

# REGULADOR ROBUSTO RECURSIVO PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO VARIANTE NOS ESTADOS: UMA ABORDAGEM VIA CADEIA DE MARKOV

GUILHERME M. GAGLIARDI\*, DAIANE C. BORTOLIN\*, MARCO H. TERRA\*

*\*Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade de São Paulo - Campus de São Carlos  
Caixa postal 359, CEP 13.566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil*

Emails: {guilherme.gagliardi, daiane.bortolin}@usp.br, terra@sc.usp.br

**Abstract**— This paper proposes a recursive solution for the regulation problem of discrete-time linear systems with unknown time-varying state delays. The proposed approach is based on modeling the delayed system as an augmented system with unobserved Markovian jumps. A recursive robust regulator is designed from a dynamic model which encompasses all possible Markov chain states. The control law is obtained by application of the robust regularized least-squares approach, which combines penalty functions and the optimal solution to the regularized least-squares problem with uncertainties. A numerical example illustrates the performance of the proposed strategy when compared to existing techniques in the literature.

**Keywords**— Unknown time-delay systems, Markovian jump linear systems, Robust regularized least-squares approach, State-feedback.

**Resumo**— Este artigo propõe uma solução recursiva para o problema de regulação de sistemas lineares de tempo discreto com atraso variante e desconhecido no estado. A abordagem proposta utiliza a representação do sistema com atraso por um sistema aumentado com saltos Markovianos não observados. O regulador robusto recursivo é projetado a partir de um modelo dinâmico que engloba todos os possíveis modos de operação do sistema Markoviano. A lei de controle é obtida pela aplicação da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos, que combina o método de funções penalidade e a solução ótima do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas. Um exemplo numérico ilustra o desempenho da estratégia proposta quando comparada a abordagens existentes na literatura.

**Palavras-chave**— Sistemas lineares com atraso variante desconhecido, Sistemas lineares com saltos Markovianos, Mínimos quadrados regularizados robustos, Realimentação de estado.

## 1 Introdução

Sistemas lineares com atrasos nos estados (SLAEs) constituem uma classe de sistemas cuja dinâmica futura depende não apenas de seu estado atual, mas também dos estados passados. O atraso pode advir da própria natureza do processo, ser consequência da ação de controle ou ser introduzido intencionalmente no modelo, e sua presença pode impactar consideravelmente a estabilidade e o desempenho do sistema.

Assim, a análise e a síntese de sistemas com atrasos têm despertado uma atenção considerável, especialmente por serem empregados em diversas aplicações, como sistemas de controle em rede (Qiu et al., 2015), gerenciamento de estoque (Ignaciuk, 2014) e modelos de doenças infecciosas (Wang e Liu, 2015).

As principais abordagens para o projeto de controladores para sistemas com atrasos são baseadas em desigualdades lineares matriciais (LMIs, do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), como os resultados apresentados por Miranda e Leite (2008), Liu et al. (2010) e Keqi e Zhi (2015).

No entanto, abordagens recursivas em termos de equações de Riccati também foram propostas. Por exemplo, Fridman (2014, Chap. 6) propôs um regulador linear quadrático para sistemas com atraso constante, pela aplicação do método de elevação (em inglês, *lifting method*), o qual consiste em um processo de aumento do vetor de estados que resulta na transformação do sistema com atraso em um sistema aumentado livre de atrasos.

Seguindo essa linha, Bortolin et al. (2018) desen-

volveram um regulador linear quadrático robusto para sistemas lineares incertos com atraso constante. Nesse caso, a lei de controle é obtida pela aplicação de uma técnica de mínimos quadrados regularizados robustos que permite obter uma solução em termos de equações de Riccati.

Neste artigo, propõe-se uma extensão dos resultados de Fridman (2014) e de Bortolin et al. (2018), a partir do desenvolvimento de um regulador robusto recursivo para o controle de sistemas lineares com atraso variante e desconhecido no estado. A estratégia proposta é inspirada na abordagem de Chan e Ozguner (1995), a qual consiste em representar o sistema com atrasos como um sistema aumentado com saltos Markovianos não observados.

Dessa forma, a análise e a síntese de sistemas com atraso variante são equivalentes aos resultados obtidos para os sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSMs) (Costa et al., 2005). Esta abordagem vem sendo muito utilizada, principalmente na área de sistemas de controle em rede (Mao et al., 2007; Qiu et al., 2015).

Portanto, o regulador robusto recursivo proposto é deduzido a partir de um SLSM, sob a hipótese de que o controlador não possui acesso ao estado da cadeia de Markov. Para este cenário, a lei de controle é obtida por métodos de aproximação baseados em condições de otimalidade, como o método variacional (do Val e Başar, 1999), devido às propriedades de não-convexidade do problema de otimização.

Considerando essas características, adotamos uma nova metodologia para a obtenção da lei de con-

trole, a qual difere das existentes na literatura por fornecer uma solução cuja recursividade é estabelecida por meio de equações de Riccati apresentadas em um arranjo matricial.

A metodologia empregada consiste na reformulação do SLSM como um sistema determinístico denominado *sistema aumentado singular* (Bortolin, 2017), o qual engloba todos os possíveis estados da cadeia de Markov. Em seguida, o controlador é projetado para este novo sistema pela aplicação da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos, de maneira semelhante àquela proposta por Cerri (2009) e Bortolin et al. (2018).

As seções deste artigo estão organizadas da seguinte maneira: na Seção 2, o SLAE é transformado em um SLSM e o problema de controle para o SLSM é apresentado. Na Seção 3, o SLSM com cadeia de Markov não observada é reformulado como um sistema aumentado singular e o problema de regulação para este novo sistema é definido. Na Seção 4, a técnica de mínimos quadrados regularizados robustos é apresentada. Na Seção 5, o regulador robusto recursivo para SLSM via sistema aumentado singular é deduzido. Na Seção 6, um exemplo numérico ilustra a estratégia proposta, comparando-a com abordagens baseadas em LMIs. Na Seção 7, as conclusões deste estudo são apresentadas.

**Notações:**  $\mathbb{R}^n$  representa o conjunto de vetores  $n$ -dimensionais, e  $\mathbb{R}^{m,n}$  o conjunto de matrizes reais de dimensões  $m \times n$ . Para uma matriz real  $P$ ,  $P \succ 0$  ( $P \succeq 0$ ) significa que  $P$  é uma matriz simétrica (semi)definida positiva. O símbolo sobrescrito  $T$  denota o transposto.  $I_n$  é a matriz identidade de dimensão  $n \times n$ . A matriz nula de dimensão apropriada é denotada por  $O$ .  $\mathbb{E}\{x\}$  é o valor esperado de  $x$ . A notação  $\|x\|$  é adotada para a norma euclidiana de  $x$  e  $\|x\|_P$  é a norma ponderada de  $x$ , definida por  $(x^T P x)^{\frac{1}{2}}$ . A matriz  $\text{diag}(A_1, \dots, A_s)$  representa um bloco matricial diagonal constituído por  $\{A_1, \dots, A_s\}$ . Adota-se, por simplicidade, a notação  $Y^T X Y = Y^T X(\bullet)$ .

## 2 Formulação do Problema

Considere o SLAE descrito por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + A_{d,k} x_{k-d_k} + B_k u_k, \quad \forall k \geq 0 \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{\max}, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $A_k, A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B_k \in \mathbb{R}^{n,m}$  são matrizes conhecidas,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  é o estado atrasado em  $d_k$  amostras e  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle. O atraso  $d_k$  é variante no tempo tal que

$$0 \leq d_{\min} \leq d_k \leq d_{\max}, \quad (2)$$

com  $d_{\min}$  e  $d_{\max}$  representando os valores mínimo e máximo de  $d_k$ , respectivamente. Assume-se  $\varphi_0(k)$  como condição inicial do sistema para  $k = -d_{\max}, -d_{\max} + 1, \dots, 0$ . Observe que, no caso de atraso invariante no tempo, tem-se  $d_{\min} = d_{\max}$ .

Neste artigo, considera-se que o atraso  $d_k$  é desconhecido e comporta-se como uma cadeia de Markov de tempo discreto, visto que, em muitas aplicações reais, o atraso no instante atual possui relação com o atraso no instante anterior (Nilsson, 1998).

Associado ao SLAE (1), considere o custo de  $N$  estágios  $J_N(x, u)$  definido por

$$J_N(x, u) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k) + x_N^T P_N x_N, \quad (3)$$

onde  $P_N \succeq 0$ ,  $Q_k \succ 0$  e  $R_k \succ 0$  são matrizes de ponderação de dimensões apropriadas.

Uma técnica empregada no estudo de sistemas com atrasos consiste no aumento do vetor de estados pela aplicação do método de elevação (Xia et al., 2007; Hetel et al., 2008), o qual reescreve o SLAE como um sistema aumentado livre de atrasos, mantendo-se a dinâmica do sistema original. Com base neste método, o projeto do controlador para o SLAE (1) pode ser reduzido ao problema de regulação de um SLSM (Costa et al., 2005).

Com este propósito, considere a cadeia de Markov  $\theta(k)$  que assume valores no conjunto  $\mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ , sendo  $s = d_{\max} - d_{\min} + 1$ . As probabilidades de transição, que governam as variações do atraso  $d_k$ , são representadas em uma matriz denominada *matriz de probabilidades de transição* e denotada por  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s,s}$ , para todo  $i, j \in \mathcal{S}$ , cujas entradas satisfazem às seguintes condições:

$$\begin{aligned} Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i] &= p_{ij}, \quad Pr[\theta(0) = i] = \pi_{i,0}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Assim, o SLAE (1) pode ser reescrito como o seguinte SLSM:

$$z_{k+1} = F_{\theta(k),k} z_k + G_{\theta(k),k} v_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (5)$$

com  $F_{\theta(k),k} \in \mathbb{R}^{n_d, n_d}$  e  $G_{\theta(k),k} \in \mathbb{R}^{n_d, m}$ , sendo  $n_d = (d_{\max} + 1)n$ ,

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{\max}+1} \\ x_{k-d_{\max}} \end{bmatrix}, \quad z_0 := \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d_{\max}+1) \\ \varphi_0(-d_{\max}) \end{bmatrix}, \quad v_k := u_k,$$

e, para todo  $\theta(k) = i \in \mathcal{S}$ ,

$$F_{i,k} := \begin{bmatrix} A_k & \overbrace{O \cdots O}^{i+d_{\min}-2 \text{ zeros}} & A_{d,k} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{d_{\max}n} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_{i,k} := \begin{bmatrix} B_k \\ O \\ O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}.$$

De forma semelhante, o custo quadrático (3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N(\theta, z, v) &= \sum_{k=0}^{N-1} (z_k^T Q_{\theta(k),k} z_k + v_k^T R_{\theta(k),k} v_k) + \\ &\quad z_N^T P_{\theta(N),N} z_N, \end{aligned} \quad (6)$$

com  $P_{\theta(N),N} := \text{diag}(P_N, O, \dots, O)$ ,  $R_{\theta(k),k} := R_k$

$$\text{e } Q_{\theta(k),k} := \text{diag}(Q_k, O, \dots, O).$$

Deste modo, o sistema com atraso variante e desconhecido (1) é equivalente ao SLSM (5) com cadeia de Markov não observada. Portanto, o problema de projetar um regulador recursivo para o SLAE (1) é equivalente ao problema de controle para o SLSM (5), definido por

$$\begin{aligned} & \min_{v \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{J}_N(\theta, z, v) \right\} \\ \text{s.a. } & z_{k+1} = F_{\theta(k),k} z_k + G_{\theta(k),k} v_k, \end{aligned} \quad (7)$$

com uma lei de controle por realimentação de estado independente do modo de operação dada por

$$v_k = \mathcal{K}_k z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (8)$$

onde a matriz  $K_k \in \mathbb{R}^{m,n_d}$  é o ganho a ser determinado.

Na próxima seção, o SLSM será reescrito como um sistema determinístico que engloba todos os possíveis estados da cadeia de Markov, o que permitirá a dedução de um regulador recursivo para o mesmo.

### 3 Sistema Aumentado Singular

Nesta seção, o SLSM (5) será reformulado como um sistema independente da cadeia de Markov, por meio da aplicação da função indicadora  $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ , para um conjunto  $\mathcal{C}$ , definida por

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (9)$$

Note que  $\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 1$  se  $\theta(k) = i$  e  $\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 0$  em caso contrário, para todo  $i \in \mathcal{S}$ .

O SLSM (5) pode ser reescrito em termos da função indicadora da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} z_{k+1} &= \sum_{i=1}^s \left( F_{i,k} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right) z_k + \\ & \sum_{i=1}^s \left( G_{i,k} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right) v_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Pré- e pós- multiplicando (10) pelas probabilidades de transição  $p_{ij}$ , segue que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right) z_{k+1} &= \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} F_{i,k} \right) z_k + \\ & \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} G_{i,k} \right) v_k, \quad \forall j \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (11)$$

Observe que a função indicadora  $\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}$  pode ser considerada como um parâmetro incerto, visto que não há informações disponíveis sobre o estado da cadeia de Markov  $\theta(k)$ . Assim, a partir da forma matricial do sistema de equações dado por (11), define-se um sistema dinâmico sujeito a incertezas paramétricas denominado *sistema aumentado singular* (SAS) (Bortolin, 2017), o qual é representado por

$$\delta E_k z_{k+1} = \delta M_k z_k + \delta N_k v_k, \quad (12)$$

com as matrizes de incertezas modeladas da seguinte forma:

$$[\delta E_k \quad \delta M_k \quad \delta N_k] = \mathcal{H} \Delta_{\mathcal{T},k} [\mathcal{E}_{E_k} \quad \mathcal{E}_{M_k} \quad \mathcal{E}_{N_k}], \quad (13)$$

sendo

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & \dots & O & I_{n_d} & \dots & O & \dots & I_{n_d} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & I_{n_d} & O & \dots & I_{n_d} & \dots & O & \dots & I_{n_d} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{E}_{E_k}^T = [p_{11} I_{n_d} \dots p_{1s} I_{n_d} \dots p_{s1} I_{n_d} \dots p_{ss} I_{n_d}],$$

$$\mathcal{E}_{M_k}^T = [p_{11} F_{1,k}^T \dots p_{1s} F_{1,k}^T \dots p_{s1} F_{s,k}^T \dots p_{ss} F_{s,k}^T],$$

$$\mathcal{E}_{N_k}^T = [p_{11} G_{1,k}^T \dots p_{1s} G_{1,k}^T \dots p_{s1} G_{s,k}^T \dots p_{ss} G_{s,k}^T],$$

$$\Delta_{\mathcal{T},k} = \text{diag}(\Delta_{\mathcal{T},11}, \dots, \Delta_{\mathcal{T},1s}, \dots, \Delta_{\mathcal{T},s1}, \dots, \Delta_{\mathcal{T},ss}),$$

com  $\Delta_{\mathcal{T},ij} = \text{diag}(\mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}} I_{n_d})$ .

Similarmente, o custo quadrático (6) também pode ser reescrito em termos da função indicadora, resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(z, v) &= z_N^T \mathcal{P}_N z_N + \\ & \sum_{k=0}^{N-1} \left[ z_k^T (\delta Q_{\Omega,k}^T \Omega_k \delta Q_{\Omega,k}) z_k + v_k^T (\delta R_{\mathcal{R},k}^T \mathcal{R}_k \delta R_{\mathcal{R},k}) v_k \right], \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\Omega_k = \text{diag}(Q_{1,k}, \dots, Q_{s,k})$ ,  $\mathcal{R}_k = \text{diag}(R_{1,k}, \dots, R_{s,k})$  e  $\mathcal{P}_N \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ . Os parâmetros incertos  $\delta R_{\mathcal{R},k}$  e  $\delta Q_{\Omega,k}$  são modelados por

$$\delta R_{\mathcal{R},k} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \Delta_{\mathcal{R},k} \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad \delta Q_{\Omega,k} = \mathcal{H}_{\Omega} \Delta_{\Omega,k} \mathcal{E}_{\Omega}, \quad (15)$$

com

$$\mathcal{H}_{\mathcal{R}} = I_{sm}, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{R}} = I_m, \quad \mathcal{H}_{\Omega} = I_{sn_d}, \quad \mathcal{E}_{\Omega} = I_{n_d},$$

$$\Delta_{\mathcal{R},k} = [\mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_m \dots \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_m]^T,$$

$$\text{e } \Delta_{\Omega,k} = [\mathbb{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_{n_d} \dots \mathbb{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_{n_d}]^T.$$

Portanto, o problema (7) pode ser reescrito como o seguinte problema de otimização equivalente:

$$\begin{aligned} & \min_{z_{k+1}, v_k} \max_{\delta_{\mathcal{T}}} \mathcal{V}(z, v) \\ \text{s.a. } & \delta E_k z_{k+1} = \delta M_k z_k + \delta N_k v_k, \end{aligned} \quad (16)$$

com  $\delta_{\mathcal{T}} = \{\delta Q_{\Omega,k}, \delta R_{\mathcal{R},k}, \delta E_k, \delta M_k, \delta N_k\}$ . A seguir, uma estratégia para a obtenção da sequência ótima  $(z_{k+1}^*, v_k^*)$  será apresentada.

### 4 Mínimos Quadrados Regularizados Robustos

Esta seção apresenta uma abordagem para a solução de problemas de otimização sujeitos a incertezas nos dados. A solução proposta combina o método de funções penalidade (Bazaraa et al., 2006) ao problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Sayed e Nascimento, 1999).

Considere o seguinte problema de otimização restrita:

$$\begin{aligned} & \min_z \max_{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y} F(z) \\ \text{s.a. } & (N + \delta N)z = y + \delta y, \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $F(z) = \|z\|_U^2 + \|(M + \delta M)z - (w + \delta w)\|_V^2$ , com  $M \in \mathbb{R}^{r,s}$  e  $N \in \mathbb{R}^{l,s}$  matrizes conhecidas,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $y \in \mathbb{R}^l$  vetores de medidas,  $z \in \mathbb{R}^s$  um vetor desconhecido,  $U \succ 0$  e  $V \succ 0$  matrizes de ponderação e as incertezas  $\{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y\}$  modeladas por

$$\begin{aligned} [\delta M \ \delta w] &= L_1 \Delta_1 [E_M \ E_w], \\ [\delta N \ \delta y] &= L_2 \Delta_2 [E_N \ E_y], \end{aligned} \quad (18)$$

sendo  $\{L_1, L_2\}$  matrizes não-nulas,  $\{\Delta_1, \Delta_2\}$  matrizes de contração arbitrárias e  $\{E_M, E_w, E_N, E_y\}$  matrizes conhecidas.

O problema de otimização restrito (17) pode ser aproximado por uma sequência de problemas irrestritos, de acordo com o método de funções penalidade. Através desse método, o conjunto de restrições é inserido na função objetivo, por meio de um *parâmetro de penalidade*  $\mu > 0$ , de forma a penalizar qualquer violação das restrições. Assim, para cada  $\mu > 0$ , tem-se o seguinte problema de otimização irrestrito:

$$\begin{aligned} \min_{x_\mu} \max_{\delta A, \delta b} J(x_\mu) &= \|x_\mu\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x_\mu - (b + \delta b)\|_{W_\mu}^2, \\ \text{com } [\delta A \ \delta b] &= H \Delta [E_A \ E_b], \end{aligned} \quad (19)$$

sendo

$$\begin{aligned} x_\mu &= z, \quad Q = U, \quad A = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad \delta A = \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta N \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}, \\ \delta b &= \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad W_\mu = \begin{bmatrix} V & O \\ O & \mu I_l \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} L_1 & O \\ O & L_2 \end{bmatrix}, \\ \Delta &= \begin{bmatrix} \Delta_1 & O \\ O & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad E_A = \begin{bmatrix} E_M \\ E_N \end{bmatrix} \text{ e } E_b = \begin{bmatrix} E_w \\ E_y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O procedimento para resolver (17) consiste em obter iterativamente as soluções ótimas  $x_\mu^*$  para (19), tais que a sequência  $\{\mu_k\}$  tenda ao infinito. Assim, a sequência de soluções  $\{x_\mu^*\}$  converge para a solução ótima de (17).

A solução ótima  $x_\mu^*$  do problema de otimização (19) foi apresentada por Sayed e Nascimento (1999) e reescrita em termos de uma arranjo matricial por Cerri e Terra (2017). Neste artigo, considera-se o caso geral do funcional apresentado por Cerri e Terra (2017), assumindo-se que todos os termos relacionados à variável  $z$  estão sujeitos a incertezas.

O Lema 1 apresenta a solução ótima para os problemas (17) e (19).

**Lema 1** (Bortolin, 2017) *Considere os problemas de otimização (17) e (19). Suponha que a matriz  $\begin{bmatrix} I_s \\ A \\ E_A \end{bmatrix}$  é posto coluna pleno. Então,*

(i) *para cada  $\mu > 0$ , a solução ótima  $\hat{x}_\mu$  e o valor mínimo  $J(\hat{x}_\mu)$  referentes ao problema irrestrito (19) são dados por*

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_\mu \\ J(\hat{x}_\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & b \\ O & E_b \\ I_s & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & O & O & I_s \\ O & \widehat{W}_\mu^{-1}(\hat{\lambda}_\mu) & O & A \\ O & O & \widehat{\lambda}_\mu^{-1} I & E_A \\ I_s & A^T & E_A^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ b \\ E_b \\ O \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\mu^{-1}(\hat{\lambda}_\mu) &= \text{diag} \left( V^{-1} - \widehat{\lambda}_\mu^{-1} L_1 L_1^T, \mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_\mu^{-1} L_2 L_2^T \right) \\ \text{e } \widehat{\lambda}_\mu &= (1 + \alpha) \|\text{diag}(L_1^T V L_1, \mu L_2^T L_2)\| \\ &\text{para algum } \alpha > 0; \end{aligned}$$

(ii) *quando a matriz  $\begin{bmatrix} N \\ E_M \\ E_N \end{bmatrix}$  tem posto linha pleno, a solução ótima  $z^* = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \hat{x}_\mu^*$  e o valor mínimo  $F(z^*) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} J(\hat{x}_\mu^*)$  referentes ao problema restrito (17) são dados por*

$$\begin{bmatrix} z^* \\ F(z^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & w \\ O & y \\ O & E_w \\ O & E_y \\ I_s & O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U^{-1} & O & O & O & O & I_s \\ O & V^{-1} & O & O & O & M \\ O & O & O & O & O & N \\ O & O & O & O & O & E_M \\ O & O & O & O & O & E_N \\ I_s & M^T & N^T & E_M^T & E_N^T & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ w \\ y \\ E_w \\ E_y \\ O \end{bmatrix}.$$

## 5 Regulador Robusto Recursivo

A solução para o problema (16) pode ser obtida com base na técnica de programação dinâmica (Bertsekas, 1995) e na aplicação do método de funções penalidade. Dessa forma, esse problema pode ser expresso pelos seguintes problemas de otimização irrestrita:

$$\begin{aligned} \min_{z_1, v_0} \max_{\delta_{\mathcal{T},0}} &\left\{ \mathfrak{J}_{\mu,0}(z_1, v_0) + \min_{z_2, v_1} \max_{\delta_{\mathcal{T},1}} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,1}(z_2, v_1) + \right. \right. \\ &\dots + \min_{z_t, v_{t-1}} \max_{\delta_{\mathcal{T},t-1}} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,t-1}(z_t, v_{t-1}) + \dots + \right. \\ &\left. \left. \min_{z_{N+1}, v_N} \max_{\delta_{\mathcal{T},N}} \left\{ \mathfrak{J}_{\mu,N}(z_{N+1}, v_N) \right\} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

sendo  $\delta_{\mathcal{T},k} = \{\delta_{\mathcal{Q},k}, \delta_{\mathcal{R},k}, \delta E_k, \delta \mathcal{M}_k, \delta \mathcal{N}_k\}$ . O custo por estágio  $\mathfrak{J}_{\mu,k}$  é obtido pela aplicação do método de funções penalidade ao problema (16) para cada passo  $k \geq 0$ , resultando em

$$\mathfrak{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k) = z_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} z_{k+1} + \quad (22)$$

$$\left( \begin{bmatrix} O & \delta_{\mathcal{R},k} \\ O & O \\ \delta E_k & -\delta \mathcal{N}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O \\ -\delta_{\mathcal{Q},k} \\ \delta \mathcal{M}_k \end{bmatrix} z_k \right)^T M_{\mu,k} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix},$$

com  $M_{\mu,k} = \text{diag}(\mathcal{R}_k, \mathcal{Q}_k, \mu I_{n_d})$  e  $\mu > 0$  fixo. Assim, a solução para (21) pode ser obtida iterativamente pela otimização do funcional (22) a cada passo  $k$ , ou seja, resolvendo-se o seguinte problema:

$$\min_{z_{k+1}, v_k} \max_{\delta_{\mathcal{T},k}} \mathfrak{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k). \quad (23)$$

A cada passo  $k$ , a solução de (23) pode ser obtida através da abordagem de mínimos quadrados regularizados robustos (Seção 4), a partir das seguintes identificações entre (19) e (22):

$$Q \leftarrow \mathcal{P}_{k+1}, \quad W_\mu \leftarrow M_{\mu,k}, \quad x_\mu \leftarrow \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix},$$

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \\ O & O \end{bmatrix}, \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} O & \delta_{\mathcal{R},k} \\ O & O \\ \delta E_k & -\delta \mathcal{N}_k \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \end{bmatrix} z_k,$$

$$\delta b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -\delta_{\mathcal{Q},k} \\ \delta \mathcal{M}_k \end{bmatrix} z_k, E_A \leftarrow \begin{bmatrix} O & \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \\ O & O \\ \mathcal{E}_{E_k} & -\mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \end{bmatrix}, E_b \leftarrow \begin{bmatrix} O \\ -\mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k} \end{bmatrix},$$

$$H \leftarrow \text{diag}(\mathcal{H}_{\mathcal{R}}, \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}, \mathcal{H}) \text{ e } \Delta \leftarrow \text{diag}(\Delta_{\mathcal{R},k}, \Delta_{\mathcal{Q},k}, \Delta_{\mathcal{T},k}).$$

O Lema 2 apresenta a solução ótima para (23), por meio da aplicação do Lema 1.

**Lema 2** Considere o problema de otimização (23), com  $\hat{\lambda} > 0$  fixado. A solução ótima  $(z_{\lambda,k+1}^*, v_{\lambda,k}^*)$  para cada  $k \geq 0$  é dada por

$$\begin{bmatrix} z_{\lambda,k+1}^* \\ v_{\lambda,k}^* \\ \mathfrak{J}_{\lambda,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & O & O \\ O & I_m & O \\ O & O & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathcal{K}_{\lambda,k} \\ \mathcal{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} z_k,$$

onde a malha fechada  $\mathcal{L}_{\lambda,k}$ , o ganho de realimentação  $\mathcal{K}_{\lambda,k}$  e a solução da equação de Riccati  $\mathcal{P}_{\lambda,k}$  são obtidos a partir de (20).

O Algoritmo 1 apresenta o procedimento para a obtenção da solução  $\{x_{k+1}^*, u_k^*\}_{k=0}^{N-1}$  para o SLAE (1) via SLSM e SAS.

**Algoritmo 1:** Regulador Robusto Recursivo para SLAE via SLSM e SAS

**SLSM:** Determine os parâmetros do SLSM:  $F_{\theta(k),k}$ ,  $G_{\theta(k),k}$  e  $z_0$ .

**SAS:** Defina os parâmetros do SAS:  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{E}_{E_k}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$  e  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ .

**Regulador Robusto Recursivo:**

*Passo 1:* Defina  $\hat{\lambda}$ ,  $N$  e  $\mathcal{P}_N \succeq 0$ .

*Passo 2:* Calcule para cada  $k = N-1, \dots, 0$ :

$$\mathcal{L}_{\lambda,k}, \mathcal{K}_{\lambda,k} \text{ e } \mathcal{P}_{\lambda,k} \text{ via (20).}$$

**SLAE:** Obtenha para cada  $k = 0, \dots, N-1$ :

$$x_{k+1} = A_k x_k + A_{d,k} x_{k-d_k} + B_k v_k$$

$$\text{com } v_k = \mathcal{K}_{\lambda,k} z_k.$$

## 6 Exemplo Numérico

Considere o SLAE (1) com as seguintes matrizes de parâmetros:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,8 & 1,0 \end{bmatrix}, A_{d,k} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,5 \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \forall k \geq 0,$$

e a condição inicial  $\phi_0(k) = [1 \ -1]^T$ , para todo  $k \leq 0$ .

Com relação ao custo de  $N$  estágios (3), adotam-se as seguintes matrizes:

$$P_N = Q_k = I_2 \text{ e } R_k = 1, \forall k \geq 0.$$

Para avaliar o desempenho do regulador robusto recursivo, será apresentada uma comparação entre o Algoritmo 1 e duas abordagens baseadas em LMIs, propostas por Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2).

Todas as rotinas foram implementadas no software *MATLAB*<sup>®</sup>, versão 9.0.0.341360 (R2016a), em um computador com processador *Intel*<sup>®</sup> *Core*<sup>TM</sup> i7-3770 com frequência de 3,40 GHz, memória RAM de 8,0 GB e sistema operacional *Windows*<sup>®</sup> 10 Home.

As LMIs foram implementadas na plataforma Yalmip (Löfberg, 2004), com o solver SeDuMi (Sturm, 1999). Consideramos os seguintes valores para os parâmetros da abordagem de Sun et al. (2009, Thm. 2):

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 1,3, \lambda_i = 1,2, i \in [2,7],$$

$$\delta_0 = 0,2, \delta_1 = 0,3, \delta_j = 0,1, j \in [2,7] \text{ e } \mu = 1,2.$$

Para o Algoritmo 1, assume-se

$$\hat{\lambda} = 1,5, \mathcal{P}_N = \text{diag}(I_2, O, \dots, O) \text{ e}$$

$$p_{ij} = \frac{1}{s}, \forall i, j \in \mathcal{S}, \text{ sendo } s = d_{\max} - d_{\min} + 1.$$

O comportamento dinâmico do SLAE foi avaliado por uma simulação de Monte Carlo com um total de 1000 possíveis realizações da cadeia de Markov. Em cada realização, considerou-se o horizonte 1000 e o atraso  $d_k$  foi selecionado de acordo com a matriz de probabilidades de transição conforme o algoritmo de Häggström (2002, Chap. 3). As trajetórias resultantes serão comparadas pela média das normas euclidianas, definida por

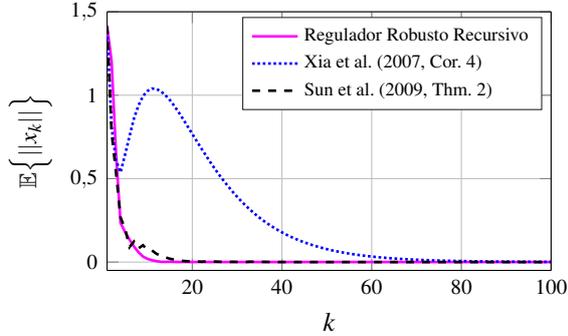
$$\mathbb{E}\{\|x_k\|\} \approx \frac{1}{1000} \sum_{\ell=1}^{1000} \|x_k^{(\ell)}\|, \forall k \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathcal{K}_{\lambda,k} \\ \mathcal{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O & I_{n_d} & O \\ O & O & O & O & I_m \\ O & O & \hat{\mathcal{M}}_k^T & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & I_{n_d} & O & I_{n_d} & O \\ I_{n_d} & -\mathcal{P}_{\lambda,k+1} & O & O & O \\ O & O & \Sigma & \hat{E}_k & -\hat{\mathcal{N}}_k \\ I_{n_d} & O & \hat{E}_k^T & O & O \\ O & O & -\hat{\mathcal{N}}_k^T & O & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ O \\ \hat{\mathcal{M}}_k \\ O \\ O \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{com } \hat{E}_k \leftarrow [O \ O \ \mathcal{E}_{E_k}^T]^T, \hat{\mathcal{M}}_k \leftarrow [O \ -\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}^T \ \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}^T]^T, \hat{\mathcal{N}}_k \leftarrow [\mathcal{E}_{\mathcal{R}}^T \ O \ \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T]^T, \Sigma \leftarrow \hat{\lambda}^{-1} \text{diag}(I_m, I_{n_d}, I_{s^2 n_d}) \text{ e } \hat{\lambda} > 0.$$

em que  $\|x_k^{(\ell)}\|$  é a norma do estado regulado obtida na realização  $\ell$ . O desempenho de cada método será avaliado de acordo com o valor máximo do atraso  $d_{max} \in [1, 7]$ , sendo o valor mínimo  $d_{min} = 0$  fixo.

A Figura 1 apresenta o comportamento da média das normas euclidianas dos estados do SLAE obtida por cada método, assumindo-se  $d_{max} = 1$ . Observe que todas as médias convergem para zero, sendo que o regulador robusto recursivo apresenta um desempenho mais suave em relação às abordagens via LMIs.

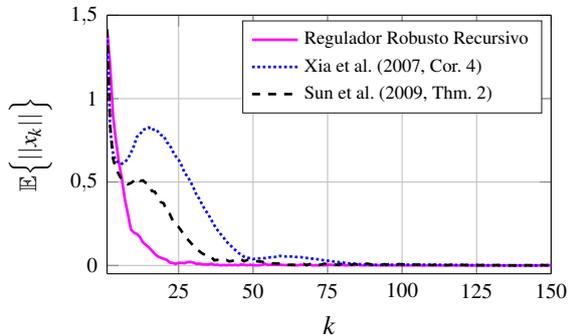


**Figura 1:** Comparação das médias dos estados regulados para  $d_{max} = 1$ .

Os ganhos de realimentação  $\mathcal{K}_{R,1000}^*$ ,  $K_X^*$  e  $K_S^*$  obtidos, para  $d_{max} = 1$ , pelo regulador robusto recursivo e pelas abordagens de Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2), respectivamente, são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{R,1000}^* &= [-0,3754 \quad -0,2659 \quad -0,1233 \quad -0,0380], \\ K_X^* &= [-0,3394 \quad -0,1753] \text{ e} \\ K_S^* &= [-0,4553 \quad -0,2409]. \end{aligned}$$

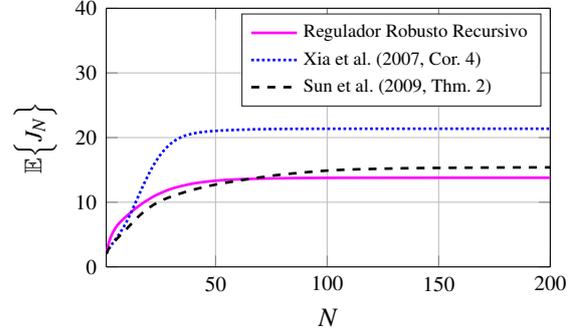
A média das normas euclidianas dos estados regulados obtida por cada método para  $d_{max} = 7$  é ilustrada na Figura 2. Note que o aumento no valor de  $d_{max}$  refletiu no desempenho de todos os métodos, porém todos ainda convergem para zero, e o regulador robusto recursivo continua a apresentar um desempenho mais suave que as abordagens via LMIs.



**Figura 2:** Comparação das médias dos estados regulados para  $d_{max} = 7$ .

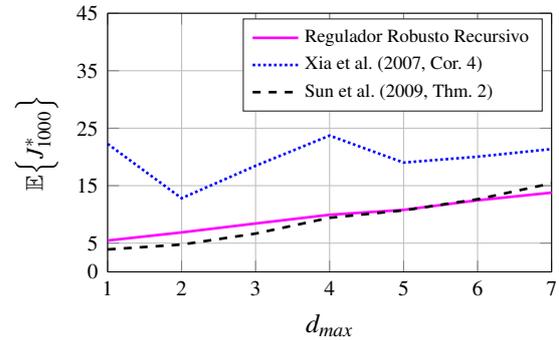
O comportamento da média do custo de  $N$  estágios  $J_N$  (3) obtida por cada método para  $d_{max} = 7$  é

apresentado na Figura 3. Observe que, para cada método, o custo  $J_N$  converge conforme o valor de  $N$  aumenta. As abordagens de Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2) obtiveram os custos ótimos  $J_{X,1000}^* \approx 21,37$  e  $J_{S,1000}^* \approx 15,40$ , respectivamente, enquanto o valor obtido pelo regulador robusto recursivo foi  $J_{R,1000}^* \approx 13,78$ .



**Figura 3:** Comparação das médias dos custos de  $N$  estágios  $J_N$  para  $d_{max} = 7$ .

Na Figura 4 são ilustradas as médias dos custos totais ótimos  $J_{1000}^*$  obtidos por cada método, conforme o valor de  $d_{max}$ . Note que a abordagem de Xia et al. (2007, Cor. 4) obtém os maiores valores, ao passo que o regulador robusto recursivo e o método de Sun et al. (2009, Thm. 2) obtêm valores próximos.

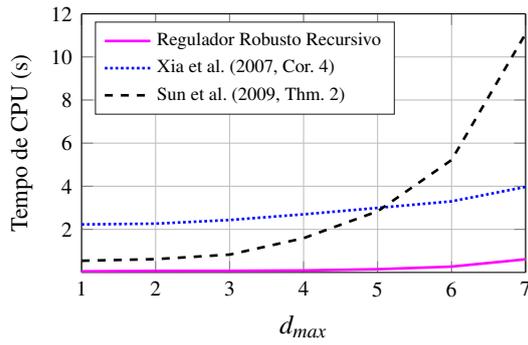


**Figura 4:** Comparação das médias dos custos totais ótimos  $J_{1000}^*$  em função de  $d_{max}$ .

Na Figura 5 são apresentadas as médias, relativas a 100 experimentos, dos tempos de CPU despendidos por cada método para determinar o valor do ganho de realimentação. Considera-se o tempo necessário para a resolução das LMIs de cada abordagem e o tempo para o regulador robusto recursivo determinar o ganho ótimo  $\mathcal{K}_{\lambda, N_c}^*$ , sendo  $N_c$  o horizonte que satisfaz a condição  $\|\mathcal{P}_{\lambda, N_c+1} - \mathcal{P}_{\lambda, N_c}\| < 0,001$ .

Como a dimensão do sistema aumentado cresce com o aumento de  $d_{max}$ , o tempo de CPU despendido também cresce. No entanto, o regulador robusto recursivo se destaca em relação às abordagens via LMIs, por despendere o menor tempo para todos os valores atribuídos a  $d_{max}$ . Em particular, para  $d_{max} = 7$ , as abordagens de Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2) apresentaram os tempos de CPU

$T_X \approx 3,97s$  e  $T_S \approx 11,08s$ , respectivamente, enquanto o tempo do regulador robusto recursivo foi  $T_R \approx 0,61s$ .



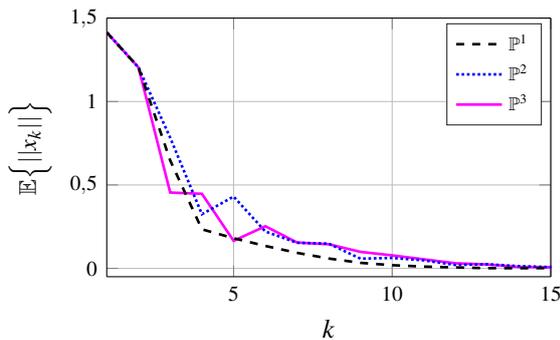
**Figura 5:** Comparação das médias dos tempos de CPU em função de  $d_{max}$ .

Para ilustrar a influência das probabilidades de transição no desempenho do regulador robusto recursivo, realizamos a simulação de Monte Carlo considerando três matrizes de probabilidades de transição, dadas por:

$$\mathbb{P}^1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,95 \\ 0,80 & 0,20 \end{bmatrix}.$$

A Figura 6 ilustra as médias das normas euclidianas dos estados regulados obtidas pelo regulador robusto recursivo para cada matriz de probabilidades de transição, com  $d_{max} = 1$ . Note que a dinâmica do sistema depende dos valores atribuídos às probabilidades de transição.



**Figura 6:** Médias dos estados regulados obtidas pelo Regulador Robusto Recursivo para  $d_{max} = 1$ .

## 7 Conclusões

Neste artigo, uma solução recursiva para o problema de regulação de sistemas lineares de tempo discreto com atraso variante e desconhecido no estado foi proposta. O regulador robusto recursivo projetado é baseado em equações de Riccati dadas por um arranjo matricial.

Para avaliar o desempenho do regulador proposto, foi apresentada uma comparação com duas abordagens existentes na literatura, as quais são dadas em termos de LMIs. Os resultados mostraram que o regulador robusto recursivo é capaz de obter respostas com convergência mais suave e custos ótimos menores ou equivalentes aos das outras abordagens.

Além disso, os resultados sugerem que o regulador robusto recursivo é conveniente para os casos em que o valor máximo do atraso  $d_{max}$  é relativamente grande, visto que o tempo de CPU despendido é o menor entre os três métodos analisados. Na sequência deste trabalho, os resultados serão estendidos a sistemas com atrasos sujeitos a incertezas paramétricas.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) sob o protocolo 88887.162816/2018-00 vinculado aos Institutos Nacionais de Ciência e Tecnologia (INCT) sob o protocolo 465755/2014-3.

## Referências

- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. e Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: theory and algorithms*, 3 edn, Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey.
- Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Vol. I, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts.
- Bortolin, D. C. (2017). *Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Matrizes de Transição Incertas*, Tese (Doutorado), Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S.P.
- Bortolin, D. C., Odorico, E. K. e Terra, M. H. (2018). Robust linear quadratic regulator for uncertain linear discrete-time systems with delay in the states: an augmented system approach, *IEEE European Control Conference (ECC)*, Limassol, Cyprus, pp. 1578–1583.
- Cerri, J. P. (2009). *Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estados*, Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, S.P.
- Cerri, J. P. e Terra, M. H. (2017). Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(11): 6004 – 6011.
- Chan, H. e Ozguner, U. (1995). Optimal control of systems over a communication network with queues via a jump system approach, *Conference*

- on *Control Applications (CCA)*, Albany, NY, USA, pp. 1148–1153.
- Costa, O. L. V., Fragoso, D. M. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*, Springer-Verlag, New York.
- do Val, J. B. R. e Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economic Dynamics and Control* **23**(8): 1099–1131.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: analysis and control*, Systems & Control: Foundations & Applications, 1 edn, Birkhäuser Basel.
- Hägglström, O. (2002). *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Hotel, L., Daafouz, J. e Iung, C. (2008). Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functional approach for discrete delay systems and the stability conditions for switched systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **2**(3): 697–705.
- Ignaciuk, P. (2014). Discrete inventory control in systems with perishable goods - a time-delay system perspective, *IET Control Theory & Applications* **8**: 11–21.
- Keqi, W. e Zhi, Y. (2015). Guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with state and input delays, *IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC)*, pp. 216–220.
- Liu, Z., Lü, S., Zhong, S. e Ye, M. (2010). Stabilization analysis for discrete-time systems with time delay, *Appl. Math. Comput.* **216**(7): 2024–2035.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- Mao, Z., Jiang, B. e Shi, P. (2007).  $H_\infty$  fault detection filter design for networked control systems modelled by discrete Markovian jump systems, *IET Control Theory Applications* **1**(5): 1336–1343.
- Miranda, M. F. e Leite, V. J. S. (2008). Convex analysis and synthesis for uncertain discrete-time systems with time-varying state delay, *IEEE American Control Conference (ACC)*, Seattle, WA, USA, pp. 4910–4915.
- Nilsson, J. (1998). *Real-Time Control Systems with Delays*, PhD thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden.
- Qiu, L., Li, S., Xu, B. e Xu, G. (2015).  $H_\infty$  control of networked control systems based on Markov jump unified model, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **25**(15): 2770–2786.
- Sayed, A. H. e Nascimento, V. H. (1999). Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties, in A. Garulli, A. Tesi e A. Vicino (eds), *Robustness in Identification and Control*, Vol. 245, Springer-Verlag, London, pp. 159 – 173.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.
- Sun, J., Chen, J., Liu, G. P. e Rees, D. (2009). Stability and stabilization for discrete systems with time-varying delays based on the average dwell-time method, *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, San Antonio, TX, USA, pp. 4786–4790.
- Wang, J. e Liu, S. (2015). The stability analysis of a general viral infection model with distributed delays and multi-staged infected progression, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **20**(1): 263 – 272.
- Xia, Y., Liu, G. P., Shi, P., Rees, D. e Thomas, E. J. C. (2007). New stability and stabilization conditions for systems with time-delay, *International Journal of Systems Science* **38**(1): 17–24.