

ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS INCERTOS COM ATRASO DE SAÍDA VIA OBSERVADOR-PREDITOR BASEADO NO ALGORITMO *SUPER-TWISTING*

HARDY L. C. P. PINTO*, TIAGO ROUX DE OLIVEIRA†, LIU HSU‡

*PETROBRAS — Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello
Av. Horácio Macedo, 950 — Cidade Universitária — 21941-915 — Rio de Janeiro, RJ, Brasil

†Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações — Faculdade de Engenharia
Universidade do Estado do Rio de Janeiro — Rua São Francisco Xavier 524, sala 5018E — 20550-900

‡Programa de Engenharia Elétrica — COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro
C.P. 68504 — 21945-970 — Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Emails: hardy@petrobras.com.br, tiagoroux@uerj.br, liu@coep.ufrj.br

Abstract— This paper presents a stabilization method for linear time invariant systems with known time-varying measurement delays and subject to a matched disturbance signal that might represent an actuator fault. Part of the state vector is known (measured) in current time. The proposed method utilizes an open-loop predictor associated to a state observer based on the *Super-Twisting Algorithm*. This observer allows for the reconstruction of the unmodeled fault signals, being robust to parametric uncertainties, whereas the predictor advances in time the delayed output signal. Then, a sliding mode control law is developed to achieve global stabilization even in presence of parametric uncertainties and delays. Numerical simulations illustrate the efficiency of our approach.

Keywords— Sliding Mode Observer, Super-Twisting Algorithm, Predictors, Fault Reconstruction.

Resumo— Este artigo apresenta um método para estabilização de sistemas lineares invariantes no tempo apresentando atrasos de medição variantes no tempo conhecidos e sujeitos a um sinal de perturbação casada que pode estar representando uma falha de atuador. Parte dos estados são conhecidos (medidos) no tempo presente. A metodologia utiliza um preditor em malha aberta em conjunto com um observador baseado no Algoritmo *Super-Twisting*. O observador permite a reconstrução do sinal de perturbação não modelado, sendo robusto a incertezas paramétricas, enquanto o preditor avança no tempo o sinal de saída atrasado. Uma lei de controle por modos deslizantes é projetada para obter a estabilização global do sistema mesmo na presença de incertezas paramétricas e atrasos. Simulações numéricas são apresentadas para demonstrar a eficiência da nossa abordagem.

Palavras-chave— Observador por Modos Deslizantes, Algoritmo Super-Twisting, Preditores, Reconstrução de Falhas.

1 Introdução

Atrasos de atuação ou medição estão presentes na maioria das aplicações de engenharia de controle (Krstic, 2010a), tais como, por exemplo, controles de processos químicos, usinagem, sistemas de combustão ou teleoperação. A presença de atrasos significativos de medição pode causar instabilidades e desempenho inadequado das malhas de controle.

Em sistemas com atrasos apenas na medição, o controle é geralmente feito baseado em um preditor (Mirkin and Raskin, 2003). Para sistemas estáveis com atrasos de medição constantes, uma lei de controle baseada no *Preditor de Smith* (Smith, 1957) é frequentemente adotada. Este método foi posteriormente estendido para sistemas instáveis ou representados por equações de estado (Artstein, 1982). Em (Krstic, 2010b), um atraso de entrada arbitrário e variante no tempo é compensado utilizando um preditor obtido a partir da técnica de *PDE-backstepping* (Smyshlyaev and Krstic, 2005), na qual o atraso é representado por uma equação diferencial parcial (*PDE - Partial Differential Equation*). Um preditor similar é desenvolvido em (Léchappé et al., 2018), através de métodos de Lyapunov, sendo capaz de lidar com atrasos de entrada e saída simultâneos.

Este artigo demonstra que no caso de atrasos somente na saída, a predição é exata sem ser necessário impor condições à taxa de variação do atraso. Apesar de amplamente utilizados, a maioria dos preditores propostos exige o conhecimento do modelo e do atraso, não sendo robustos a incertezas ou perturbações (Léchappé et al., 2015). O uso de métodos adaptativos permite que alguns desses problemas sejam contornados (Bresch-Pietri and Krstic, 2009; Krstic, 2010a). Outra estratégia bastante utilizada para atrasos de medição é o uso de observadores em cascata (Ahmed-Ali et al., 2012; Coutinho et al., 2014). No entanto, esta estratégia só pode ser aplicada a sistemas com atrasos de medição arbitrários e duração constante. Mesmo no caso de durações mais curtas, o número de observadores na cascata pode ser muito elevado, tornando seu uso dificultado em certas aplicações (Holloway and Krstic, 2016).

A utilização de sistemas remotamente acionados também desperta o interesse por métodos de reconstrução de falhas para permitir tanto o diagnóstico quanto o controle em malha fechada, através da estimação do estado e das perturbações que representam os efeitos de falhas nos atuadores. Dentre as técnicas utilizadas para a estimação simultânea de estado e perturbação estão os observadores de entrada desconhe-

cida (UIO - *Unknown Input Observers*) (Patton and Chen, 1993; Hui and Zak, 2005; Chakrabarty et al., 2017) e observadores por modos deslizantes (Edwards et al., 2000; Tan and Edwards, 2003). Em (Pinto et al., 2017), um observador de entrada desconhecida foi desenvolvido para uma falha estruturada, utilizando a técnica de *PDE-backstepping* e uma lei de controle por modo deslizantes foi aplicada de forma a rejeitar o efeito da falha no sinal de saída, que também continha um atraso variante no tempo.

Para sistemas incertos, o uso de controle por modos deslizantes (SMC - *Sliding Mode Control*) (Utkin, 1992) é uma estratégia interessante devido à sua robustez a estas incertezas e também a respostas transitórias rápidas. Em (Richard et al., 2001), é explorada a possibilidade do uso de preditores em malha aberta em conjunto com SMC, abordando principalmente os sistemas com presença de atrasos de duração constante nos estados e introduzindo a possibilidade de uso no caso de atrasos na entrada. Uma lei de controle SMC para estabilização de sistemas incertos com atraso constante e conhecido de entrada é proposta em (Roh and Oh, 1999), mas sem a reconstrução ou detecção de falhas de atuadores. Novas estratégias de predição para sistemas com atraso de medição constante foram propostas por (Léchappé et al., 2015) de forma a atenuar o efeito de perturbações, ou eliminá-lo no caso de perturbação constante. Em todos os casos, a estratégia visava apenas a rejeição de perturbação ou o aumento da robustez, sem a preocupação com a reconstrução do sinal desconhecido.

O presente artigo apresenta um método para estabilização de um sistema linear invariante no tempo (LTI - *Linear Time Invariant*) onde parte dos estados é conhecida no tempo presente e a saída apresenta um atraso de medição conhecido e variante no tempo, que permite simultaneamente a reconstrução do sinal de falha para diagnóstico do sistema. Utilizando um preditor em malha aberta e um observador baseado em modos deslizantes de segunda ordem (STA - *Super-Twisting Algorithm*) (Nagesh and Edwards, 2014), é possível obter uma estimativa em tempo presente dos estados que não estão diretamente disponíveis e do sinal de falha. Finalmente, uma lei de controle por modos deslizantes é utilizada para estabilizar globalmente o sistema mesmo na presença de incertezas paramétricas e perturbações (falhas) não-estruturadas ou modeladas.

Este resultado mostra que preditores podem ser utilizados para compensar o atraso de medição em tempo finito, independentemente das condições iniciais e, juntamente com o controle por modos deslizantes atingir a estabilização em tempo finito. Apesar de, em geral, não existirem preditores explícitos para sistemas não-lineares, é possível utilizar um preditor para um sistema linear em conjunto com uma lei de controle não-linear.

2 Formulação do Problema

2.1 Descrição do Sistema

Considere um sistema linear invariante no tempo que apresenta uma falha de atuador representada por uma entrada desconhecida e não-mensurável $d(t) \in \mathbb{R}^p$ e possíveis incertezas paramétricas, agrupadas no termo $\delta(x, t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + d(t)] + D\delta(x, t) \\ y(t) = Cx(t - \tau(t)), \end{cases} \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada conhecida do sistema. A saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $q \leq p < n$, apresenta um atraso de medição variante no tempo conhecido $\tau(t)$. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times h}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são consideradas conhecidas.

Por simplicidade, adotaremos a notação $x := x(t)$ para as variáveis no tempo presente e $x_\tau := x(t - \tau(t))$ para variáveis atrasadas.

Neste sistema, o vetor de estado x é parcialmente conhecido, de tal forma que o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d) \\ \quad + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \delta(x, t) \\ y(t) = x_{\tau,2}, \end{cases} \quad (2)$$

onde $x_{\tau,2} := x_2(t - \tau(t))$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$ é conhecido e $x_2 \in \mathbb{R}^p$ é não-mensurável. As matrizes A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} e B_1 possuem as dimensões adequadas. Essa classe de sistemas pode representar, por exemplo, um caso onde x_1 modela a dinâmica de um atuador, tal como uma válvula piloto, e x_2 a dinâmica do processo, cujo efeito só será percebido de forma atrasada na saída.

Sobre o sistema, as seguintes hipóteses são assumidas

(H.1) O vetor de estados $x_1(t)$ é conhecido no tempo presente.

(H.2) A falha do atuador $d(t)$ é limitada em norma de tal forma que:

$$\|d(t)\| \leq \alpha. \quad (3)$$

(H.3) A derivada do atraso $\dot{\tau}$ é limitada em norma por uma constante conhecida $\bar{r} > 0$, não necessariamente pequena, tal que:

$$\|\dot{\tau}\| \leq \bar{r}. \quad (4)$$

(H.4) O par (A, B) é controlável.

(H.5) A matriz B possui posto completo.

(H.6) Os efeitos das incertezas paramétricas $\delta(x, t)$ são limitados em norma por

$$\|\delta(x, t)\| \leq \bar{\delta}\|x\|, \quad (5)$$

onde $\bar{\delta} > 0$ é uma constante conhecida.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma lei de controle que permita estabilizar o sistema, mesmo na presença da falha $d(t)$ e de incertezas paramétricas, além de permitir a reconstrução do sinal de falha para diagnóstico do sistema.

3 Observador-Preditor

Nesta seção será desenvolvido um observador-preditor capaz de estimar o valor presente da variável x_2 bem como reconstruir a perturbação d , a partir da saída do sistema y .

3.1 Preditor para Atraso de Medição

Inicialmente consideremos o sistema (2) sem a presença de incertezas paramétricas ($\delta(x, t) = 0$). Considerando a hipótese (H.1), é possível verificar que a variável x_2 pode ser vista como um sistema linear com uma entrada conhecida, o vetor de estado x_1 , e uma saída atrasada $y = x_2(t - \tau(t))$. Assim, é possível se obter uma estimativa \hat{x}_2 a partir da solução exata do sistema sem incertezas, pelo método de variação de constantes (Artstein, 1982; Krstic, 2009; Léchappé et al., 2018), dada por:

$$\hat{x}_2 = e^{A_{22}\tau(t)} x_{\tau,2} + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)} A_{21} x_1(\theta) d\theta. \quad (6)$$

A principal vantagem desta abordagem é que, sendo o sistema totalmente conhecido, o valor estimado \hat{x}_2 é uma previsão exata de x_2 a partir de seu valor atrasado $x_{\tau,2}$, obtida em tempo finito.

No caso de existirem incertezas paramétricas, a solução exata para o sistema de x_2 será dada por

$$x_2 = e^{A_{22}\tau(t)} x_{\tau,2} + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)} [A_{21} x_1(\theta) + D_2 \delta(x, \theta)] d\theta. \quad (7)$$

Desta forma, utilizando o preditor (6), a predição estará sujeita a um resíduo $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$. A partir de (6) e (7), verificamos que

$$\tilde{x}_2 = \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)} D_2 \delta(x, \theta) d\theta. \quad (8)$$

Por esta expressão, podemos ver que, além da magnitude das incertezas, a duração do atraso tem uma influência significativa na magnitude do resíduo, que pode ser majorado por

$$\|\tilde{x}_2\| \leq \tau(t) \bar{\delta} \|e^{A_{22}\tau(t)} D_2\| \sup_{\theta \in [t-\tau(t), t]} (\|x(\theta)\|). \quad (9)$$

3.2 Observador Super-Twisting

A partir da estimativa \hat{x}_2 é possível utilizar um observador por modos deslizantes de segunda ordem, utilizando o Algoritmo *Super-Twisting* (STA) (Nagesh and Edwards, 2014; Chalanga et al., 2016) para obter uma estimativa do sinal de falha $d(t)$. Definindo a variável de erro:

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1, \quad (10)$$

podemos definir o observador como em:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{x}_2 + B_1 u + \nu \\ \nu = -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|^{1/2}} + k_2 \tilde{x}_1 + \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}} = -k_3 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} - k_4 \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (11)$$

onde \hat{x}_1 é a estimativa do estado x_1 e \hat{x}_2 é o valor predito de x_2 obtido pelo observador-preditor proposto na seção 3.1. Observe que a predição \hat{x}_2 obtida anteriormente é exata no caso de não haver incertezas paramétricas ou no atraso. No caso onde há incertezas, é possível que o resíduo \tilde{x}_2 não seja zero. Neste caso, o observador STA poderá ser capaz de tratar as incertezas como parte do sinal de falha.

A partir das hipóteses (H.2) e (H.6), é possível utilizar diretamente o procedimento em (Nagesh and Edwards, 2014, eq. 25) para determinar os ganhos k_1, \dots, k_4 , de forma a garantir que um modo deslizante $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 \equiv 0$ seja atingido em tempo finito. Procedimentos semelhantes para determinação dos ganhos (ver (Levant, 1993) e (Moreno and Osorio, 2008)) também podem ser utilizados.

A dinâmica do erro de observação \tilde{x}_1 pode ser escrita, incluindo efeitos de incertezas como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1 d + D_1 \delta(x, t) - \nu \\ \nu = -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|^{1/2}} + k_2 \tilde{x}_1 + \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}} = -k_3 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} - k_4 \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (12)$$

Após o modo deslizante ser atingido, pode-se ver que:

$$\begin{cases} 0 = 0 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1 d + D_1 \delta(x, t) - \nu \\ \nu = \hat{\xi}, \quad \dot{\hat{\xi}} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Rearrmando a primeira equação, obtém-se:

$$\hat{\xi} = B_1 d + D_1 \delta(x, t) + A_{12}\tilde{x}_2, \quad (14)$$

que representa uma estimativa do efeito da falha e das perturbações em x_1 . Observe que no caso em que não há incertezas paramétricas, o sinal $\hat{\xi}$ pode ser usado diretamente para se obter uma reconstrução do sinal de falha d .

3.3 Observador-preditor

Podemos então agrupar o preditor (6) e o observador (11) em um observador-preditor para sistemas com atraso de medição e vetor de estado parcialmente conhecido:

$$\begin{cases} \hat{x}_2 = e^{A_{22}\tau(t)} x_{\tau,2} + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A_{22}(t-\theta)} A_{21} x_1(\theta) d\theta \\ \dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{x}_2 + B_1 u + \nu \\ \nu = -k_1 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|^{1/2}} + k_2 \tilde{x}_1 + \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\xi}} = -k_3 \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} - k_4 \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (15)$$

onde $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$.

Este preditor é capaz de obter estimativas para o estado x_2 e para a perturbação e incertezas agregadas $\hat{\xi}$ em tempo finito. No caso sem incertezas, podemos obter uma reconstrução da falha d diretamente do sinal $\hat{\xi}$, considerando a hipótese (H.5).

4 Controlador por modos deslizantes

Uma vez obtidas as estimativas \hat{x}_2 e $\hat{\xi}$ e considerando a hipótese (H.4), podemos projetar uma lei de controle por modos deslizantes de forma a obter a estabilização em tempo finito, com robustez às incertezas do modelo.

4.1 Lei de Controle

Primeiramente, vamos definir o vetor de estado

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

que contém o estado medido x_1 e a estimativa \hat{x}_2 obtida pelo preditor (6), ambas no tempo presente. Vamos definir a variável de deslizamento

$$s(t) = S\bar{x} = [I \ S_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

onde S é uma matriz a ser projetada, de tal forma que SB seja não-singular.

De (6) obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau} \dot{x}_{\tau,2} + \dot{\tau}A_{22}e^{A_{22}\tau} x_{\tau,2} \\ &+ A_{21}x_1 - (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau} A_{21}x_{\tau,1} \\ &+ A_{22} \int_{t-\tau}^t e^{A_{22}(t-\theta)} A_{21}x_1(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Utilizando-se (2) e (6) para fazer as substituições apropriadas, verifica-se que

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}\hat{x}_2 + (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau} D_2\delta(x, t - \tau). \quad (19)$$

Para simplificar a notação, definamos

$$\zeta_1(x, t) := D_1\delta(x, t), \quad (20)$$

$$\zeta_2(x, t) := (1 - \dot{\tau})e^{A_{22}\tau} D_2\delta(x, t - \tau). \quad (21)$$

Considere a transformação linear

$$T := \begin{bmatrix} I & S_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (22)$$

tal que

$$\begin{bmatrix} s \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

Podemos, então, escrever nestas coordenadas:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} s \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d) \\ \quad + \begin{bmatrix} \zeta_1(x, t) + S_2\zeta_2(x, t) \\ \zeta_2(x, t) \end{bmatrix} \\ y(t) = x_{\tau,2}, \end{cases} \quad (24)$$

onde $\bar{A}_{11} = A_{11} + S_2A_{21}$, $\bar{A}_{12} = S_2A_{22} + A_{12} - \bar{A}_{11}S_2$, $\bar{A}_{21} = A_{21}$ e $\bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21}S_2$.

Para projetar a matriz S , vamos inicialmente considerar a equação (24) para $\dot{\hat{x}}_2$ quando não há incertezas paramétricas, ou seja, quando $\zeta_2(x, t) = 0$. Durante o modo deslizante teremos $s = 0$ e, então,

$$\dot{\hat{x}}_2 = \bar{A}_{22}\hat{x}_2, \quad (25)$$

ou seja, durante o deslizamento, a dinâmica será governada por $\bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21}S_2$. A hipótese (H.4) assegura que o par (A_{22}, A_{21}) é controlável (ver (Edwards and Spurgeon, 1998, Prop. 3.3)) e, desta forma, qualquer técnica de realimentação de estados pode ser utilizada para projetar S_2 de tal forma que \bar{A}_{22} seja Hurwitz.

Consideremos a lei de controle

$$u = u_d + u_{\text{nom}} + u_{\text{SM}}, \quad (26)$$

onde u_d é o termo utilizado para rejeição de perturbação, u_{nom} é a parcela nominal do controle e u_{SM} é um termo chaveado que servirá para levar o sistema ao modo deslizante $s \equiv 0$.

Inicialmente, vamos observar a equação para x_1 em (2):

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1(u + d) + \zeta_1(x, t). \quad (27)$$

Da equação (14) podemos definir:

$$u_d = -B_1^\dagger \hat{\xi} = -d - B_1^\dagger D_1\delta(x, t) - B_1^\dagger A_{12}\tilde{x}_2. \quad (28)$$

Aplicando (28) a (27), verificamos que esta se torna:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}\hat{x}_2 + B_1[u_{\text{nom}} + u_{\text{SM}}]. \quad (29)$$

já que $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$. Observe que u_d é capaz de rejeitar a perturbação d e a parte casada das incertezas paramétricas $A_{12}\tilde{x}_2$ e $\zeta_1(x, t)$.

Considerando a lei de controle u_d aplicada, podemos projetar u_{nom} utilizando o método do controle equivalente (Shtessel et al., 2014), através da solução da equação $\dot{s} = 0$ para o sistema nominal (sem incertezas), e considerando que a equação de x_1 já está na forma (29). Assim, supondo $u_{\text{SM}} = 0$, podemos escrever

$$0 = SA\bar{x} + SB(u_{\text{nom}}). \quad (30)$$

Como SB é não-singular por projeto, temos

$$u_{\text{nom}} = -(SB)^{-1}SA\bar{x}. \quad (31)$$

Finalmente, definimos um termo chaveado que levará o sistema a um modo deslizante:

$$u_{\text{SM}} = -\rho(SB)^{-1}\text{sign}(s), \quad (32)$$

onde $\text{sign}(s) = [\text{sign}(s_1) \cdots \text{sign}(s_{n-p})]^T$ e $\rho > 0$ deve ser suficientemente grande para majorar as incertezas e perturbações não rejeitadas pelos demais termos.

Assim, a lei de controle pode ser escrita de forma completa

$$u = -B_1^\dagger \hat{\xi} - (SB)^{-1}SA\bar{x} - \rho(SB)^{-1}\text{sign}(s). \quad (33)$$

4.2 Análise de Estabilidade

Aplicando (33) em (24), obtemos

$$\begin{cases} \dot{s} &= S_2\zeta_2(x, t) - \rho\text{sign}(s) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \bar{A}_{21}s + \bar{A}_{22}\hat{x}_2 + \zeta_2(x, t) \\ y = x_{\tau,2} &= \hat{x}_{\tau,2} + \tilde{x}_{\tau,2}. \end{cases} \quad (34)$$

A partir do sistema em malha fechada (34), é possível verificar que o modo deslizante é atingido em tempo finito pelo seguinte teorema.

Teorema 1 A lei de controle (33) aplicada ao sistema (2), sujeito às hipóteses (H.1) a (H.6), com

$$\rho \geq \phi \bar{\delta}(1 + \bar{r}) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| \|x\| + \eta \quad (35)$$

onde $\eta > 0$ e $\phi > 1$ são constantes arbitrárias, leva o sistema a um modo deslizante $s = S\bar{x} \equiv 0$ em tempo finito.

Prova: Seja a função de Lyapunov $V = s^T s/2$. Derivando V ao longo das trajetórias de (34) e utilizando a definição de $\zeta_2(x, t)$ em (21), obtemos

$$\dot{V} = s^T S_2 \zeta_2(x, t) - \rho s^T \text{sign}(s), \quad (36)$$

$$\dot{V} = (1 - \dot{\tau}) s^T e^{A_{22}\tau} D_2 \delta(x, t - \tau) - \rho s^T \text{sign}(s). \quad (37)$$

Observe que

$$s^T \text{sign}(s) = \|s\|_1 \geq \|s\|_2, \quad (38)$$

$$-\rho s^T \text{sign}(s) \leq -\rho \|s\|_2. \quad (39)$$

Como \dot{V} apresenta um termo atrasado, usaremos o Teorema de Razumikhin (Gu et al., 2003, Teorema 1.4). Suponha que $\|x(t + \theta)\| < \phi \|x(t)\|$, para $\phi > 1$, $-\tau(t) \leq \theta \leq 0$. Então,

$$\|\delta(x, t + \theta)\| \leq \bar{\delta} \|x(t + \theta)\| \leq \phi \bar{\delta} \|x(t)\|, \quad (40)$$

$$\|\delta(x, t - \tau)\| \leq \phi \bar{\delta} \|x(t)\|. \quad (41)$$

Assim, usando (H.3), temos

$$\dot{V} \leq -\|s\| \left[\rho - \phi \bar{\delta}(1 + \bar{r}) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| \|x(t)\| \right]. \quad (42)$$

Se

$$\rho \geq \phi \bar{\delta}(1 + \bar{r}) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| \|x\| + \eta, \quad (43)$$

então

$$\dot{V} \leq -\eta \|s\| < 0, \quad (44)$$

mostrando que s é Globalmente Assintoticamente Estável. Além disso, como

$$\dot{V} \leq -\eta \sqrt{V}. \quad (45)$$

é possível ver que a superfície de deslizamento $s \equiv 0$ é atingida em tempo finito. \square

Na equação (37) é possível observar um termo dependente da taxa de variação do atraso $\dot{\tau}$, oriundo da perturbação $\zeta_2(x, t)$. Para obter o majorante apresentado na equação (42), faz-se necessário que $\dot{\tau}$ seja limitado, o que é assumido pela hipótese (H.3). No caso de um sistema sem incertezas paramétricas, teremos $\delta(x, t) = 0$ na equação (37) e esta hipótese poderá ser relaxada, já que \dot{V} não apresentará o termo dependente do atraso.

Uma vez atingido o modo deslizante, é possível verificar que o sistema em malha fechada (34) é assintoticamente estável através do seguinte corolário.

Corolário 1 Quando o modo deslizante nas condições do Teorema 1 é atingido, o sistema (34),

sujeito às hipóteses (H.1) a (H.6) é assintoticamente estável se existir uma matriz $P_2 > 0$ tal que $P_2 \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T P_2 = -I$ e

$$\bar{\delta} < \frac{1}{2\phi \lambda_{\max}(P_2)(1 + \bar{r}) \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|e^{A_{22}\tau} D_2\|}. \quad (46)$$

onde $\phi > 1$ é uma constante arbitrária como no Teorema 1, e $\lambda_{\max}(P_2)$ é o maior autovalor da matriz P_2 .

Prova: Quando o modo deslizante for atingido, teremos $s \equiv 0$ e a dinâmica do sistema, obtida da equação (34), será

$$\dot{\hat{x}}_2 = \bar{A}_{22} \hat{x}_2 + \zeta_2(x, t). \quad (47)$$

Observe que \bar{A}_{22} é Hurwitz por projeto, então podemos assumir que existe uma matriz positiva definida simétrica $P_2 > 0$ tal que $P_2 \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T P_2 = -I$. Então, considere a função de Lyapunov $V_2(\hat{x}_2) = \hat{x}_2^T P_2 \hat{x}_2$. Sua derivada ao longo das trajetórias de (47) é:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\hat{x}_2) &= -\hat{x}_2^T \hat{x}_2 + 2\hat{x}_2^T P_2 \zeta_2(x, t) \\ &\leq -\|\hat{x}_2\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_2) \|\hat{x}_2\| \|\zeta_2(x, t)\| \\ &= -\lambda_{\max}(P_2) \|\hat{x}_2\| [\mu \|\hat{x}_2\| - 2\|\zeta_2(x, t)\|], \end{aligned} \quad (48)$$

onde $\mu := 1/\lambda_{\max}(P_2)$.

Por (21), sabemos que

$$\zeta_2(x, t) = (1 - \dot{\tau}) e^{A_{22}\tau} D_2 \delta(x, t - \tau) \quad (49)$$

depende de uma variável atrasada e, portanto, iremos novamente utilizar o Teorema de Razumikhin. Durante o modo deslizante, temos que $x_1 = -S_2 \hat{x}_2$, então $\|x\| \leq \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|\hat{x}_2\|$. Assim, utilizando (41), podemos escrever

$$\|\delta(x, t - \tau)\| \leq \phi \bar{\delta} \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|\hat{x}_2\|. \quad (50)$$

Desta forma, substituindo (50) em (49)

$$\dot{V}_2(\hat{x}_2) \leq -\lambda_{\max}(P_2) \|\hat{x}_2\|^2 [\mu - \beta_1], \quad (51)$$

$$\beta_1 := 2\phi \bar{\delta}(1 + \bar{r}) \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|e^{A_{22}\tau} D_2\|. \quad (52)$$

Se $\beta_1 < \mu$, teremos $\dot{V}_2(\hat{x}_2) \leq 0$, nas condições do Teorema de Razumikhin, o que mostra que o sistema é assintoticamente estável, sempre que

$$2\phi \bar{\delta}(1 + \bar{r}) \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|e^{A_{22}\tau} D_2\| < \frac{1}{\lambda_{\max}(P_2)} \quad (53)$$

e nos permite chegar à condição (46). \square

Do Corolário 1, podemos ver que $\hat{x}_2 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Como durante o modo deslizante $x_1 = -S_2 \hat{x}_2$, também podemos verificar que $x_1 \rightarrow 0$. Além disso, $\|x\| \leq \left(\sqrt{1 + \|S_2\|^2} \right) \|\hat{x}_2\|$ e por (H.6), temos que o efeito da perturbação também será levado a zero e, como consequência, $\hat{x}_2 \rightarrow 0$ pela equação (8). Assim, teremos também $x_2 \rightarrow 0$, demonstrando que o sistema é estabilizado, apesar da presença de falhas e incertezas paramétricas limitadas pela condição (46).

Observe que a hipótese (H.6) permite que o sistema seja estabilizado na origem. É possível relaxar esta hipótese utilizando um majorante mais geral para incerteza paramétrica, do tipo $\|\delta(x, t)\| \leq \bar{\delta}_1 \|x\| + \bar{\delta}_2$. Neste caso, no entanto, as variáveis de estado ficam limitadas a uma região suficientemente pequena ao redor da origem.

5 Simulações

Para demonstrar o método proposto, foi utilizado um sistema sem incertezas ($\delta(x, y) = 0$) com a forma (2), onde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]. \quad (54)$$

Foi utilizado um sinal de falha de atuador $d(t) = 0.1 \sin(2t) + 0.2 \cos(3t)$ e um atraso de saída constante $\tau(t) = 0.5s$. Os ganhos foram determinados de forma a atender o método apresentado em (Nagesh and Edwards, 2014, eq. 25), e fixados em $k_1 = k_3 = 5$ e $k_2 = k_4 = 2$. O sistema não apresentava incertezas e foi utilizada a lei de controle (33), com $S = [1 \ -5]$ e $\rho = 2$, constante.

A Figura 1 mostra as variáveis de estado x_1 (azul) e x_2 (preto) e saída y (vermelho) do exemplo proposto estabilizado pela lei de controle (33), projetada a partir do estado x_1 e das estimativas $\hat{\xi}$ e \hat{x}_2 obtidas pelo observador (15). A Figura 2 compara x_2 (azul) e sua estimativa \hat{x}_2 (vermelho) obtida utilizando o preditor (6) evidenciando que a predição ocorre em tempo finito.

A Figura 3 mostra o sinal de falha d e sua estimativa $\hat{d} = B_1^\dagger \hat{\xi}$, onde $B_1^\dagger = (B_1^T B_1)^{-1} B_1^T$ é a pseudo-inversa de B_1 (Strang, 2009, pag. 122), obtida a partir do observador (11), também convergindo em tempo finito. Nas figuras 4 e 5 podem ser vistas, respectivamente, a variável de deslizamento s e o sinal de controle u .

Para testar a robustez do método a incertezas, foi utilizado

$$D = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \delta(x, t) = x. \quad (55)$$

O ganho da lei de controle foi ajustado para $\rho = 5$ apenas para aumentar a velocidade de convergência. A Figura 6 mostra que o sistema ainda é estabilizado pela lei de controle, apesar da incerteza. Na Figura 7 vemos que a estimativa \hat{x}_2 apresenta um erro grande devido a incerteza paramétrica. A Figura 8 mostra que o observador STA utilizado para reconstruir a perturbação consegue estimar o resíduo \tilde{x}_2 , permitindo seu uso na lei de controle.

6 Conclusões

Foi apresentado um método para estabilização de sistemas lineares invariantes no tempo apresentando um atraso de medição variante no tempo conhecido e sujeitos a uma perturbação casada que pode representar uma falha de atuador. Parte

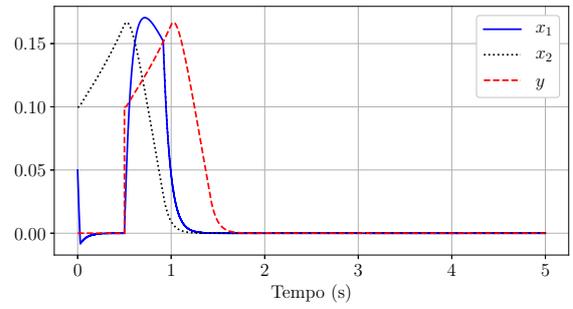


Figura 1: Variáveis de estado x_1 (azul) e x_2 (preto) e saída y (vermelho) do exemplo proposto, estabilizado pela lei de controle (33), projetada a partir do estado x_1 e das estimativas $\hat{\xi}$ e \hat{x}_2 obtidas pelo observador (15).

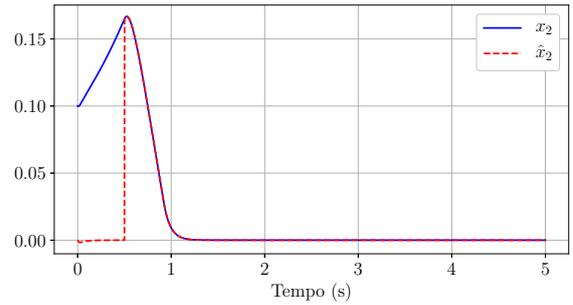


Figura 2: Variável de estado x_2 (azul) e sua estimativa \hat{x}_2 (vermelho) obtida utilizando o preditor (6), mostrando que a predição ocorre em tempo finito.

dos estados são conhecidos sem atrasos. A metodologia utilizou um preditor em malha aberta em conjunto com um observador baseado no Algoritmo *Super-Twisting*. O uso deste observador permitiu a reconstrução do sinal de perturbação, sendo também robusto a incertezas paramétricas. Uma vantagem obtida nesta configuração é que mesmo utilizando um preditor em malha aberta, ainda foi possível estimar o estado e as falhas em tempo finito.

Uma lei de controle por modos deslizantes foi projetada para obter a estabilização global do sistema apresentando robustez a incertezas. Utilizando o Teorema de Razumikhin foi mostrado que o modo deslizante é atingido em tempo finito, mesmo na presença de perturbações e atrasos, além de garantir-se que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Como desafios futuros, serão estudados os efeitos de incertezas no atraso e a extensão do método para classes de sistemas não-lineares.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, CNPq, FAPERJ e Petrobras pelo apoio a esta pesquisa.

Referências

- Ahmed-Ali, T., Cherrier, E. and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2012). Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems, *IEEE T. Automat. Contr.* **57**(1): 224–229.
- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: A reduction, *IEEE T. Automat. Contr.* **27**(4): 869–879.

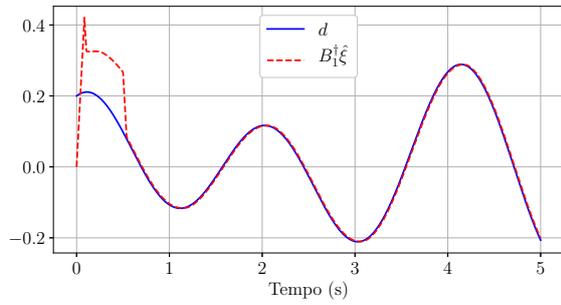


Figura 3: Sinal de perturbação d (azul) e sua estimativa $\hat{d} = B_1^d \hat{\xi}$ (vermelho) obtida em tempo finito pelo observador (11).

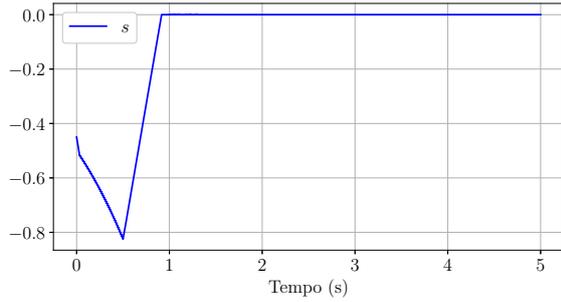


Figura 4: Gráfico da variável de deslizamento s , mostrando que o modo deslizante é atingido em tempo finito. Também pode se observar que o controle começa a atuar passado o atraso inicial.

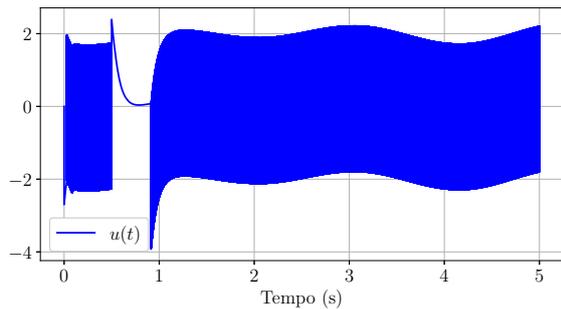


Figura 5: Sinal de controle u evidenciando o modo deslizante.

Bresch-Pietri, D. and Krstic, M. (2009). Adaptive trajectory tracking despite unknown input delay and plant parameters, *Automatica* **45**(9).

Chakrabarty, A., Corless, M. J., Buzzard, G. T., Zak, S. H. and Rundell, A. E. (2017). State and unknown input observers for nonlinear systems with bounded exogenous inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(11): 5497–5510.

Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L., Bandyopadhyay, B. and Moreno, J. A. (2016). Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **63**(6): 3677–3685.

Coutinho, C. L., Oliveira, T. R. and Cunha, J. P. V. S. (2014). Output-feedback sliding mode control via cascade observers for global stabilisation of a class of nonlinear systems with output delay, *Int. J. Control* **87**(11): 2327–2337.

Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory And Applications*, Taylor & Francis, New York.

Edwards, C., Spurgeon, S. K. and Patton, R. J. (2000). Sliding mode observers for fault detection and isolation, *Automatica* **36**(4): 541–553.

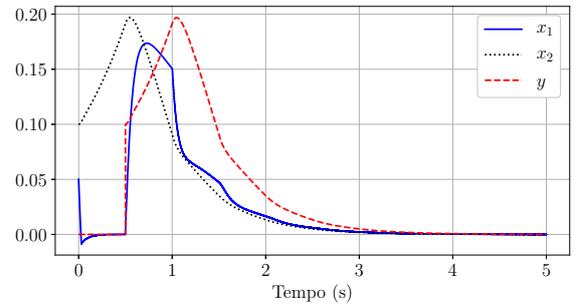


Figura 6: Variáveis de estado x_1 (azul) e x_2 (preto) e saída y (vermelho) do exemplo proposto com incertezas estabilizado pela lei de controle (33), projetada a partir do estado x_1 e das estimativas $\hat{\xi}$ e \hat{x}_2 obtidas pelo observador (15).

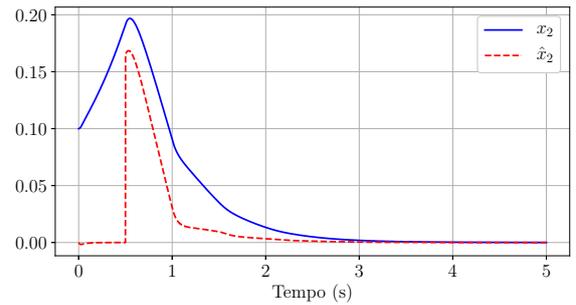


Figura 7: Variável de estado x_2 (azul) e sua estimativa \hat{x}_2 (vermelho) obtida utilizando o preditor (6) para o sistema com incertezas, evidenciando que a estimativa apresenta um resíduo como esperado.

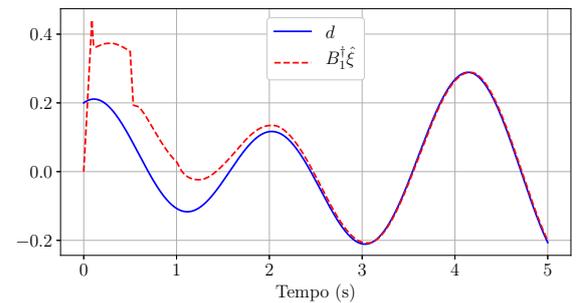


Figura 8: Sinal de perturbação d (azul) e a estimativa das perturbações $\hat{\xi}$ (vermelho) obtida pela equação (14). Observe que a estimativa também está acomodando o erro de estimação de x_2 .

Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J. (2003). *Stability of Time-Delay Systems (Control Engineering)*, 1 edn, Birkhauser, Boston.

Holloway, J. and Krstic, M. (2016). Predictor observers for proportional navigation systems subjected to seeker delay, *IEEE T. Contr. Syst. T.* **24**(6): 2002–2015.

Hui, S. and Zak, S. (2005). Observer design for systems with unknown inputs, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **15**: 431–446.

Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, Birkhauser Basel.

Krstic, M. (2010a). Compensation of infinite-dimensional actuator and sensor dynamics, *IEEE Contr. Syst. Mag.* **30**(1): 22–41.

Krstic, M. (2010b). Lyapunov stability of linear predictor feedback for time-varying input delay, *IEEE T. Automat. Contr.* **55**(2): 554–559.

Léchappé, V., Moulay, E. and Plestan, F. (2018). Prediction-based control of LTI systems with input and output time-varying delays, *Systems & Control Letters* **112**: 24–30.

- Léchappé, V., Moulay, E., Plestan, F., Glumineau, A. and Chriette, A. (2015). New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances, *Automatica* **52**: 179–184.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, *International Journal of Control* **58**(6): 1247–1263.
- Mirkin, L. and Raskin, N. (2003). Every stabilizing dead-time controller has an observer-predictor based structure, *Automatica* **39**(10): 1747–1754.
- Moreno, J. A. and Osorio, M. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2856–2861.
- Nagesh, I. and Edwards, C. (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach, *Automatica* **50**(3): 984 – 988.
- Patton, R. J. and Chen, J. (1993). Optimal unknown input distribution matrix selection in robust fault diagnosis, *Automatica* **29**(4): 837 – 841.
- Pinto, H. L. C. P., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2017). Rejeição de perturbação em sistemas com atrasos variantes no tempo utilizando preditor PDE-backstepping, *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pp. 3009 – 3014.
- Richard, J. P., Gouaisbaut, F. and Perruquetti, W. (2001). Sliding mode control in the presence of delay, *Kybernetika* **37**(3): 277–294.
- Roh, Y.-H. and Oh, J.-H. (1999). Robust stabilization of uncertain input-delay systems by sliding mode control with delay compensation, *Automatica* **35**(11): 1861–1865.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*, Springer, New York.
- Smith, O. J. M. (1957). Closer control of loops with dead time, *Chem. Eng. Prog.* **53**(5): 217–219.
- Smyshlyaev, A. and Krstic, M. (2005). Backstepping observers for a class of parabolic PDEs, *Syst. Control Lett.* **54**(7): 613–625.
- Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra*, 4th edn, Wellesley Cambridge Press.
- Tan, C. and Edwards, C. (2003). Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults, *Int. J. Robust Nonlin.* **13**(5): 443–463.
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization (Communications and Control Engineering)*, Springer, Berlin.