ALGORITMO SUPER-TWISTING MULTIVARIÁVEL SEM SIMETRIA DA MATRIZ DE ENTRADA INCERTA

Timon Asch Keijock*, Eduardo Vieira Leão Nunes†, Liu Hsu‡

*Programa de Eng. Elétrica, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

Emails: timonak91@gmail.com, eduardo@coep.ufrj.br , liu@coep.ufrj.br

Abstract— In this paper, we propose a new generalization for the design of the multivariable Super-Twisting algorithm. This method circumvents the rather restrictive hypotheses of symmetry or the total knowledge of the input matrix of the system previously reported in the literature. By means of a Lyapunov approach we show that the proposed controller is able to assure global properties of stability and convergence in finite time. Simulation results illustrate the effectiveness of the proposed technique considering a practical application.

Keywords— Super-Twisting algorithm, higher-order sliding modes, multivariable control, uncertain systems.

Resumo— Neste artigo, é proposta uma nova generalização para o projeto do algoritmo Super-Twisting multivariável. Este método contorna as hipóteses bastante restritivas de simetria ou do total conhecimento da matriz de entrada do sistema consideradas previamente na literatura. Por meio de uma abordagem de Lyapunov mostra-se que o controlador proposto é capaz de assegurar propriedades globais de estabilidade e convergência em tempo finito. Resultados de simulação ilustram a efetividade da técnica proposta considerando uma aplicação prática.

Palavras-chave— Algoritmo Super-Twisting, modos deslizantes de ordem superior, controle multivariável, sistemas incertos..

1 Introdução

O controle por modos deslizantes (Sliding Mode Control - SMC), é uma técnica de controle não-linear robusto muito eficiente para lidar com sistemas incertos(Utkin, 1992; Edwards and Spurgeon, 1998). Entretanto, a natureza descontínua da lei de controle resulta em um indesejável efeito de *chattering*, que consiste em oscilações de alta frequência das variáveis do sistema. Essas oscilações podem reduzir a acurácia do controlador, provocar desgaste das partes mecânicas móveis, dentre outras dificuldades práticas.(Utkin, 1992).

O conceito do controle por modos deslizantes de ordem superior(Levant, 1993) foi desenvolvido com base nessa motivação de eliminar o problema do *chattering*. Esse novo conceito difere de outras estratégias propostas anteriormente na literatura por ser capaz de preservar as principais vantagens de robustez e de acurácia do controle por modos deslizantes convencional.

O algoritmo Super-Twisting (*Super-Twisting Algorithm - STA*)(Levant, 1993) vem despertando um grande interesse por ser o único controlador baseado em modos deslizantes de ordem superior que não necessita de nenhuma informação sobre a derivada da variável de deslizamento para ser implementado (Levant, 2003). Além disso, essa algoritmo é capaz de assegurar convergência em tempo finito por meio de um sinal de controle contínuo, sendo assim menos propenso ao *chattering*.

Inicialmente a análise de estabilidade e convergência do STA baseou-se em métodos geométricos (Levant, 1993), ou na teoria de sistemas homogêneos(Levant, 2005). Recentemente, Moreno e Osório introduziram uma nova abordagem baseada em uma função de Lyapunov (Moreno and Osorio, 2008; Moreno and Osorio, 2012) que deu um novo impulso, possibilitando novos desenvolvimentos e a ampliação da abrangência da aplicabilidade do algoritmo (Moreno and Osorio, 2008; Shtessel et al., 2010; Gonzalez et al., 2012; Shtessel et al., 2012). No entanto, os trabalhos ficaram restritos a sistemas monovariáveis.

Considerando uma abordagem desacoplada, os algoritmos desenvolvidos para o caso monovariável podem ser aplicados para o caso multivariável, decompondo o sistema em malhas escalares apropriadas. No entanto, essa abordagem pode não ser bem sucedida se o sistema for muito acoplado. Para resolver esse problema, foi proposta em (Nagesh and Edwards, 2014) uma extensão multivariável para o STA baseada em controle vetorial unitário. No entanto, o resultado obtido necessita do conhecimento exato da matriz de entrada do sistema.

Tentando contornar essa restrição, um novo projeto para o STA multivariável foi proposto em (Vidal et al., 2016) considerando matrizes de entrada K_p simétricas e positivas definidas incertas. Nesse contexto, mostrou-se que apenas o conhecimento de limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz K_p é necessário para implementar a lei de controle.

Nesse artigo, o resultado obtido em (Vidal et al., 2016) é generalizado, relaxando-se a hipótese de que a matriz de entrada K_p do sistema seja simétrica e positiva definida. Para obter um resultado mais geral, assume-se o conhecimento de uma matriz simetrizante S_p. Mas, tendo em vista a fragilidade da condição de simetria, especialmente num cenário incerto, considera-se o conhecimento de uma matriz simetrizante para um valor nominal da matriz K_p. Dessa forma, admite-se que a matriz K_pS_p seja predominantemente simétrica e positiva definida com uma pequena parte antissimétrica. Usando uma abordagem de Lyapunov, mostra-se que o projeto do STA multivariável pode ser feito utilizando apenas o conhecimento dos limitantes inferior e superior dos autovalores da parte simétrica da matriz K_pS_p e do limitante superior da norma da parte antissimétrica de K_pS_p. A viabilidade da estratégia proposta é ilustrada considerando o problema de estabilização do movimento de um satélite.

2 Definição do Problema

Considere o sistema MIMO incerto descrito por:

$$\dot{\sigma} = K_p[u + \gamma(\sigma, t)] + f(t), \tag{1}$$

sendo que $\sigma \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do sistema, $K_p \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é a matriz de entrada considerada incerta, $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ representa incertezas e pertubações, e $f \in \mathbb{R}^m$ é uma incerteza absolutamente continua e variante no tempo. As seguintes hipóteses são consideradas:

(A1) Existe uma matriz S_p conhecida tal que

$$K_pS_p = K_{ps} + \mu K_{pa} = \overline{K}_p\,,$$

onde $K_{ps} = K_{ps}^T > 0$, K_{pa} é antissimétrica, e $\mu > 0$ é um parâmetro com valor baixo.

(A2) A matriz de entrada $\overline{K}_p$ é incerta, porém são conhecidos os limitantes superior (λ_M) e inferior (λ_m), do maior e menor autovalor de K_{ps}, e um limitante superior $\overline{\mu}$ da norma de μK_{pa}.

(A3) As perturbações e incertezas satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1\|\sigma\| \quad , \quad \|\phi(t)\| \leq \delta_2,$$

onde $\phi(t) = K_p^{-1}\frac{df(t)}{dt}$ e $\delta_1, \delta_2 \geq 0$.

Note que a matriz S_p não é única, e esta apenas deve satisfazer a hipótese A1. Posteriormente é apresentado um exemplo onde a matriz S_p é, por conveniência, considerada como inversa de uma matriz de entrada. De modo geral, outros métodos poderiam ser utilizados para encontrar uma matriz S_p. Além disso, de acordo com a Hipótese (A3), a função $f(t)$ possui derivada uniformemente limitada e $\gamma(t, 0) = 0$.

O objetivo é determinar uma lei de controle $u(t)$ para que o estado $\sigma(t)$ convirja para zero em um tempo finito.

3 MIMO STA

Com o intuito de atingir esse objetivo, considera-se a extensão multivariável para o STA, proposta em (Nagesh and Edwards, 2014), dada por:

$$\begin{aligned} u &= -k_1\frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2\sigma + \xi, \\ \dot{\xi} &= -k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4\sigma. \end{aligned} \tag{2}$$

A principal vantagem dessa extensão, em relação ao super twisting convencional, é a maior robustez e aplicabilidade em diferentes classes de sistemas incertos, por lidar com incertezas não desacopláveis e pertubações dependentes dos estados. Em (Nagesh and Edwards, 2014), a matriz de entrada é cancelada por meio da utilização da sua inversa de modo que a dinâmica do sistema em malha fechada fica completamente independente da matriz K_p.

Considerando o algoritmo apresentado em (2), a dinâmica do sistema em malha fechada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \overline{K}_p\left[-k_1\frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2\sigma + z\right] + \overline{K}_p\gamma(\sigma, t), \\ \dot{z} &= \left[-k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4\sigma\right] + \phi(\sigma, t), \end{aligned} \tag{3}$$

sendo a variável auxiliar $z = \xi + \overline{K}_p^{-1}f(t)$ e a função $\phi = \frac{d}{dt}\left[\overline{K}_p^{-1}f(t)\right]$. Note que, como a matriz de entrada é incerta, e portanto não exatamente conhecida, o controlador não é capaz de cancelá-la. Além disso, o sistema (3) possui equações diferenciais com lado direito descontínuo. Como as teorias convencionais de existência e unicidade de soluções não podem ser aplicadas para esse caso, a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontiuo é assumida (Filippov, 1964).

O resultado principal é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 1 *Considere a planta (1) com a lei de controle dada por (2) e suponha que as hipóteses (A1)-(A3) sejam satisfeitas. Se os ganhos k1, k2, k3, e k4 forem escolhidos de acordo com (4) e (5), então o sistema em malha fechada descrito por (3) é globalmente estável e a superfície de deslizamento* $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ *é alcançada em tempo finito para quaisquer condições iniciais* $[\sigma_0^T, z_0^T]$

$$k_1 > \sqrt{\tfrac{6\delta_2}{\lambda_m}}, \qquad k_2 > \frac{9\lambda_M\delta_1}{5\lambda_m},$$

$$k_3 > max\left\{\tfrac{\lambda_M\delta_2}{\lambda_m}\ ,\ 12\tfrac{k_1^2\lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 24\tfrac{\lambda_M^3\delta_2}{\lambda_m^3} + 12\tfrac{\lambda_M^2\delta_2^2}{k_1^2\lambda_m^3}\right\},$$

$$k_4 > max\left\{\tfrac{3k_2\lambda_M\delta_1(\lambda_M+\overline{\mu})}{2\lambda_m}\ ,\ 32k_2^2\tfrac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}\right\},$$

$$\overline{\mu} < \min\left\{ \frac{5k_2\lambda_m^3}{3[15k_2\lambda_m\lambda_M+3\lambda_m^2\delta_1+9\lambda_M^2\delta_1+8\lambda_M^2(7k_2+3\delta_1)]}, \right.$$

$$\frac{\lambda_m^3}{9\lambda_M(\lambda_m+4\lambda_M)}, \sqrt{\frac{k_1^2\lambda_m^3}{12k_3+18k_1^2\lambda_M}}, \sqrt{\frac{2\lambda_m^3}{27\lambda_M}},$$

$$\frac{k_1^2k_3\lambda_m^3}{3\lambda_M[3k_1^2k_3\lambda_m+9k_1^2\lambda_M\delta_2+8k_1^2k_3\lambda_M+8k_3\delta_2]},$$

$$\left.\sqrt{\frac{5k_2^2\lambda_m^3}{3\lambda_M[9k_2\delta_1+0.5(7k_2+3\delta_1)^2]}}\right\}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &> \sqrt{\frac{\delta_2}{\lambda_m}}, \\
k_2 &> \max\left\{\frac{2\delta_1(\lambda_M+\overline{\mu})}{\lambda_m}, \frac{3\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}, \frac{6}{4}\frac{\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}, \sqrt{\frac{27}{8}\frac{\lambda_M^3\delta_1^2}{\lambda_m^3}}\right\}, \\
k_3 &> \frac{k_2\lambda_M\delta_2}{\left(\frac{1}{3}k_2\lambda_m-2\lambda_M\delta_1\right)}, \\
k_4 &> \frac{2k_2^2\lambda_M^4\delta_1+(\frac{1}{2})k_2\lambda_M^4\delta_1+2k_2^3\lambda_M^4}{\lambda_m^2[\frac{1}{3}k_2\lambda_m-2\lambda_M\delta_1]}, \\
\overline{\mu} &< \min\left\{\frac{\lambda_m^2}{\lambda_M}, \sqrt{\frac{k_2\lambda_m^3}{6\lambda_M[\delta_1+k_2+\lambda_M\delta_1]}}, \right. \\
&\frac{k_2\lambda_m^3}{[3k_2\lambda_m\lambda_M+6\lambda_m^2\delta_1+12\lambda_M^2\delta_1+12k_2\lambda_M^2]}, \\
&\frac{k_2^2\lambda_m^3}{[3k_2^2\lambda_m\lambda_M+3k_2\lambda_m^2\delta_1+15k_2\lambda_M^2\delta_1+12k_2^2\lambda_M^2+3\lambda_M^2\delta_1^2]}, \\
&\frac{k_1^2k_2\lambda_m^3}{[3k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M+\frac{3}{4}k_1^2\lambda_M^2\delta_1+\frac{3}{4}k_1^2\lambda_m^2\delta_1+\frac{3}{2}k_2\lambda_M\delta_2]}, \\
&\left.\sqrt{\frac{k_2^2k_4\lambda_m^3}{[12k_2k_4\lambda_M\delta_1+\frac{3}{2}k_2^2\lambda_M^2\delta_1^2+12k_2^2k_4\lambda_M+6k_4^2]}}\right\},
\end{aligned} \tag{5}$$

Prova: Considere a função candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V(\sigma,z) = &\left(2k_3+\frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right)\|\sigma\| + \left(k_4+\frac{k_2^2}{2}\lambda_M\right)\sigma^T\sigma \\
&+ z^T(K_{ps})z + k_1k_2\lambda_M\frac{\sigma^T\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2\sigma^T(K_{ps})z \\
&- k_1\frac{z^T(K_{ps})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Note que no caso em que K_p é a matriz identidade e $\lambda_m = \lambda_M = 1$, a função candidata (6) é equivalente à proposta em (Nagesh and Edwards, 2014). Além disso, se a matriz K_p for simétrica, $S_p = I$ e $K_{ps} = K_p$. Nesse caso, a função candidata (6) seria equivalente à proposta em (Vidal et al., 2016). Dessa forma, pode-se dizer que a função proposta nesse trabalho é de fato uma generalização das funções propostas anteriormente na literatura.

Pela equação(6) observa-se que $V(\sigma, z)$ é positiva definida e radialmente não limitada pois:

$$V \geq 2k_3\|\sigma\| + k_4\sigma^T\sigma + \frac{1}{2}z^TK_{ps}z + \frac{1}{2}\zeta^TK_{ps}\zeta,$$

onde: $\zeta = \begin{bmatrix} k_1\frac{\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} & k_2\sigma^T & -z^T \end{bmatrix}^T$. Além disso, a função é continua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2m} | \sigma = 0\}$.

Derivando (6) ao longo das soluções do sistema, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V} = &\left(2k_3+\frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right)\frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|} + (2k_4+k_2^2\lambda_M)\sigma^T\dot{\sigma} \\
&+ 2z^TK_{ps}\dot{z} + \frac{3}{2}\frac{k_1k_2\lambda_M\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&- k_2(z^TK_{ps}\dot{\sigma}+\sigma^TK_{ps}\dot{z}) \\
&- k_1\frac{\left[\dot{z}^TK_{ps}\sigma+z^TK_{ps}\dot{\sigma}\right]}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2}\frac{(z^TK_{ps}\sigma)(\sigma^T\dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Pela dinâmica de malha fechada, (3), os termos $\dot{\sigma}$ e $\dot{z}$ podem ser expandidos, resultando em:

$$\begin{aligned}
\dot{V} = &\left(2k_3\frac{\sigma^T}{\|\sigma\|}+\frac{k_1^2}{2}\lambda_M\frac{\sigma^T}{\|\sigma\|}\right)\Big[-k_1\frac{\overline{K}_p\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}-k_2\overline{K}_p\sigma \\
&+\overline{K}_pz+\overline{K}_p\gamma\Big]+(2k_4\sigma^T+k_2^2\lambda_M\sigma^T) \\
&\Big[-k_1\frac{\overline{K}_p\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}-k_2\overline{K}_p\sigma+\overline{K}_pz+\overline{K}_p\gamma\Big]+2z^TK_{ps} \\
&\Big[-k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|}-k_4\sigma+\phi\Big]+\frac{3}{2}\frac{k_1k_2\lambda_M\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&\Big[-k_1\frac{\overline{K}_p\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}-k_2\overline{K}_p\sigma+\overline{K}_pz+\overline{K}_p\gamma\Big] \\
&-k_2z^TK_{ps}\Big[-k_1\frac{\overline{K}_p\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}-k_2\overline{K}_p\sigma+\overline{K}_pz+\overline{K}_p\gamma\Big] \\
&-k_2\sigma^TK_{ps}\Big[-k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|}-k_4\sigma+\phi\Big] \\
&\frac{-k_1\Big[-k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|}-k_4\sigma+\phi\Big]^TK_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&\frac{-k_1z^TK_{ps}\Big[-k_1\frac{\overline{K}_p\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}-k_2\overline{K}_p\sigma+\overline{K}_pz+\overline{K}_p\gamma\Big]}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&+\frac{k_1}{2}\frac{(z^TK_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}\Big[-k_1\frac{\sigma^T\overline{K}_p\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}-k_2\sigma^T\overline{K}_p\sigma \\
&+\sigma^T\overline{K}_pz+\sigma^T\overline{K}_p\gamma\Big].
\end{aligned} \tag{8}$$

Simplificando os termos semelhantes em (8), e notando que $\overline{K}_p = K_{ps} + \mu K_{pa}$ obtêm-se

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -k_1\Big(k_3+\tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\Big)\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2\Big(k_3+\tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\Big)\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|} \\
& + \tfrac{2k_3\sigma^T\mu K_{pa}z}{\|\sigma\|} + \tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})z}{\|\sigma\|} - \tfrac{k_1k_2^2\lambda_M\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \tfrac{k_1k_4\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^3\lambda_M\sigma^T K_{ps}\sigma - k_2k_4\sigma^T K_{ps}\sigma \\
& + k_2^2\lambda_M\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})z + 2k_4\sigma^T(\mu K_{pa})z \\
& - \tfrac{3k_1^2k_2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|} - \tfrac{3k_1k_2^2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \tfrac{3k_1k_2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{k_1k_2z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + k_2^2z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})\sigma - k_2z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})z \\
& + \tfrac{k_1^2z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|} + \tfrac{k_1k_2z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \tfrac{k_1z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{k_1^2}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)(\sigma^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^3} \\
& - \tfrac{k_1k_2}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)(\sigma^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \tfrac{k_1}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)[\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})z]}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \Big(2k_3+\tfrac{k_1^2}{2}\lambda_M\Big)\tfrac{\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})\gamma}{\|\sigma\|} + 2z^T K_{ps}\phi(t) \\
& + (2k_4+k_2^2\lambda_M)\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})\gamma - k_2\sigma^T K_{ps}\phi(t) \\
& + \tfrac{3k_1k_2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1\sigma^T K_{ps}\phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \tfrac{k_1z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2z^T K_{ps}(K_{ps}+\mu K_{pa})\gamma \\
& + \frac{k_1}{2}\frac{(z^T K_{ps}\sigma)[\sigma^T(K_{ps}+\mu K_{pa})\gamma]}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Note que é possível separar os termos dependentes de K_{ps}, e não dependentes de μK_{pa}, dos termos dependentes de μK_{pa}, i.e.,

$$\dot{V} = \dot{V}_s + \dot{V}_a,$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s = & -k_1\Big(k_3+\tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\Big)\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2\Big(k_3+\tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\Big)\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|} \\
& + \tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}z}{\|\sigma\|} - \tfrac{k_1k_2^2\lambda_M\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{k_1k_4\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - k_2^3\lambda_M\sigma^T K_{ps}\sigma - k_2k_4\sigma^T K_{ps}\sigma + k_2^2\lambda_M\sigma^T K_{ps}z \\
& - \tfrac{3k_1^2k_2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|} - \tfrac{3k_1k_2^2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \tfrac{3k_1k_2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{k_1k_2z^T K_{ps}^2\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2z^T K_{ps}^2\sigma \\
& - k_2z^T K_{ps}^2z + \tfrac{k_1^2z^T K_{ps}^2\sigma}{\|\sigma\|} + \tfrac{k_1k_2z^T K_{ps}^2\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \tfrac{k_1z^T K_{ps}^2z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{k_1^2}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)(\sigma^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^3} \\
& - \tfrac{k_1k_2}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)(\sigma^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \tfrac{k_1}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)(\sigma^T K_{ps}z)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \Big(2k_3+\tfrac{k_1^2}{2}\lambda_M\Big)\tfrac{\sigma^T K_{ps}\gamma}{\|\sigma\|} + 2z^T K_{ps}\phi(t) \\
& + (2k_4+k_2^2\lambda_M)\sigma^T K_{ps}\gamma - k_2\sigma^T K_{ps}\phi(t) \\
& + \tfrac{3k_1k_2\lambda_M}{2}\tfrac{\sigma^T K_{ps}\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1\sigma^T K_{ps}\phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \tfrac{k_1z^T K_{ps}^2\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2z^T K_{ps}^2\gamma + \tfrac{k_1}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)(\sigma^T K_{ps}\gamma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a = & \left(2k_3+\frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right)\left(\frac{\sigma^T\mu K_{pa}z}{\|\sigma\|}+\frac{\sigma^T\mu K_{pa}\gamma}{\|\sigma\|}\right) \\
& + (2k_4+k_2^2\lambda_M)\left(\sigma^T\mu K_{pa}z+\sigma^T\mu K_{pa}\gamma\right) \\
& + \left(\frac{3k_1k_2\lambda_M}{2}\right)\left(\frac{\sigma^T\mu K_{pa}z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sigma^T\mu K_{pa}\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\right) \\
& + k_1k_2\frac{z^T(K_{ps}\mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2z^T(K_{ps}\mu K_{pa})\sigma \\
& - k_2z^T(K_{ps}\mu K_{pa})z - k_2z^T(K_{ps}\mu K_{pa})\gamma \\
& + \frac{k_1^2z^T(K_{ps}\mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1k_2z^T(K_{ps}\mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1z^T(K_{ps}\mu K_{pa})z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1z^T(K_{ps}\mu K_{pa})\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{k_1}{2}\tfrac{(z^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}\left(\sigma^T\mu K_{pa}z+\sigma^T\mu K_{pa}\gamma\right).
\end{aligned}$$

Considerando os limitantes superiores para as perturbações, $\|\gamma(t,\sigma)\| \leq \delta_1\|\sigma\|$ e $\|\phi(t)\| \leq \delta_2$, propostos na hipótese (A3), a função $\dot{V}_a$ pode ser majorada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_a \leq & \left(2k_3+\frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right)\left[\frac{\overline{\mu}\|\sigma\|\|z\|}{\|\sigma\|}+\frac{\overline{\mu}\delta_1\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|}\right] \\
& + (2k_4+k_2^2\lambda_M)\Big[\overline{\mu}\|\sigma\|\|z\|+\overline{\mu}\delta_1\|\sigma\|^2\Big] \\
& + \left(\frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\right)\left[\frac{\overline{\mu}\|\sigma\|\|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}+\frac{\overline{\mu}\delta_1\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\right] \\
& + k_1k_2\lambda_M\overline{\mu}\frac{\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2\lambda_M\overline{\mu}\|z\|\|\sigma\| \\
& + k_2\lambda_M\overline{\mu}\|z\|^2 + k_2\lambda_M\overline{\mu}\delta_1\|z\|\|\sigma\| \\
& + \frac{k_1^2\lambda_M\overline{\mu}\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|} + \frac{k_1k_2\lambda_M\overline{\mu}\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{k_1\lambda_M\overline{\mu}\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\overline{\mu}\delta_1\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{k_1\lambda_M\overline{\mu}\|z\|^2\|\sigma\|^2}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\overline{\mu}\delta_1\|z\|\|\sigma\|^3}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

O majorante para a função $\dot{V}_s$ pode ser obtido seguindo os mesmos passos apresentados em (Vidal et al., 2016). Para que o artigo fique autocontido esse desenvolvimento é apresentado a seguir. Considerando a Proposição 1 (ver o Apêndice) e os limitantes superiores da Hipótese (A3) para as perturbações $\|\gamma(t,\sigma)\| \leq \delta_1\|\sigma\|$ e

$\|\phi(t)\| \leq \delta_2$, pode ser verificado que

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_s \leq & -k_1\lambda_m\Big(k_3+\tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\Big)\frac{\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2\lambda_m\Big(k_3+\tfrac{k_1^2\lambda_M}{2}\Big)\|\sigma\| \\
& + \tfrac{k_1^2\lambda_M^2}{2}\frac{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}\|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1k_2^2\lambda_m\lambda_M\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1k_4\lambda_m\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - k_2^3\lambda_m\lambda_M\|\sigma\|^2 - k_2k_4\lambda_m\|\sigma\|^2 + k_2^2\lambda_M^2\|\sigma\|\|z\| \\
& - \tfrac{3k_1^2k_2\lambda_M\lambda_m\|\sigma\|}{2} - \tfrac{3k_1k_2^2\lambda_M}{2}\frac{\lambda_m\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \tfrac{3k_1k_2\lambda_M^2}{2}\frac{\|\sigma\|\|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1k_2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\| \\
& - k_2\lambda_m^2\|z\|^2 + \frac{k_1^2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1k_2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1\lambda_m^2\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{k_1^2}{2}\frac{\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \tfrac{k_1k_2}{2}\frac{\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{k_1}{2}\frac{\lambda_m^2\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \Big(2k_3 + \tfrac{k_1^2}{2}\lambda_M\Big)\lambda_M\delta_1\|\sigma\| + 2\lambda_M\delta_2\|z\| \\
& + (2k_4 + k_2^2\lambda_M)\|\sigma\|^2\lambda_M\delta_1 + k_2\lambda_M\delta_2\|\sigma\| \\
& . + \tfrac{3k_1k_2\lambda_M^2}{2}\frac{\delta_1\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\delta_2\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{k_1\lambda_M^2\delta_1\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2\lambda_M^2\delta_1\|z\|\|\sigma\| \\
& + \frac{k_1}{2}\frac{\lambda_M^2\delta_1\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Definindo o vetor $\chi = \begin{bmatrix}\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} & \|\sigma\| & \|z\|\end{bmatrix}^T$, a forma matricial de $\dot{V}$ pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\chi^T(\Omega - \Omega_a)\chi - \chi^T(\Psi - \Psi_a)\chi, \\
\dot{V} &\leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\chi^T\overline{\Omega}\chi - \chi^T\overline{\Psi}\chi,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

onde Ω e Ψ contem os elementos de $\dot{V}_s$, e Ω_a e Ψ_a contem os elementos de $\dot{V}_a$. Além disso, $\overline{\Omega} = \Omega - \Omega_a$ e $\overline{\Psi} = \Psi - \Psi_a$ tem a forma

$$
\overline{\Omega}=\begin{bmatrix}\overline{\Omega}_{11} & 0 & \overline{\Omega}_{13}\\ 0 & \overline{\Omega}_{22} & \overline{\Omega}_{23}\\ \overline{\Omega}_{13} & \overline{\Omega}_{23} & \overline{\Omega}_{33}\end{bmatrix}
\overline{\Psi}=\begin{bmatrix}\overline{\Psi}_{11} & 0 & \overline{\Psi}_{13}\\ 0 & \overline{\Psi}_{22} & \overline{\Psi}_{23}\\ \overline{\Psi}_{13} & \overline{\Psi}_{23} & \overline{\Psi}_{33}\end{bmatrix}
$$

e são compostos por

$$
\begin{aligned}
\overline{\Omega}_{11} &= \lambda_m\Big(k_1k_3 + \tfrac{k_1^3}{2}\lambda_M\Big) - k_1\lambda_M\delta_2, \\
\overline{\Omega}_{13} &= -k_1^2\lambda_M^2 - \lambda_M\delta_2 - \overline{\mu}\left(k_3 + \frac{3k_1^2}{4}\lambda_M\right), \\
\overline{\Omega}_{22} &= \lambda_m\big(k_1k_4 + \tfrac{5}{2}k_1k_2^2\lambda_M\big) - \tfrac{3}{2}k_1k_2\lambda_M^2\delta_1(\lambda_M + \overline{\mu}), \\
\overline{\Omega}_{23} &= -2k_1k_2\lambda_M^2 - \overline{\mu}\left(\frac{7k_1k_2 + 3k_1\delta_1}{4}\right)\lambda_M, \\
\overline{\Omega}_{33} &= \frac{k_1}{2}(\lambda_m^2 - 3\overline{\mu}\lambda_M),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Psi}_{11} = &\ \lambda_m\left(k_2k_3 + 2k_1^2k_2\lambda_M\right) - k_2\lambda_M\delta_2 \\
& - 2k_3\delta_1(\lambda_M + \overline{\mu}) - \tfrac{k_1^2}{2}\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \overline{\mu}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Psi}_{13} = &-\frac{3}{4}k_1\lambda_M^2\delta_1, \\
\Psi_{22} = &\ \lambda_m\big(k_2k_4 + k_2^3\lambda_M\big) - k_2^2\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \overline{\mu}) \\
& - 2k_4\delta_1(\lambda_M + \overline{\mu}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_{23} &= -k_2^2\lambda_M(\lambda_M + \overline{\mu}) - \tfrac{k_2}{2}\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \overline{\mu}) - k_4\overline{\mu}, \\
\Psi_{33} &= k_2(\lambda_m^2 - \overline{\mu}\lambda_M),
\end{aligned}
$$

Para assegurar que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}^T > 0$ e $\overline{\Psi} = \overline{\Psi}^T > 0$, pode-se adotar o critério de Sylvester. Dessa forma, as condições referentes aos ganhos e ao parâmetro $\overline{\mu}$ são obtidas de modo a garantir que todos os menores principais líderes de ambas as matrizes sejam positivos. O objetivo é obter relações mais diretas do que as encontradas em (Nagesh and Edwards, 2014).

Além disso, uma possível forma de lidar com os novos termos provenientes da parte antissimétrica, que são prejudiciais, seria considerar que o parâmetro $\overline{\mu}$ fosse suficientemente pequeno, de modo que esses termos pudessem ser dominados pelos termos de sinal positivo favoráveis. Porém, essa abordagem poderia acarretar em um valor de $\overline{\mu}$ excessivamente pequeno, o que na prática restringiria a aplicabilidade da técnica. Por esse motivo, a solução adotada foi, sempre que possível, utilizar os próprios ganhos do algoritmo para dominar os termos da parte antissimétrica.

Dessa forma, as relações obtidas aqui para os ganhos podem ser mais conservadoras que as obtidas em (Vidal et al., 2016). Todavia, esse problema pode ser contornado por meio do uso da matriz S_p introduzida nesse trabalho.

Assim, verifica-se que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}^T > 0$ e $\overline{\Psi} = \overline{\Psi}^T > 0$ são satisfeitas se as desigualdades (4) e (5) forem obedecidas. Nesse caso, a desigualdade (10) pode ser reescrita como

$$
\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(\overline{\Omega})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\|\chi\|^2 - \lambda_{\min}(\overline{\Psi})\|\chi\|^2, \tag{11}
$$

onde $\lambda_{\min}(\overline{\Omega}), \lambda_{\min}(\overline{\Psi}) > 0$ são os menores autovalores das matrizes simétricas e positivas definidas $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Psi}$. A função de Lyapunov apresentada em (6) pode ser reescrita em um novo formato ao agruparmos seus termos em matrizes auxiliares. Assim, $V(\sigma, z) = \bar{\chi}^T P\bar{\chi}$, onde $\bar{\chi} = \begin{bmatrix}\frac{\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} & \sigma^T & z^T\end{bmatrix}^T$ e $P = P^T > 0$, tem-se

$$
\lambda_{\min}(P)\|\bar{\chi}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P)\|\bar{\chi}\|^2,
$$

onde $\|\bar{\chi}\| = \|\chi\|$ e $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P) > 0$ são respectivamente o menor e maior autovalores da matriz P. Considerando a desigualdade (11) e a seguinte relação

$$\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\chi\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}},$$

segue que

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 V^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 V, \tag{12}$$

$\forall(\sigma(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{2m}\backslash\mathcal{S}$, onde

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}\lambda_{\min}(\Omega)}{\lambda_{\max}(P)}, \qquad \alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}(\Psi)}{\lambda_{\max}(P)}.$$

Observando a relação (12), juntamente com o fato de que as trajetórias do sistema em malha-fechada não podem permanecer em $\mathcal{S}\backslash\{0\}$, conclui-se que $V(\sigma, z)$ é uma função continuamente decrescente. Assim, considerando a generalização do Teorema de Lyapunov para inclusões diferenciais feita em (Deimling, 1992, Proposition 14.1) , o ponto de equilíbrio da origem $(\sigma, z) = 0$ e a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ são alcançados em tempo finito partindo de qualquer condição inicial. Adicionalmente, pela equação de comparação

$$\dot{v} = -\alpha_1 v^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 v, \qquad v(t_0) \geq 0,$$

verifica-se que (σ, z) converge para zero após um intervalo de tempo

$$T_f = \frac{2}{\alpha_2} \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0), z(t_0)) + 1\right).$$

□

3.1 Resultados de Simulação

Visando não só validar a técnica apresentada neste artigo, mas também avaliar seu desempenho em relação ao esquema apresentado em (Vidal et al., 2016), considerou-se o mesmo problema apresentado em (Nagesh and Edwards, 2014; Sidi, 1997). Tal problema consiste em estabilizar o movimento de um satélite controlado por propulsores, com dinâmica descrita pelas equações de corpo rígido não-lineares

$$\dot{w} = J^{-1}(T + \bar{\gamma} - w \times Jw),$$

sendo que $T \in \mathbb{R}^3$ é o torque fornecido pelos propulsores, $J \in \mathbb{R}^{3\times3}$ é uma matriz de inércia simétrica e positiva definida, $w \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular inercial do satélite, $\bar{\gamma} = \|w\|Jw$ é uma perturbação não-linear dependente do estado, e o símbolo $\times$ denota o produto vetorial.

Utilizando o STA multivariável, pretende-se projetar um controle de torque T de modo que a superfície de deslizamento $w = \dot{w} = 0$ seja alcançada em tempo finito para estabilizar o movimento do satélite. Definindo-se a lei de controle por

$$T = -k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi, \qquad \dot{\xi} = -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w \tag{13}$$

a dinâmica em malha-fechada pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -k_1 J^{-1} \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 J^{-1} w + J^{-1} z + J^{-1}\gamma(t, w), \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w, \end{aligned} \tag{14}$$

onde $\gamma(t, w) = \bar{\gamma} - w \times Jw$ e $z = \xi$. Como a pertubação considerada depende quadraticamente da norma de w, a hipótese (A3) não é válida globalmente. Porém, a seguinte relação local é satisfeita para o caso em que $\|w\| \leq 1$

$$\|\gamma(t, w)\| \leq \frac{2}{\lambda_m}\|w\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_m}\|w\|, \quad (\|w\| \leq 1), \tag{15}$$

em que λ_m é o autovalor mínimo de J^{-1}. Dessa forma, para $\|w\| \leq 1$ a hipótese (A3) é válida localmente com $\delta_1 = \frac{2}{\lambda_m}$ e $\delta_2 = 0$. A partir desse fato, da função (6), e de que $V(w, z)$ é uma função continuamente decrescente do tempo, tem-se que $2k_3\|w(t)\| \leq V(w, z) \leq V(w_0, z_0)$, $\forall t$. Assim, a validade local da hipótese (A3), para essa pertubação, é estendida $\forall t$ se as condições iniciais w_0 e z_0 satisfizerem $V(w_0, z_0) \leq 2k_3$.

Para a simulação, é considerada uma matriz de inércia referente a um pequeno satélite (Goeree and Fasse, 2000), descrita por

$$J = J_n + \kappa D, \tag{16}$$

onde

$$J_n = \begin{bmatrix} 2.7388 & -0.0031 & -0.0269 \\ -0.0031 & 2.7924 & 0.0136 \\ -0.0269 & 0.0136 & 2.1741 \end{bmatrix},$$

é a matriz de inércia nominal, e

$$D = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

O termo κD representa a incerteza, com $\kappa \in [-3, 3]$.

Para implementar a estratégia de controle a matriz S_p é escolhida como sendo a inversa do valor nominal da matriz de entrada. Desse modo, $S_p = J_n$ e a matriz resultante $\overline{J}$ é dada por

$$\begin{aligned} \overline{J} &= J^{-1} J_n, \\ \overline{J} &= I + (\kappa D)^{-1} J_n, \end{aligned}$$

sendo I a identidade $\in \mathbb{R}^{3\times3}$. A escolha proposta para a matriz S_p representa uma prática comum da literatura que busca cancelar a matriz de entrada do sistema. Essa abordagem permite reduzir o valor de λ_M e também melhorar o condicionamento da parte simétrica, reduzindo a relação de λ_M/λ_m. Essas reduções são importantes pois possibilitam a escolha de ganhos menores, diminuindo o esforço de controle necessário.

Note que, embora as matrizes J_n e D sejam simétricas, ao considerar S_p como uma aproximação da inversa de J^{-1}, a matriz $\overline{J}$ possui uma parte antissimétrica. Dessa forma, uma importante vantagem da abordagem proposta nesse artigo é a possibilidade de tratar matrizes com partes antissimétricas, principalmente porque as técnicas de controle por modos deslizantes foram desenvolvidas para lidar com incertezas e também porque esse caso é mais comum na prática.

Assim, foram calculados os limitantes $\lambda_m = 1.011$ e $\lambda_M = 1.184$ para os os autovalores da parte simétrica da nova matriz de entrada do sistema, $\overline{J}$, sendo válidos para todas as matrizes de inércia obtidas variando κ no intervalo considerado. Seguindo as desigualdades (4)-(5), foram considerados os seguintes ganhos no controlador: $k_1 = 1$, $k_2 = 3.5$, $k_3 = 22.8$, e $k_4 = 744.7$. O método de Euler com passo 10^{-6} foi utilizado para integração numérica.

Seguindo o objetivo de comparar o desempenho do esquema de controle desse artigo com o esquema de (Vidal et al., 2016), foram considerados os mesmos parâmetros de simulação e as seguintes condições iniciais $w(0) = [-0.002 \quad -0.007 \quad 0.03]^T$, e $z(0) = \xi(0) = 0$.

O controle STA baseado no Teorema 1 é apresentado na Fig. 1, enquanto o resultado apresentado pela proposta de (Vidal et al., 2016), é apresentado na Fig. 2. Em ambos os casos as estratégias de controle garantem convergência em tempo finito para zero com um tempo de convergência bem semelhante. No entanto o esforço de controle da estratégia deste trabalho é significativamente menor do que o apresentado em (Vidal et al., 2016).

4 Conclusões

O presente artigo apresentou uma nova proposta de implementação para o STA multivariável. Esse novo projeto permitiu relaxar as hipóteses de simetria ou total conhecimento da matriz de entrada do sistema, generalizando os resultados anteriormente obtidos na literatura para sistemas com matrizes de entrada compostas por partes simétricas e antissimétricas.

Ao introduzir uma matriz simetrizante, baseada no valor nominal da matriz de entrada, obteve-se uma matriz resultante predominantemente simétrica e positiva definida com uma pequena parte antissimétrica. Essa técnica, possibilita a escolha de ganhos menores para a implementação do controlador, por acarretar em limitantes dos autovalores mais favoráveis.

Utilizando uma abordagem de Lyapunov, foi mostrado que apenas o conhecimento de limitantes superior e inferior para os autovalores da parte simétrica da matriz de entrada e um limitante superior da norma da parte antissimétrica é neces-

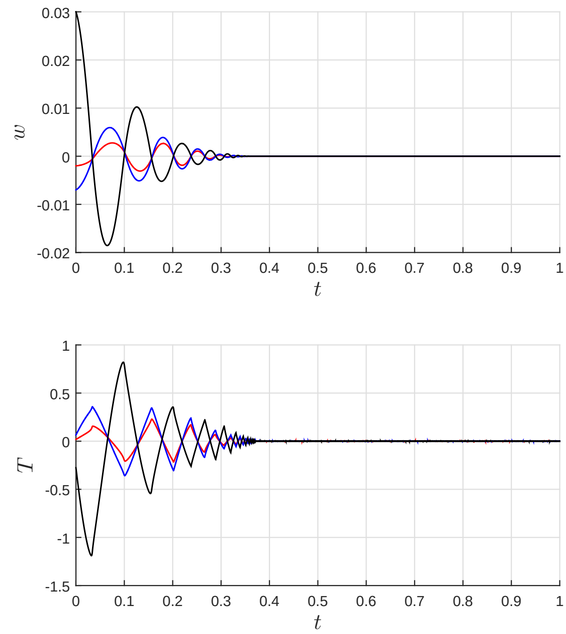

Figura 1: Desempenho do STA multivariável no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-0.002 \quad -0.007 \quad 0.03]^T$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1, (●) w_2, (●) w_3; (b) componentes do vetor de torque (●) T_1, (●) T_2, (●) T_3.

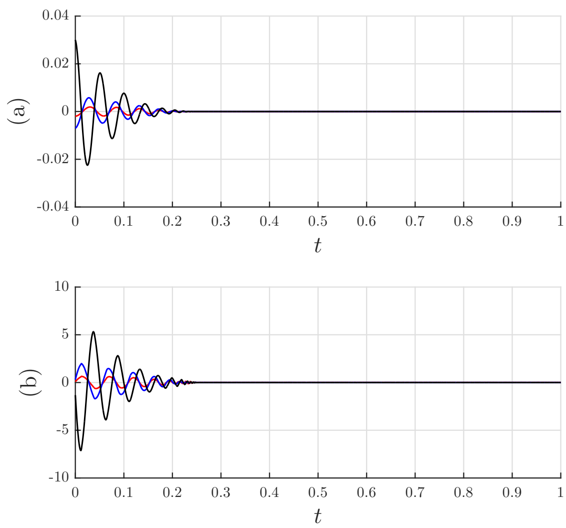

Figura 2: Performance do STA multivariável apresentada em (Vidal et al. 2016) , para $w(0) = [-0.002 \quad -0.007 \quad 0.03]^T$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1, (●) w_2, (●) w_3; (b) componentes do vetor de torque (●) T_1, (●) T_2, (●) T_3.

sário para o ajuste dos ganhos do controlador de modo a obter convergência global em tempo finito para a superfície de deslizamento.

Resultados de simulação ilustram a viabilidade da implementação proposta considerando o controle do movimento de um satélite que é um problema de interesse prático.

5 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil, e foi parcialmente financiado por FAPERJ e CAPES.

Referências

Deimling, K. (1992). *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, De Gruyter.

Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control : Theory and Applications*, Systems and Control Book Series, Taylor & Francis.

Filippov, A. F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side, *American Math. Soc. Translations* **42**(2): 199–231.

Goeree, B. and Fasse, E. (2000). Sliding mode attitude control of a small satellite for ground tracking maneuvers, *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, Vol. 2, pp. 1134–1138.

Gonzalez, T., Moreno, J. A. and Fridman, L. (2012). Variable gain super-twisting sliding mode control, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(8): 2100–2105.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.* **58**(6): 1247–1263.

Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *Int. J. Contr.* **76**(9): 924–941.

Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design, *Automatica* **41**(5): 823–830.

Moreno, J. and Osorio, M. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 2856–2861.

Moreno, J. and Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm, *IEEE Trans. Autom. Control* **57**(4): 1035–1040.

Nagesh, I. and Edwards, C. (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach, *Automatica* **50**(3): 984–988.

Shtessel, Y. B., Moreno, J. A., Plestan, F., Fridman, L. M. and Poznyak, A. S. (2010). Supertwisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 5109–5113.

Shtessel, Y., Taleb, M. and Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application, *Automatica* **48**(5): 759–769.

Sidi, M. J. (1997). *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press.

Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.

Vidal, P. V. N. M., Nunes, E. V. L. and Hsu, L. (2016). Multivariable super-twisting algorithm for a class of systems with uncertain input matrix, *Proceedings of the American Control Conference*, Boston, pp. 7201–7206.

Apêndice

Proposição 1

$$\frac{(z^T K_{ps}\sigma)(z^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{z^T K_{ps}^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\sigma, z \in \mathbb{R}^m$.

Prova: Seja $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ um vetor unitário. Então

$$z^T K_{ps}\bar{\sigma} \leq ||z^T K_{ps}|| = \sqrt{z^T K_{ps}^2 z},$$

onde a desigualdade é consequência da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos internos. Portanto, segue que

$$\frac{(z^T K_{ps}\sigma)(z^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{(z^T K_{ps}\bar{\sigma})(z^T K_{ps}\bar{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{z^T K_{ps}^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.$$

□