de controle do sistema. Este estudo propõe inicialmente a análise para o caso SISO, selecionando como arquitetura o controlador adaptativo por modelo de referência (MRAC). Será provada a estabilidade assintótica global e o rastreamento de referência do sistema em malha fechada, assegurando-se ainda a convergência dos parâmetros para os seus valores verdadeiros. Para averiguar a eficácia do método proposto, um exemplo ilustrativo é apresentado e o método é também comparado com outros esquemas adaptativos que possuem a mesma finalidade.

## 2 Formulação do problema

O MRAC é uma arquitetura bastante difundida de controle adaptativo. Seu algoritmo visa a fazer uma planta se comportar como um modelo de referência previamente escolhido. Este trabalho utiliza a estrutura básica do MRAC como ponto de partida para a análise do método proposto. Assim, considere uma classe de sistemas não-lineares

SISO com um conjunto linear de incertezas nos parâmetros na forma a seguir

$$\dot{x} = \Lambda x + b(f(x) + u), \quad (1)$$

com  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $b = [0, \dots, 0, 1]^T$ , onde  $x = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de estados da planta,  $u(t) \in \mathbb{R}$  é uma entrada de controle, e  $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  é uma função que representa as não linearidades do sistema. Um modelo de referência que caracteriza a resposta desejada para a planta pode ser escrito como

$$\dot{x}_r = A_r x_r + b_r r, \quad (2)$$

com  $b_r = [0, \dots, 0, b_{rn}]^T$ , onde  $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é estritamente uma matriz Hurwitz,  $x_r = [x_{r1}(t), x_{r2}(t), \dots, x_{rn}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de estados de referência, e  $r(t) \in \mathbb{R}$  é um sinal de referência limitado. As seguintes premissas são válidas:

- $x$  é mensurável;
- o par  $(\Lambda, b)$  é controlável; e
- $f(x)$  é linearmente parametrizável na seguinte forma:

$$f(x) = W^* \Phi(x), \quad (3)$$

onde,  $W^* \in \Omega_{c_w} \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  é um vetor de parâmetros constantes desconhecidos ou conhecidos com incertezas,  $\Omega_{c_w} = \{x \mid \|x\| \leq c\}$  denota uma esfera de raio constante e conhecido  $c_w \in \mathbb{R}^+$ , e  $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^N$  é um vetor de funções de regressão conhecidas.

**Observação 1:** *No caso nominal, o vetor de parâmetros  $W^*$  pode ser conhecido a priori. Porém essa nem sempre é a regra. No entanto, independente de qual seja do caso, a lei de adaptação a ser proposta deve assegurar que  $\hat{W}(t) \rightarrow W^*$ . Isto será examinado mais a frente.*

Seja  $x_{re}(t) = [x_r^T(t), r(t)]^T$  um sinal de referência aumentado e  $\tilde{W}(t) \in \mathbb{R}^N$  um vetor contendo as estimativas de  $W^*$ . Define-se  $e(t)$  o erro de rastreamento conforme a seguir,

$$e(t) = x(t) - x_r(t), \quad (4)$$

e  $\tilde{W}(t) = W^* - \hat{W}(t)$ , com  $\tilde{W}(t) \in \mathbb{R}^N$  sendo um vetor composto pelas diferenças entre os parâmetros conhecidos e as suas respectivas estimativas.

O objetivo deste estudo é propor uma lei de controle  $u(t)$  tal que  $e(t)$  e  $\tilde{W}(t)$  convirjam exponencialmente a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Um sinal limitado  $u(t)$  é dito de excitação persistente se, e somente se,  $\exists \alpha, T_0 \in \mathbb{R}^+$ , tal que (Narendra and Annaswamy, 1987)

$$\int_t^{t+T_0} u(\tau) u^T(\tau) d\tau \geq \alpha I. \quad (5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

Seguindo a formulação clássica da lei de controle do MRAC conforme (Ioannou and Sun, 1996), tem-se

$$u(t) = \underbrace{K_e^T e}_{u_{pd}} + \underbrace{K_r^T x_{re}}_{u_{re}} - \underbrace{\hat{W}^T \Phi(x)}_{u_{ad}}, \quad (6)$$

onde  $u_{pd}$  é a parcela de  $u$  referente a ação de retroalimentação (*feedback*) proporcional-derivativa,  $u_{re}$  refere-se a ação de alimentação direta (*feed-forward*), e  $u_{ad}$  é a parcela adaptativa da lei de controle. Os vetores  $K_e \in \mathbb{R}^n$  e  $K_r \in \mathbb{R}^{n+1}$  são ganhos do controlador e a escolha de  $K_r$  satisfaz a seguinte equação

$$bK_r^T x_{re} = (A_r - \Lambda)x_r + b_r r. \quad (7)$$

Substituindo (6) e (7) em (1), obtém-se a dinâmica do erro de rastreamento

$$\dot{e} = Ae + b\tilde{W}^T \Phi(x), \quad (8)$$

onde a adequada seleção de  $K_e$  faz a matriz  $A := \Lambda - bK_e^T$  ser estritamente Hurwitz. Assim, para uma matriz arbitrária  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $Q = Q^T > 0$ , existe uma única solução  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $P = P^T > 0$  que satisfaz a equação de Lyapunov a seguir

$$A^T P + PA = -Q. \quad (9)$$

Seja  $\Lambda = \Phi(x)e^T P b$  uma função auxiliar. Uma lei de adaptação dos parâmetros pode ser escrita como

$$\dot{\hat{W}}(t) = \gamma P_r \{\Lambda\}, \quad (10)$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  é um ganho de adaptação, e  $P_r \{\cdot\}$  é um operador de projeção conforme abaixo (Ioannou and Sun, 1996):

$$P_r \{\Lambda\} = \begin{cases} \Lambda, & \text{se } \|\hat{W}\| < c_w \text{ ou } \|\hat{W}\| = c_w \ \& \ \hat{W}^T \Lambda \leq 0 \\ \Lambda - \hat{W} \hat{W}^T \Lambda / \|\hat{W}\|^2, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (11)$$

Seja uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função candidata de Lyapunov na forma

$$V(z) = \frac{1}{2}(e^T P e) + \frac{1}{2\gamma}(\tilde{W}^T \tilde{W}), \quad (12)$$

onde  $z = [e^T, \tilde{W}^T]^T \in \mathbb{R}^{n+N}$  representa a dinâmica composta por (8) e (10). Segue-se que, a partir da formulação clássica do MRAC (Ioannou and Sun, 1996), se  $\hat{W}(0) \in \Omega_{c_w}$  e  $u(t)$  atendem a condição de EP expressa em (5), então o sistema em malha fechada atinge a estabilidade assintótica global na medida em que os sinais  $e(t)$  e  $\tilde{W}(t)$  convergem exponencialmente a zero.

### 3 Método proposto

O método proposto neste trabalho visa a tirar vantagem da informação de excitação presente no vetor de parâmetros estimados  $\hat{W}(t)$  e já disponível a cada iteração do algoritmo de controle. A ideia principal é introduzir esta informação dinâmica durante a etapa de cálculo das estimativas, sem recorrer a adição de sinais exógenos na entrada de controle, e ainda garantir que  $e(t), \tilde{W}(t) \rightarrow 0, \hat{W}(t) \rightarrow W^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definição 1:** Seja  $\epsilon = [\epsilon_1(t), \epsilon_2(t), \dots, \epsilon_n(t)]^T \in \mathbb{R}^N$  um vetor *erro de estimação*, tal que  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $\hat{W}(t) \rightarrow W^*$ , e calculado da seguinte maneira

$$\epsilon_i(t) = W_i^* - \hat{W}_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (13)$$

com  $i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ . Assim, a lei de adaptação dos parâmetros em (10) pode ser reescrita na forma

$$\dot{\hat{W}}(t) = P_r \{\gamma \Phi(x) e^T P b + K_w \epsilon\}, \quad (14)$$

onde  $K_w \in \mathbb{R}^+$  é um fator peso de  $\epsilon$ , e  $P_r \{\cdot\}$  é o operador de projeção conforme definido em (11).

### 4 Análise de convergência dos erros e estabilidade global do sistema

O teorema a seguir estabelece os resultados da análise de convergência do erro de rastreamento  $e$ , do erro de estimação  $\epsilon$  e também da estabilidade global do sistema em malha fechada para o método proposto.

**Teorema 1** *Considere o sistema descrito em (1) alimentado pela lei de controle em (6) com (14), onde o ganho do controlador  $K_r$  é selecionado de modo a satisfazer (7) e a constante  $K_e$  é escolhida de forma que a matriz  $A$  em (8) seja estritamente Hurwitz. Se  $\exists \alpha, T_0 \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\int_t^{t+T_0} u(\tau) u^T(\tau) d\tau \geq \alpha I$ , e ainda  $\hat{W}(0) \in \Omega_{c_w}$ , então, considerando que todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados,  $e(t), \tilde{W}(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty, \forall t \geq 0$ , e o sistema atinge a estabilidade exponencial global.*

**Prova:** Primeiro, considere o problema de controle em  $t \in [0, \infty)$ . Selecione a função candidata de Lyapunov em (12) para o sistema em malha fechada. Utilizando (9), a derivada no tempo de  $V$  ao longo de (8) é

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}(e^T Q e) + \tilde{W}^T (\Phi(x) e^T P b - \frac{\dot{\hat{W}}}{\gamma}). \quad (15)$$

Observar que  $\hat{W}(0) \in \Omega_{c_w}$ . Utilizando o resultado do operador de projeção em (Ioannou and

Sun, 1996), obtem-se  $\hat{W}(t) \in \Omega_{c_w}, \forall t \geq 0$ . Substituindo (14) em (15)

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}(e^T Q e) - \frac{K_w}{\gamma}(\tilde{W}^T \epsilon). \quad (16)$$

onde  $K_w, \gamma \in \mathbb{R}^+$ . Conforme a definição de  $\epsilon$  em (13), tem-se que

$$\tilde{W}^T \epsilon \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (17)$$

Assim, conclui-se que

$$\dot{V} \leq 0, \forall t \geq 0. \quad (18)$$

A expressão negativa semi-definida de  $\dot{V}$  em (18) garante que  $e$  e  $\tilde{W}$  são limitados (assim,  $e, \tilde{W} \in L_\infty$ , onde  $L_\infty$  denota um espaço de sinais limitados). Aplicando-se o *Lemma de Barbalat* (Khalil, 2002), mostra-se que  $e(t), \tilde{W}(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e o sistema em malha fechada é estável. Além disso, como  $e, \tilde{W} \in L_\infty$ , e  $\dot{V} \leq 0$  é satisfeita  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , e  $V$  em (12) é radialmente ilimitada (*i.e.*  $V(z) \rightarrow \infty$  quando  $\|z\| \rightarrow \infty$ ), a estabilidade é global (Khalil, 2002). Como uma decorrência do fato de que  $e, \tilde{W} \in L_\infty$ , obtem-se que  $x, \dot{W}, \Phi, \epsilon, u \in L_\infty$ , pelas suas respectivas definições. Portanto, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados,  $\forall t \geq 0$ .  $\square$

**Corolário 1:** Considerando ainda a definição do vetor de erro em (4), se  $e \rightarrow 0$ , então  $x \rightarrow x_r$ , o que implica na convergência dos parâmetros para os seus valores verdadeiros (conforme (13), se  $\tilde{W}(t) \rightarrow W^*$ , logo  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

## 5 Resultados de simulação

O diagrama de blocos na Fig(1) apresenta a ideia geral do esquema de controle proposto.

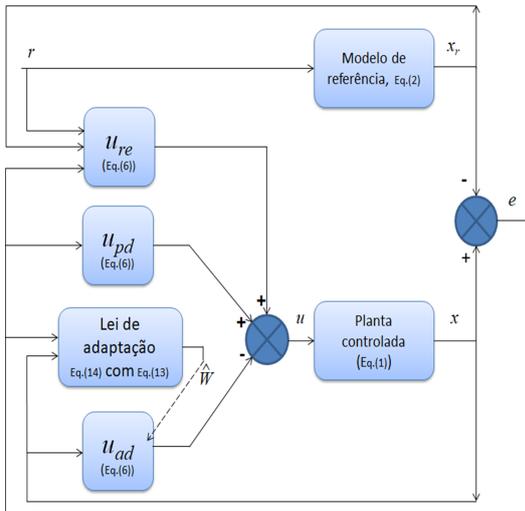


Figura 1: Ideia geral do controlador proposto.

Para ilustrar a eficácia do método proposto, considere o modelo do pêndulo invertido conforme a seguir

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (W^{*T} \Phi(x) + u), \quad (19)$$

com  $W^{*T} = [1, -1, 0, 5]^T$  e  $\Phi(x) = [\text{sen}(x_1), |x_2|x_2, e^{x_1 x_2}]^T$ , onde  $x_1$  (rad) e  $x_2$  (rad/s) são, respectivamente, a posição e a velocidade angular do pêndulo, e  $u(\cdot)$  (Volts) é a tensão de entrada de controle. O modelo de referência é dado por

$$\dot{x}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad (20)$$

onde  $x(0) = x_r(0) = [1, 1]^T$ ,  $r = 1$  em  $t \in [20, 25)$ , e  $r = 0$  em  $t \in [0, 20) \cup [25, \infty)$ .

A seleção de parâmetros para a lei de controle proposta em (6) com (14) é conforme procedimento a seguir: primeiro, resolve-se (7) para obter-se  $K_r = [-1, -2, 1]^T$ ; segundo, escolhe-se  $[1, 5, 1, 3]^T$  tal que  $A$  seja estritamente Hurwitz; terceiro, soluciona-se (9) com  $Q = \text{diag}(10, 10)$  para obter-se  $P$ , onde  $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  denota a matriz diagonal com elementos de  $x_1$  a  $x_n$ ; finalmente, define-se  $\gamma = 3, 5$ ,  $K_w = 6$  e  $c_w = 5$  em (14).

As simulações são realizadas em Matlab Simulink R2017a (versão 1.132) em um *notebook* com CPU Intel Core i3-80UG executando Windows 10, onde o método de solução do sistema de equações (*solver*) é o *ode1* de passo-fixo com um tamanho de passo (*step-size*) igual a 1ms e as demais configurações mantidas padrão. Para fins de comparação são também utilizadas nas simulações outros dois algoritmos disponíveis na literatura: a versão clássica do MRAC (formulação dada em (Ioannou and Sun, 1996)) e o *Model Reference Composite Learning Control* (MRCLC), onde as configurações do MRCLC são mantidas as mesmas conforme apresentação dada em (Pan, Zhang and Yu, 2016) e os demais parâmetros que são comuns a todos os três algoritmos de controle são definidos com os mesmos valores para uma comparação justa. Os resultados obtidos são exibidos nas Figs.((2) - (4)).

Uma avaliação visual do desempenho de controle mostra que, no geral, em todos os controladores os estados do modelo de referência  $x_r$  são rastreados pelos estados da planta  $x$ , e, em particular, o comportamento dos sinais de entrada de controle  $u$  são relativamente suaves e aceitáveis em termos de uma possível aplicação prática de cada algoritmo. Apesar disso, e utilizando uma métrica numérica mais precisa, como a norma-2 do erro de rastreamento, observa-se que o MRAC é o algoritmo que apresenta o pior desempenho nesta métrica ( $\|e\|_2 = 1,44$ ), seguido do MRCLC

( $\|e\|_2 = 1,31$ ) e, por fim, com o melhor desempenho, o método proposto ( $\|e\|_2 = 0,433$ ). No entanto, é somente nos resultados do MRCLC e do método proposto que é observada a convergência dos parâmetros (Figs.(2(d)),(3(d)),(4(d))). No MRAC não há a convergência de  $\hat{W}$  para seus valores verdadeiros em  $W^*$ .

Como já mencionado na Introdução deste trabalho, a proposta do MRCLC apresentada recentemente em (Pan, Zhang and Yu, 2016)) é baseada na utilização de um *intervalo de excitação*, como premissa para o relaxamento da condição de excitação persistente com real convergência dos parâmetros estimados. E sendo esse também o foco do presente estudo, será apresentado a seguir um comparativo dois a dois entre o MRCLC e o método proposto. Já foi mencionado que o erro de rastreamento é menor no método proposto que no MRCLC. Além disso, os parâmetros no MRCLC demoram mais tempo para convergir do que no método proposto (ver Figs.(2(d))(4(d))). Neste particular, as estimativas convergem rapidamente no método proposto (em menos de 2s de tempo de simulação), enquanto que no MRCLC levam mais que 100s para convergirem (ver Fig.(5)). O desempenho do MRCLC nos estágios iniciais da adaptação  $t \in [0, 50)$  é levemente pior, o que é refletido no comportamento do seu sinal de entrada de controle  $u$ . Assim, verifica-se neste intervalo que o maior pico de  $u$  no MRCLC é 11, 38% maior que o maior pico de  $u$  no método proposto (ver Figs.(2(b))(4(b))). Uma avaliação do tempo utilizado para execução da simulação (tempo de CPU) mostra-nos que o MRCLC também revela-se mais lento na execução do seu algoritmo. Gastou-se 6,7s no método proposto, contra 9,58s (isto é, 42,9% a mais) no MRCLC. Portanto, à luz dessas informações, o método proposto mostra-se também superior ao algoritmo do MRCLC.

## 6 Conclusões

Neste artigo um esquema de controle adaptativo foi desenvolvido com sucesso para garantir, além das propriedades básicas de estabilidade global e erro de rastreamento nulo, a real convergência dos parâmetros estimados para os seus valores verdadeiros. A principal contribuição do presente estudo é que, no esquema proposto, foi apresentado um método para o relaxamento da condição de excitação persistente, o que o torna interessante do ponto de vista de possíveis implementações práticas. Um sistema instável em malha aberta foi selecionado como exemplo ilustrativo da eficácia do método proposto e, comparado a outros dois métodos disponíveis na literatura, demonstrou superioridade em termos de desempenho de controle. Como continuidade à pesquisa, pretende-se ampliar a técnica proposta para os casos onde há perturbação interna/externa, e a extensão para

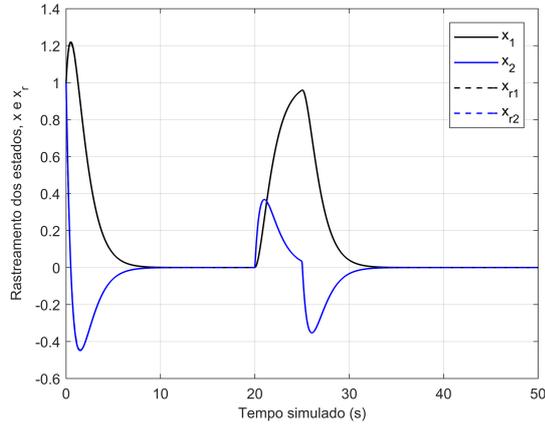
classes mais amplas de sistemas não lineares com parâmetros incertos e variantes no tempo está atualmente sob investigação.

## Agradecimentos

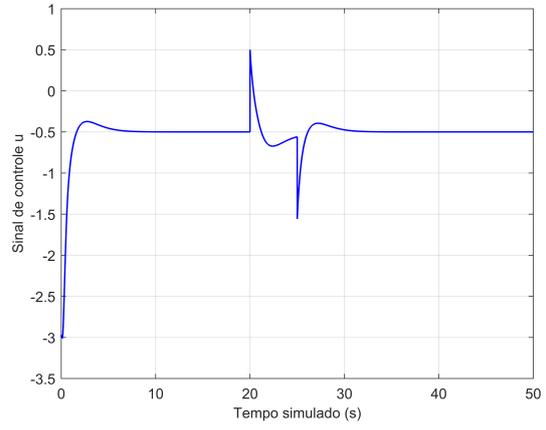
Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB), UFBA e CAPES pelo apoio financeiro.

## Referências

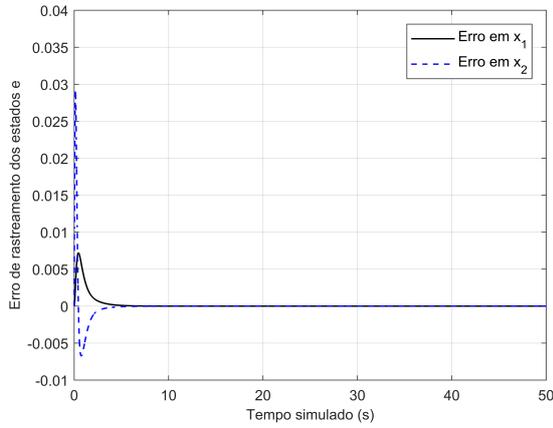
- Abouheaf, M. I., Lewis, F. L., Mahmoud, M. S. and Mikulski, D. G. (2015). Discrete-time dynamic graphical games: model-free reinforcement learning solution, *Control Theory and Technology* **13**(1): 55–69.
- Astrom, K. and Wittenmark, B. (2008). *Adaptive Control*, Dover, New York, USA.
- Chowdhary, G. and Johnson, E. (2010). Concurrent learning for convergence in adaptive control without persistency of excitation, *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, IEEE, pp. 3674–3679.
- Chowdhary, G., Yucelen, T., Mühlegg, M. and Johnson, E. N. (2013). Concurrent learning adaptive control of linear systems with exponentially convergent bounds, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **27**(4): 280–301.
- Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Jha, S. K., Roy, S. B. and Bhasin, S. (2018). Direct adaptive optimal control for uncertain continuous-time lti systems without persistence of excitation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems, 3rd*, New Jersey, Prentice Hall.
- Kiumarsi, B., Vamvoudakis, K. G., Modares, H. and Lewis, F. L. (2017). Optimal and autonomous control using reinforcement learning: A survey, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*.
- Maghenem, M., Loria, A. and Panteley, E. (2017). A robust  $\delta$ -persistently exciting controller for leader-follower tracking-agreement of multiple vehicles, *European Journal of Control*.
- Modares, H., Nagesh Rao, S. P., Lopes, G. A. D., Babuška, R. and Lewis, F. L. (2016). Optimal model-free output synchronization of heterogeneous systems using off-policy reinforcement learning, *Automatica* **71**: 334–341.



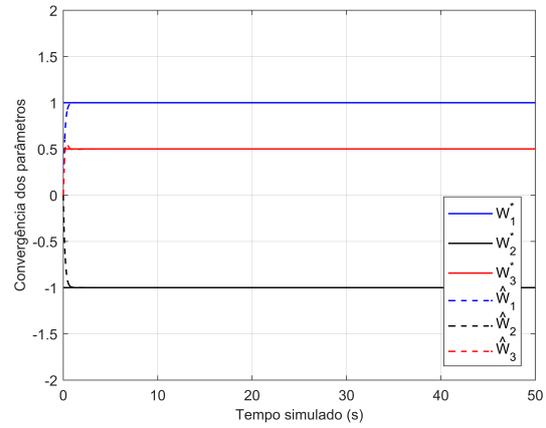
(a) Rastreamento dos estados,  $x \rightarrow x_r$ .



(b) Sinal de controle,  $u$ .



(c) Erro de rastreamento,  $e \rightarrow 0$ .



(d) Convergência dos parâmetros,  $\hat{W} \rightarrow W^*$ .

Figura 2: Resultados do esquema adaptativo com o método proposto.

Mühlegg, M., Chowdhary, G. and Johnson, E. (2012). Concurrent learning adaptive control of linear systems with noisy measurements, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, p. 4669.

Narendra, K. S. and Annaswamy, A. (1989). *Stable Adaptive System*, Prentice-Hall, New Jersey, USA.

Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M. (1987). Persistent excitation in adaptive systems, *International Journal of Control* **45**(1): 127–160.

Ortega, R. and Barabanov, N. (2018). Global consensus of time-varying multi-agent systems without persistent excitation assumptions, *IEEE Transactions on Automatic Control*.

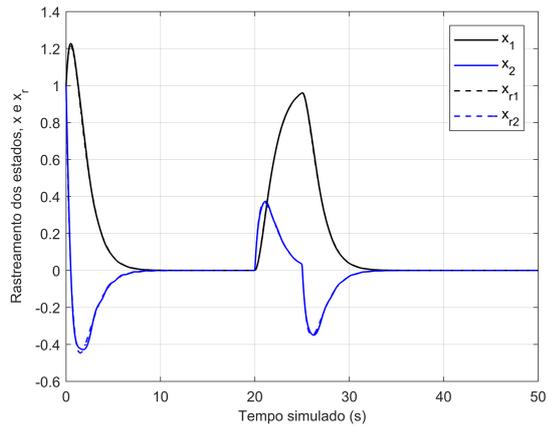
Pan, Y., Pan, L., Darouach, M. and Yu, H. (2016). Composite learning: An efficient way of parameter estimation in adaptive control, *Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese*, IEEE, pp. 3280–3285.

Pan, Y. and Yu, H. (2016). Composite learning from adaptive dynamic surface control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(9): 2603–2609.

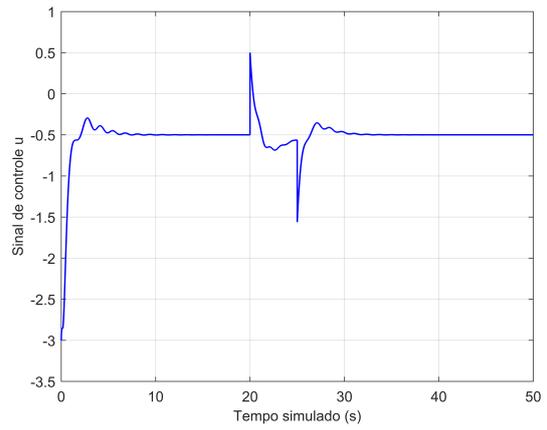
Pan, Y., Zhang, J. and Yu, H. (2016). Model reference composite learning control without persistency of excitation, *IET Control Theory & Applications* **10**(16): 1963–1971.

Sastry, S. and Bodson, M. (2011). *Adaptive control: stability, convergence and robustness*, Dover Publications, USA.

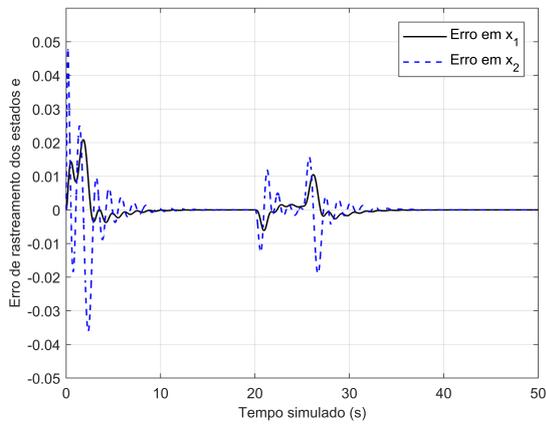
Vamvoudakis, K. G., Lewis, F. L. and Hudus, G. R. (2012). Multi-agent differential graphical games: Online adaptive learning solution for synchronization with optimality, *Automatica* **48**(8): 1598–1611.



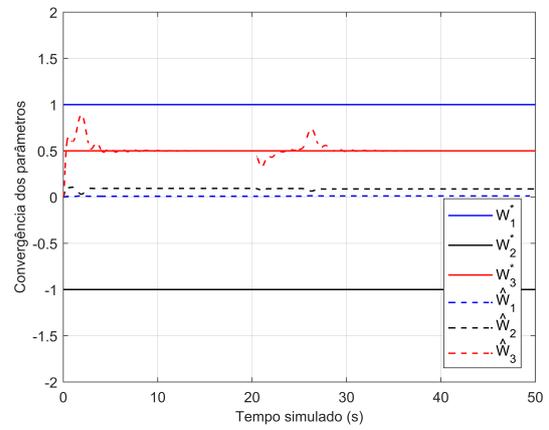
(a) Rastreamento dos estados,  $x \rightarrow x_r$ .



(b) Sinal de controle,  $u$ .

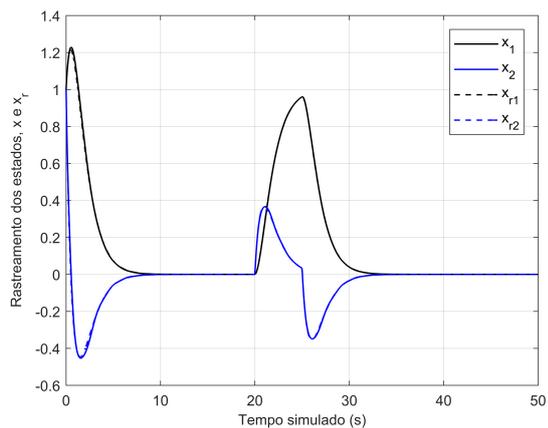


(c) Erro de rastreamento,  $e \rightarrow 0$ .

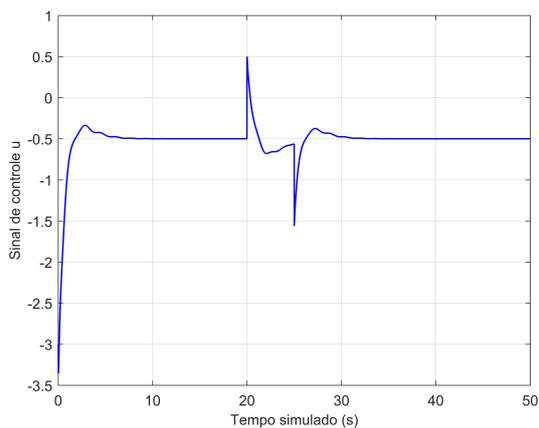


(d) (Não)convergência dos parâmetros.

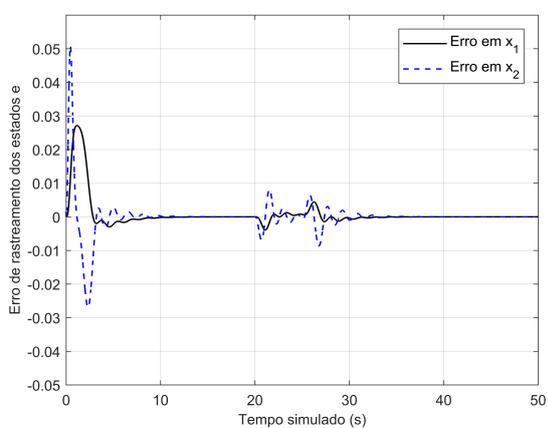
Figura 3: Resultados do controlador MRAC clássico.



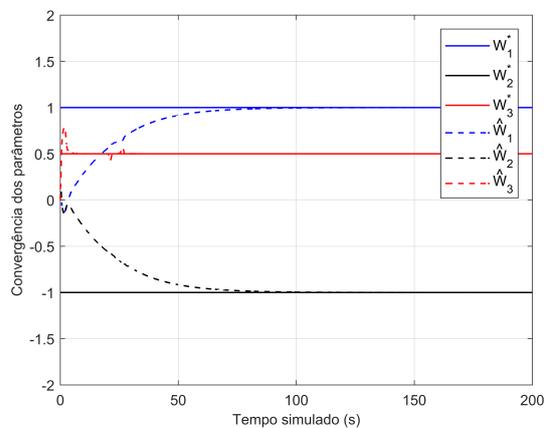
(a) Rastreamento dos estados,  $x \rightarrow x_r$ .



(b) Sinal de controle,  $u$ .

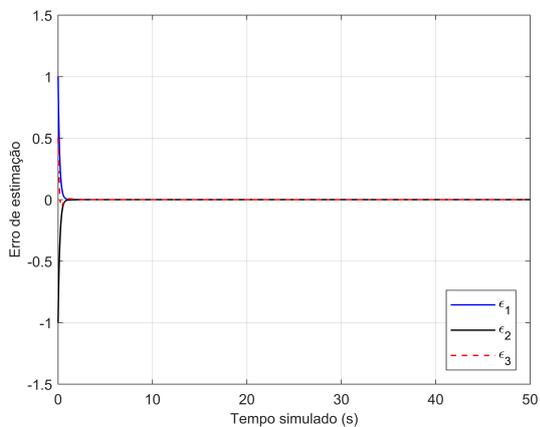


(c) Erro de rastreamento,  $e \rightarrow 0$ .

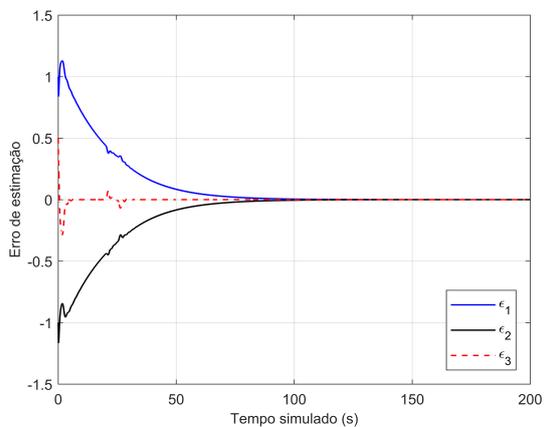


(d) Convergência dos parâmetros,  $\hat{W} \rightarrow W^*$ .

Figura 4: Resultados do controlador MRCLC.



(a) Resultados no método proposto,  $\epsilon \rightarrow 0$ .



(b) Resultados no MRCLC,  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Figura 5: Erro de estimação.