PROJETO DE CONTROLADOR COM ESTRUTURA VARIÁVEL PARA MINIMIZAÇÃO DE CUSTO QUADRÁTICO UTILIZANDO A FUNÇÃO MÍNIMO

UILIAM NELSON L. T. ALVES*, DIOGO R. OLIVEIRA†, MARCELO C. M. TEIXEIRA‡, RODRIGO CARDIM‡, EDVALDO ASSUNÇÃO‡, RODRIGO P. CAUN§

*IFPR - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná,
Avenida Dr. Tito s/n, Jardim Panorama, 86.400-000
Jacarezinho, PR, Brasil

†IFMS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso do Sul,
Rua Angelo Melão, 790, 79641-162,
Três Lagoas, MS, Brasil

‡UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia,
Departamento de Engenharia Elétrica, Ilha Solteira, Av. José Carlos Rossi, nº 1370, 15385-000
Ilha Solteira, SP, Brasil

§UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Elétrica, Apucarana, Brasil

Emails: `uiliam.alves@ifpr.edu.br`, `diogo.ramalho@ifms.edu.br`, `marcelo@dee.feis.unesp.br`, `rcardim@dee.feis.unesp.br`, `edvaldo@dee.feis.unesp.br`, `rodrigocaun@utfpr.edu.br`

Abstract— The switched control can be used in the search for less conservative results for the control of uncertain and/or nonlinear systems. The advantage of this approach can be both the increase of the feasibility region regarding the uncertainties of the system for which stability is guaranteed and the improvement of some performance index. The switching among some feedback gains occurs in the switched control based on minimum functions and it suggests a variable structure in this control law. The minimum function can be recursively calculated using the signal function, which can motivate future researches on sliding modes in the feedback systems with this switched control procedure. In this paper, considering a class of uncertain linear systems with polytopic uncertainties, a new design condition for a switched controller is presented to minimize a bound (guaranteed cost) for a quadratic cost that depends on the state vector and the control signal of the closed-loop system. It is also presented a numerical example that shows the least bound for the quadratic cost by the switched control when compared with that obtained with the use of a single-gain feedback control law. Future studies shall extend the class of considered systems as well as make a richer analysis of the sliding modes, that usually appear in this control structure.

Keywords— Switched control, Variable structure control, Quadratic cost, Minimum function, Sliding modes.

Resumo— O controle chaveado pode ser utilizado na busca por resultados menos conservadores para o controle de sistemas incertos e/ou não lineares. A vantagem dessa abordagem pode ser tanto no aumento da região de factibilidade com relação às incertezas do sistema para as quais se garante a estabilidade, quanto na melhora de algum índice de desempenho. A mudança entre os ganhos de realimentação que ocorre no controle chaveado baseado na função mínimo sugere uma estrutura variável nesta lei de controle. A função mínimo pode ser calculada recursivamente utilizando a função sinal, algo que pode ser utilizado em futuras pesquisas sobre modos deslizantes em sistemas realimentados com controle chaveado. Neste artigo, considerando uma classe de sistemas lineares com incertezas politópicas, apresenta-se uma nova condição de projeto para controladores chaveados de modo a minimizar um limitante (custo garantido) para um índice quadrático que depende do vetor de estado e do sinal de controle no sistema em malha fechada. Estuda-se também um exemplo numérico que mostra o menor limitante para o índice de desempenho possibilitado pelo controle chaveado em relação à utilização de um único ganho de realimentação. Estudos futuros devem estender a classe de sistemas considerados, bem como fazer uma análise mais profunda sobre os modos deslizantes nesta estrutura de controle.

Palavras-chave— Controle chaveado, Controle com estrutura variável, Custo quadrático, Função mínimo, Modos deslizantes.

1 Introdução

O controle chaveado baseado na função mínimo é uma alternativa para a estabilização de sistemas incertos e/ou não lineares. Quando ele é utilizado consegue-se diminuir o conservadorismo do projeto do controlador comparando-se à lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, permitindo projeto de controladores em situações com maiores incertezas ou mesmo melhorando algum índice de desempenho (Souza et al., 2013; Souza et al., 2014; Alves et al., 2016b; Alves et al., 2016a; de Oliveira et al., 2018).

A escolha do ganho de realimentação com base no mínimo sugere uma estrutura variável no controle. Recentemente, em Alves et al. (2016b) foi apresentada uma releitura da função mínimo, na qual esta é interpretada através da função sinal, fazendo uso da recursividade. Utilizando essa nova perspectiva, foi proposto o controle chaveado suave para uma classe de sistemas não lineares incertos, de modo a diminuir o *chattering* no controle chaveado. Seguindo esta linha de pesquisa, em Alves et al. (2016a) considerou-se também distúrbios de amplitude limitada atuando sobre o sistema.

O controle com estrutura variável baseia-se no uso de uma lei descontínua de controle e mostra-se uma estratégia de controle robusta a incertezas ou distúrbios casados. O chaveamento ocorre de modo a manter a trajetória de estado do sistema em malha fechada sobre uma superfície de deslizamento projetada de tal forma que o sistema controlado apresente as características desejadas quando em deslizamento (Decarlo et al., 1988; Hung et al., 1993). Estratégias são propostas na literatura para viabilizar aplicações práticas desta técnica de controle (Young et al., 1996), como por exemplo no controle de sistemas de suspensão ativa (Alves et al., 2014).

Por outro lado, a teoria do regulador quadrático ótimo utiliza um índice de desempenho quadrático versátil que provê uma boa relação entre desempenho e alocação de autovalores, baseada na minimização da energia das variáveis de estado e dos sinais de controle (Caun et al., 2018). Esta teoria também é aplicável ao projeto de servo sistemas, nos quais o limitante do custo quadrático é sensível à escolha das condições iniciais do controlador (Teixeira et al., 2006).

Neste artigo, é proposto o controle chaveado para a minimização de um custo quadrático, sendo que a implementação da lei de controle do típo mínimo pode ser realizada através da função sinal. Os resultados são comparados com a utilização de um único ganho de realimentação (lei de controle $u(t) = -Kx(t)$). Os autores consideram que esta abordagem para o controle chaveado, através da função sinal, é um primeiro passo para a análise de modos deslizantes na abordagem do controle chaveado.

O artigo está organizado como segue. Na Seção 2 apresentam-se novos resultados para o projeto de controladores chaveados para a minimização de um custo quadrático, que estende a teoria apresentada em (Souza et al., 2013). Na Seção 3, baseado em Alves et al. (2016b), apresenta-se a leitura da função mínimo como uma estrutura variável recursiva. Na Seção 4 estuda-se um exemplo numérico, mostrando a diminuição do limitante do custo quadrático quando utiliza-se o controle chaveado. Na Seção 5 tem-se algumas conclusões e perspectivas para futuros trabalhos.

Notação: o conjunto dos primeiros r números naturais é denotado por $\mathbb{I}_r$. O menor índice $j \in \mathbb{I}_r$ tal que, para o conjunto $H = \{h_1, \cdots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{I}_r}\{h_i\}$ é denotado por '$\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r}\{h_i\}$'; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, então $\arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_r}\{h_i\} = \min\{2,5\} = 2$. A função $\mathrm{sgn}(\cdot)$ é definida como

$$\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z = 0, \\ \frac{z}{|z|}, \text{ se } z \neq 0. \end{cases}$$

Por simplicidade de notação utilizou-se $\alpha(t) = \alpha$ e $\varphi = \varphi(x(t))$. Utiliza-se também $M(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i M_i$, sendo M_i, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, uma matriz com elementos reais e dimensão adequada, e $\alpha_i \geqslant 0$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$.

2 Controle chaveado para a minimização de custo quadrático

Considere um sistema linear com incertas politópicas e descrito pela seguinte dinâmica

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t), \tag{1}$$

sendo $x(t) \in \Re^{n_x}$, $u(t) \in \Re^{n_u}$, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i A_i$, $A_i \in \Re^{n_x \times n_x}$, para todo $i \in \mathbb{I}_{n_r}$ e $B \in \Re^{n_x \times n_u}$. Sendo que $\alpha_i \geqslant 0$, $i \in \mathbb{I}_{n_r}$, são parâmetros incertos tais que $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$.

2.1 Lei de controle chaveada

Considere a lei de controle chaveada

$$\begin{aligned} &u(t) = u_\varphi(t) = -K_\varphi x(t), \\ &\varphi = \arg^* \min_{i \in \mathbb{I}_{n_r}} \big\{ -2x(t)^T PBK_i x(t) \\ &\qquad\qquad + x(t)^T K_i^T S K_i x(t) \big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Interessa-se em projetar a lei de controle (2) de modo a minimizar um limitante superior (custo garantido) para o índice de desempenho (Ogata, 2010)

$$J = \int_0^\infty x(t)^T R x(t) + u(t)^T S u(t) \, dt, \tag{3}$$

sendo $0 < R \in \Re^{n_x \times n_x}$ e $0 < S \in \Re^{n_u \times n_u}$, para qualquer estado inicial $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo

$$\mathscr{X} = \left\{ x(0) = \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_j \chi_j \in \Re^{n_x},\ \chi_j \in \Re^{n_x},\ \lambda \in \Lambda \right\}, \tag{4}$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda = [\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_{n_0}]^T \in \Re^{n_0} : \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 1 \right\}. \tag{5}$$

Baseado em (Souza et al., 2013), uma condição suficiente para este projeto é descrita no próximo teorema.

Teorema 1 *Considere um sistema incerto descrito por* (1) *e seja o índice de desempenho J em* (3) *com* $0 < R \in \Re^{n_x \times n_x}$ *e* $0 < S \in \Re^{n_u \times n_u}$. *Suponha a existência de uma matriz simétrica* $0 < X \in \Re^{n_x \times n_x}$, *matrizes* $M_i \in \Re^{n_u \times n_x}$ *e escalares* $\gamma > 0$ *e* $\beta > 0$, *tais que*

$$\begin{bmatrix} \Psi & X & M_i^T \\ X & -R^{-1} & 0 \\ M_i & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & \chi_j^T \\ \chi_j & X \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{6b}$$

sendo $\Psi = A_i X + X A_i^T - BM_i - M_i^T B^T + 2\beta X$, *sejam satisfeitas para todo* $i \in \mathbb{I}_{n_r}$ *e* $j \in \mathbb{I}_{n_0}$. *Então a lei de controle* (2) *sendo* $P = X^{-1}$ *e* $K_j = M_j X^{-1}$ *torna o sistema incerto* (1) *assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a* β. *Nestas condições, também garante-se índice de desempenho* $J < \gamma$ *para todo* $x(0) \in \mathscr{X}$ *em* (4).

Prova: Considere como candidata a função de Lyapunov $V_\varphi(x(t)) = x(t)^T Px(t)$, $0 < P = P^T \in \Re^{n_x \times n_x}$. A partir de (1) e (2), tem-se, ao longo da trajetória de estado do sistema,

$$\begin{aligned}\dot{V}_\varphi(x(t)) &= x(t)^T P\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T Px(t)\\ &= x(t)^T \left[PA(\alpha) + A(\alpha)^T P\right] x(t)\\ &\quad + x(t)^T \left[-PBK_\varphi - K_\varphi^T B^T P\right] x(t). \quad (7)\end{aligned}$$

Por outro lado, supondo que as condições no Teorema 1 sejam satisfeitas, então aplicando o complemento de Schur duas vezes com relação à ultima linha e coluna de (6a), encontra-se

$$\begin{bmatrix}\Psi + M_i^T SM_i & X\\ X & -R^{-1}\end{bmatrix} < 0,$$
$$\Psi + M_i^T SM_i + XRX < 0, \quad (8)$$

sendo $\Psi = A_i X + XA_i^T - BM_i - M_i^T B^T + 2\beta X$. Pré- e pós-multiplicando a segunda LMI em (8) por $P = X^{-1}$, fazendo as mudanças de variáveis $P = X^{-1}$ e $K_i = M_i X^{-1}$, em seguida multiplicando as desigualdades resultantes por α_i e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r, encontra-se

$$\begin{aligned}&PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PBK(\alpha) - K(\alpha)^T B^T P\\ &\quad + 2\beta P + \left[\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i K_i^T SK_i + R\right] < 0. \quad (9)\end{aligned}$$

A partir da lei de controle (2), e sabendo que o mínimo em um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto, observe que

$$\begin{aligned}&-2x(t)^T PBK_\varphi x(t) + x(t)^T K_\varphi^T SK_\varphi x(t) \leqslant\\ &\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \left[-2x(t)^T PBK_i x(t) + x(t)^T K_i^T SK_i x(t)\right]. \quad (10)\end{aligned}$$

Considerando o índice de desempenho J dado em (3) e somando $x(t)^T \left(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + R + 2\beta P\right) x(t)$ a ambos os lados da inequação (10), tem-se

$$\dot{V}_\varphi + 2\beta x(t)^T Px(t) + H_\varphi < \dot{V}_\alpha + H_\alpha + 2\beta x(t)^T Px(t), \quad (11)$$

sendo $\dot{V}_\varphi = x(t)^T [PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PBK_\varphi - K_\varphi^T B^T P] x(t)$, $H_\varphi = x(t)^T \left(R + K_\varphi^T SK_\varphi\right) x(t)$, $\dot{V}_\alpha = x(t)^T [PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PBK(\alpha) - K(\alpha)^T B^T P] x(t)$, $H_\alpha = x(t)^T \left(R + \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i K_i^T SK_i\right) x(t)$.

A partir de (9), tem-se que, para $x(t) \neq 0$, $\dot{V}_\alpha + H_\alpha + 2\beta x(t)^T Px(t) < 0$. Então, considerando (11), segue que, para $x(t) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\dot{V}_\varphi + H_\varphi + 2\beta x(t)^T Px(t) &< 0\\ \dot{V}_\varphi + 2\beta x(t)^T Px(t) &< -H_\varphi. \quad (12)\end{aligned}$$

Observando que R e S são matrizes definidas positivas, segue de (12) que $\dot{V}_\varphi < -2\beta x(t)^T Px(t)$, condição suficiente para a estabilidade do sistema (1) e (2) com taxa de decaimento maior ou igual a β (Boyd et al., 1994). De (12) e sabendo que $P > 0$, segue que $\dot{V}_\varphi < -H_\varphi$. Desta observação, integrando ambos os lados de 0 a ∞ e usando que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, pois o sistema em malha fechada é estável, considerando (3), tem-se

$$J < x(0)^T Px(0) = V_\varphi(x(0)). \quad (13)$$

Além disso, multiplicando (6b) por λ_j e somando de $j = 1$ até n_0 e depois aplicando o complemento de Schur com relação à segunda linha e coluna, para $x(0) \in \mathscr{X}$ apresentado em (4), encontra-se

$$\gamma \geqslant x(0)^T Px(0). \quad (14)$$

A partir de (13) e (14), garante-se que $J < \gamma$ para todo $x(0) \in \mathscr{X}$, finalizando a prova. □

2.2 *Lei de controle com um único ganho de realimentação*

Considere agora a lei de controle

$$u(t) = -Kx(t), \quad (15)$$

$K \in \Re^{n_u \times n_x}$, que pode ser vista como um caso particular da lei de controle (2). Para esta estratégia de controle é formalizado o seguinte corolário.

Corolário 1 *Considere um sistema incerto descrito por* (1) *e seja o índice de desempenho J em* (3) *com* $0 < R \in \Re^{n_x \times n_x}$ *e* $0 < S \in \Re^{n_u \times n_u}$. *Suponha a existência de uma matriz simétrica* $0 < X \in \Re^{n_x \times n_x}$, *uma matriz* $M \in \Re^{n_u \times n_x}$ *e escalares* $\gamma > 0$ *e* $\beta > 0$, *tais que*

$$\begin{bmatrix}\Phi & X & M^T\\ X & -R^{-1} & 0\\ M & 0 & -S^{-1}\end{bmatrix} < 0, \quad (16a)$$

e (6b), *sendo* $\Phi = A_i X + XA_i^T - BM - M^T B^T + 2\beta X$, *sejam satisfeitas para todo* $i \in \mathbb{I}_{n_r}$ *e* $j \in \mathbb{I}_{n_0}$. *Então a lei de controle* (15) *sendo* $K = MX^{-1}$ *torna o sistema incerto* (1) *assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a* β. *Nestas condições, também garante-se índice de desempenho* $J < \gamma$ *para todo* $x(0) \in \mathscr{X}$ *em* (4).

Prova: Considere como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$, $0 < P = P^T \in \Re^{n_x \times n_x}$. A partir de (1) e (15), tem-se ao longo da trajetória de estado do sistema que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) = x(t)^T &\left[PA(\alpha) + A(\alpha)^T P\right.\\ &\left. - PBK - K^T B^T P\right] x(t). \quad (17)\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que as condições no Corolário 1 sejam satisfeitas, então aplicando o complemento de Schur duas vezes com relação à ultima linha e coluna de (16a), encontra-se

$$\begin{bmatrix}\Phi + M^T SM & X\\ X & -R^{-1}\end{bmatrix} < 0,$$
$$\Phi + M^T SM + XRX < 0, \quad (18)$$

sendo $\Phi = A_i X + X A_i^T - BM - M^T B^T + 2\beta X$. Pré- e pós-multiplicando a segunda LMI em (18) por $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis $P = X^{-1}$ e $K = MX^{-1}$, em seguida multiplicando as desigualdades resultantes por α_i e fazendo a soma de $i = 1$ até n_r, encontra-se

$$PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - PBK - K^T B^T P + 2\beta X + K^T SK + R < 0. \quad (19)$$

Sabendo que $u(t) = -Kx(t)$ tem-se $x(t)^T Rx(t) + u(t)^T Su(t) = x(t)^T \left[R + K^T SK\right] x(t)$. Então pré- e pós-multiplicando (19) por $x(t)^T$ e $x(t)$, respectivamente, e considerando (17), encontra-se

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta x(t)^T Px(t) + x(t)^T \left[R + K^T SK\right] x(t) < 0. \quad (20)$$

Observando que R e S são matrizes definidas positivas, segue de (20) que $\dot{V}(x(t)) < -2\beta x(t)^T Px(t)$, condição suficiente para a estabilidade do sistema (1) e (15) com taxa de decaimento maior ou igual a β (Boyd et al., 1994). Sabendo que $P > 0$, segue de (20) que $\dot{V}(x(t)) < -x(t)^T \left[R + K^T SK\right] x(t)$. Assim, integrando ambos os lados de 0 a ∞, e usando que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, tem-se, para o índice de desempenho J dado em (3), que

$$J < x(0)^T Px(0). \quad (21)$$

Além disso, da prova do Teorema 1, se (6b) for satisfeita, então $\gamma \geqslant x(0)^T Px(0)$. Portanto, de (21) garante-se que $J < \gamma$ para todo $x(0) \in \mathscr{X}$, finalizando a prova. □

2.3 Considerações relevantes

Observação 1 *A condição LMI* (16a) *para o projeto da lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ é um caso particular de* (6a) *para $M_i = M$. Deste modo, o conjunto de soluções das condições do Corolário 1 é um subconjunto do cojunto de soluções das condições do Teorema 1.*

Observação 2 *Apesar das condições do Teorema 1 e do Corolário 1 considerarem sistemas lineares com incertezas politópicas, as condições destes podem ser facilmente adaptadas para o projeto de controle de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy T-S. Estes modelos descrevem sistemas não lineares como uma combinação convexa de modelos locais conhecidos ponderados por funções de pertinência variáveis no tempo (Takagi and Sugeno, 1985; Taniguchi et al., 2001). Esta fácil adaptação decorre do fato das incertezas/funções de pertinência não serem utilizadas na composição da lei de controle chaveada* (2).

Observação 3 *Para minimizar o índice J dado em* (3) *em um conjunto $\mathscr{X}$ dado em* (4), *definida uma taxa de decaimento $\beta > 0$, basta resolver os problemas de otimização*

$$\min_{X,\, M_i} \ \gamma \quad s.a. \quad 0 < \gamma, \ e \ (6), \quad (22)$$

considerando a lei de controle chaveada (2), *e*

$$\min_{X,\, M} \ \gamma \quad s.a. \quad 0 < \gamma, \ (16a) \ e \ (6b), \quad (23)$$

considerando a lei de controle (15).

3 A estrutura variável do controle baseado na função mínimo

A lei de controle (2), baseada na função mínimo, pode ser vista como uma lei de controle de estrutura variável recursiva. Para isto, é preciso observar como o mínimo em um conjunto de números reais pode ser calculado através da função sinal, utilizando a recursividade da função mínimo.

Lema 1 (Alves et al., 2016b**)** *O mínimo entre dois números reais pode ser calculado por*

$$m_i = \min\{a_1, a_2\} = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \operatorname{sgn}(a_2 - a_1). \quad (24)$$

Prova: (Alves et al., 2016b) A prova será feita por casos:

- Se $a_1 < a_2 \Rightarrow a_1 - a_2 < 0$:
$$m_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}(+1) = a_1;$$
- Se $a_2 < a_1 \Rightarrow a_1 - a_2 > 0$:
$$m_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}(-1) = a_2;$$
- Se $a_2 = a_1 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0$:
$$m_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{0}{2}(0) = a_1 = a_2.$$

□

Observação 4 (Alves et al., 2016b**)** *O mínimo em um conjunto com n elementos pode ser calculado utilizando a equação* (24), *observando que*

$$\min\{U_1, U_2, \cdots, U_n\} = \min\{U_n, \min\{U_1, \cdots, U_{n-1}\}\}, \quad (25)$$

ou seja, o mínimo pode ser calculado recursivamente.

Por exemplo, suponha que foram projetados 4 ganhos de realimentação K_i, $i \in \mathbb{I}_4$. Assim, o ganho K_φ tal que $x(t)^T\{-2PBK_\varphi + K_\varphi^T SK_\varphi\}x(t) = \min_{i\in\mathbb{I}_4}\{-2x(t)^T PBK_i x(t) + x(t)^T K_i^T SK_i x(t)\}$ pode ser calculado recursivamente usando (25), sendo $U_i = x(t)^T\{-2PBK_i + K_i^T SK_i\}x(t)$, como segue:

$$\begin{aligned} K_\varphi^2 &= \tfrac{(K_2+K_1)}{2} + \tfrac{(K_1-K_2)}{2} \operatorname{sgn}(U_2 - U_1); \\ K_\varphi^3 &= \tfrac{(K_3+K_\varphi^2)}{2} + \tfrac{(K_\varphi^2-K_3)}{2} \operatorname{sgn}(U_3 - \min\{U_1, U_2\}); \\ K_\varphi^4 &= \tfrac{(K_4+K_\varphi^3)}{2} + \tfrac{(K_\varphi^3-K_4)}{2} \operatorname{sgn}(U_4 - \min\{U_1, U_2, U_3\}); \\ u_\varphi(t) &= -K_\varphi^4 x(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Esta recursividade é ilustrada no esquema mostrado na Figura 1. Observe que o resultado de um cálculo é utilizado no próximo cálculo, e assim por diante até o cálculo do último ganho K_φ^r, sendo ele associado ao mínimo do conjunto $\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$.

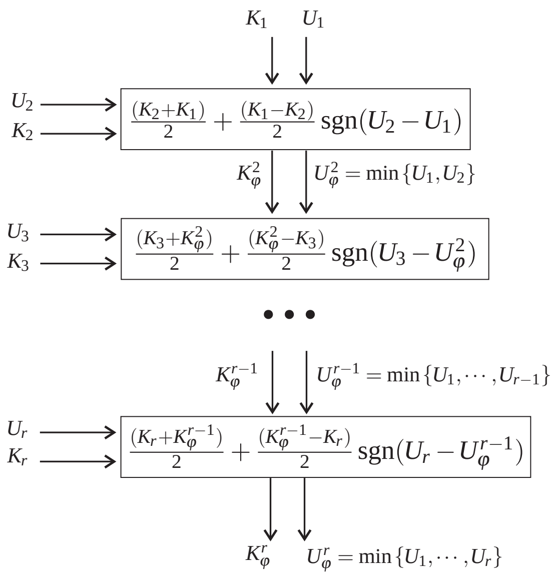

Figura 1: Estrutura para obtenção do ganho K_φ^r associado ao mínimo do conjunto $\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$, utilizando a função sinal.

4 Exemplo numérico

Considere o sistema dinâmico descrito por (1), com matrizes dadas por (Souza et al., 2013)

$$[A_1 \mid A_2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 35 & -93 & 0 & 35 & -36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]; \quad (27a)$$

$$[A_3 \mid A_4] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 1 & 1 & 13 & 1 & 1 \\ 0 & 35 & -93 & 0 & 35 & -36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]; \quad (27b)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27c)$$

sendo $n_x = 3$, $n_r = 4$ e $n_u = 1$.

Adotou-se uma taxa de decaimento desejada de $\beta = 0{,}17$, o conjunto de condições iniciais de interesse $\mathscr{X}$ em (4) com $\chi_1 = [0{,}1\ 0\ 0]^T$, $\chi_2 = [0\ 0{,}1\ 0]^T$ e $\chi_3 = [0\ 0\ 0{,}1]^T$. Também o índice de desempenho dado em (3) com

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } S = 0{,}1.$$

Então, resolvendo o problema de otimização (22) (Efberg and Löfberg, 2004; Gahinet et al., 1994) para obter os parâmetros da lei de controle chaveada (2), encontraram-se $\gamma = 5{,}4825 \times 10^5$,

$$P = 10^7 \times \begin{bmatrix} 5{,}4262 & 2{,}1619 & -5{,}4542 \\ 2{,}1619 & 0{,}8648 & -2{,}1731 \\ -5{,}4542 & -2{,}1731 & 5{,}4823 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2{,}7966 & -1{,}1236 & 2{,}8184 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2{,}7956 & -1{,}1232 & 2{,}8174 \end{bmatrix},$$
$$K_3 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2{,}7968 & -1{,}1237 & 2{,}8186 \end{bmatrix},$$
$$K_4 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2{,}7949 & -1{,}1229 & 2{,}8167 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo, com os mesmos parâmetros, o problema de otimização (23) (Efberg and Löfberg, 2004; Gahinet et al., 1994) para a lei de controle (15), encontraram-se $\gamma = 7{,}5402 \times 10^5$ e

$$P = 10^7 \times \begin{bmatrix} 7{,}1524 & 2{,}8556 & -7{,}1939 \\ 2{,}8556 & 1{,}1429 & -2{,}8722 \\ -7{,}1939 & -2{,}8722 & 7{,}2358 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2{,}7877 & -1{,}1189 & 2{,}8086 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, conseguiu-se diminuir o limitante para o custo quadrático dado em (3) em $2{,}0578 \times 10^5$ ao se utilizar o controle chaveado (2) no lugar da lei de controle (15).

Nas Figuras 2-3 e 4-6 apresentam-se resultados de simulação para o vértice 4 do sistema (1) e (27) em malha fechada para ambas as leis de controle não chaveada (15) e chaveada (2), respectivamente, sendo escolhida a condição inicial $x(0) = [0{,}1\ 0\ 0]^T$. Como é possível observar comparando as Figuras 2 e 4, o comportamento das variáveis de estado se mostram semelhantes, com oscilações transitórias e posterior convergência do estado para a origem. Destaca-se o chaveamento na escolha dos ganhos de realimentação determinados por $\varphi(x(t))$ mostrado na Figura 6.

Sendo assim, a principal vantagem controle chaveado comparado à utilização de um único ganho de realimentação, nesta aplicação, seria a diminuição do custo garantido do índice de desempenho. Neste sentido, na Figura 7 são comparadas as evoluções temporais dos índices de desempenho calculados nestas simulações. Observe que ambos os índices foram abaixo dos limitantes encontrados numericamente e que o índice calculado com o uso do controle chaveado (2), para este caso, foi menor do que o índice calculado com o uso da lei de controle (15).

Na Figura 8 apresentam-se algumas trajetórias de estado para o vértice 2 do sistema (1) e (27) em malha fechada com a lei de controle chaveada (2), tendo diferentes condições iniciais. Diferente do que acontece com as trajetórias de estado obtidas na simulação do caso anterior, na Figura 8 observa-se que, neste caso, houve a presença de modos deslizantes. Um estudo sobre as condições em que isto pode ocorrer para sistemas realimentados com controle chaveado é tema de estudos em próximas pesquisas.

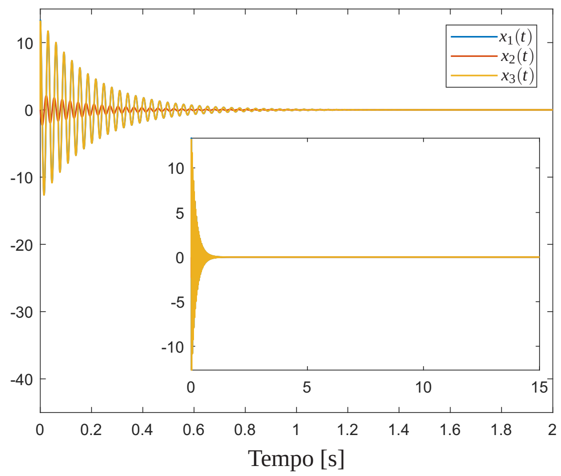

Figura 2: Variáveis de estado para o sistema em malha fechada com a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ (15).

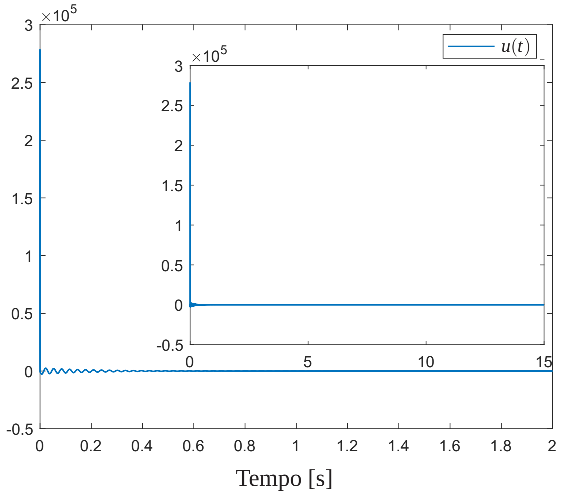

Figura 3: Sinal de controle para o sistema em malha fechada com a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ (15).

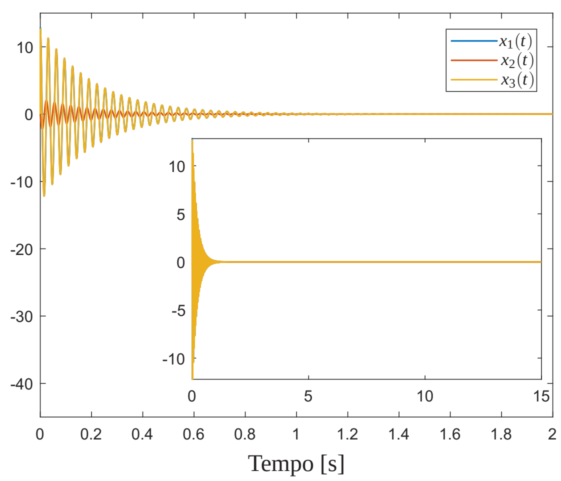

Figura 4: Variáveis de estado para o sistema em malha fechada com a lei de controle chaveada $u(t) = -K_\varphi x(t)$ (2).

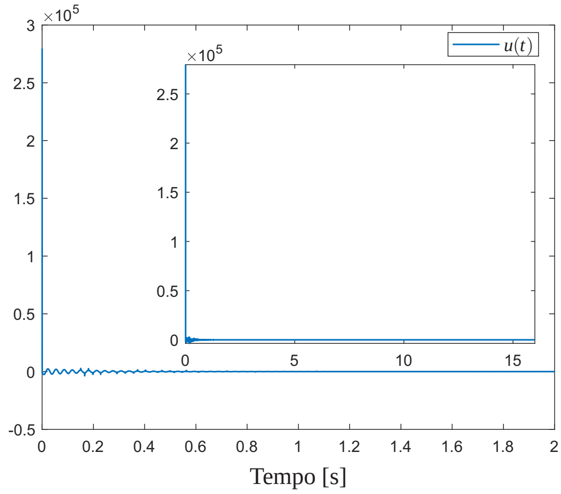

Figura 5: Sinal de controle para o sistema em malha fechada com a lei de controle chaveada $u(t) = -K_\varphi x(t)$ (2).

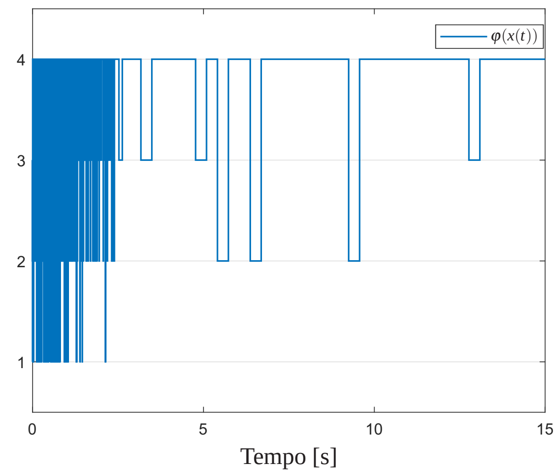

Figura 6: Lei de chaveamento $\varphi(x(t))$ para o sistema em malha fechada com a lei de controle chaveada $u(t) = -K_\varphi x(t)$ (2).

5 Conclusões

O controle chaveado pode ser utilizado na estabilização de sistemas lineares e não lineares, quando estes estão descritos por modelos fuzzy T-S (combinação convexa de modelos locais conhecidos), de modo a melhorar índices de desempenho. Neste artigo foram apresentadas condições LMIs para o projeto de controle chaveado para a minimização de custo quadrático. O uso das LMIs permite tratar de maneira conveniente incertezas politópicas e índices de desempenho. O cálculo do mínimo envolvido nas leis de controle chaveadas pode ser realizado através da função sinal, de maneira recursiva (Seção 3). Isto sugere uma estrutura variável nas leis de controle chaveadas baseadas na função mínimo, o que pode gerar modos deslizantes no sistema em malha fechada, como pode ser observado na Figura 8. Embora o projeto do controlador seja baseado no uso da função sinal, a ocorrência de modos deslizantes e as consequências da utilização da função sinal de forma recursiva necessitam de melhor formalização teórica. Desta perspectiva, novos estudos devem ser realizados de modo a analisar a presença de modos deslizantes nestas leis de controle.

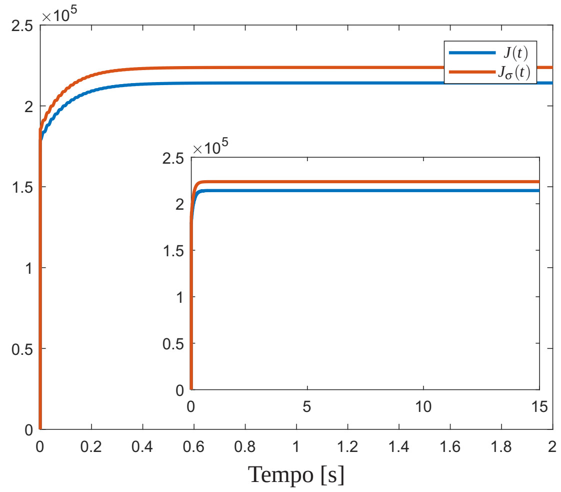

Figura 7: Comparação entre os índices $J(t) = \int_0^t x(\tau)^T Rx(\tau) + u(\tau)^T Su(\tau) \quad d\tau$ e $J_\varphi(t) = \int_0^t x(\tau)^T Rx(\tau) + u_\varphi(\tau)^T Su_\varphi(\tau) \quad d\tau$, para o sistema em malha fechada com as leis de controle (15) e (2), respectivamente.

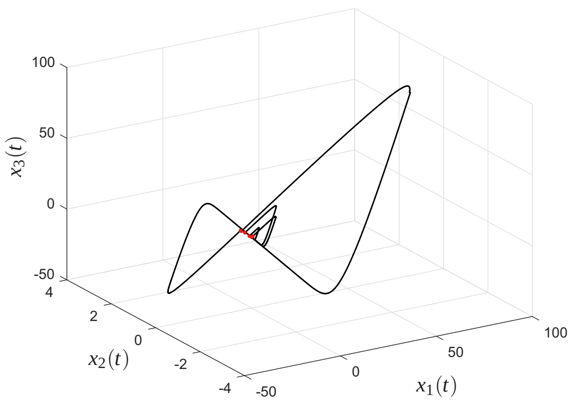

Figura 8: Trajetórias de estado para diferentes condições iniciais (marcadas por pontos vermelhos) do sistema em malha fechada com lei de controle $u(t) = -K_\varphi x(t)$ (2).

Agradecimentos

Os autores agradecem às agências financiadoras CNPq, CAPES e FAPESP.

Referências

Alves, U. N. L. T., Garcia, J. P. F., Teixeira, M. C. M., Garcia, S. C. and Rodrigues, F. B. (2014). Sliding mode control for active suspension system with data acquisition delay, *Mathematical Problems in Engineering* **2014**: 13.

Alves, U. N. L. T., Teixeira, M. C. M., de Oliveira, D. R., Cardim, R. and Assunção, E. (2016a). Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance, *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS - FUZZ-IEEE*, IEEE, Vancouver, pp. 2212–2219.

Alves, U. N. L. T., Teixeira, M. C. M., de Oliveira, D. R., Cardim, R., Assunção, E. and Souza, W. A. (2016b). Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **30**(8-10): 1408–1433.

Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Vol. 15, SIAM, Philadelphia.

Caun, R. d. P., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and Caun, A. d. P. (2018). LQR-LMI control applied to convex-bounded domains, *Cogent Engineering* **5**(1).

de Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Alves, U. N. L. T., de Souza, W. A., Assunção, E. and Cardim, R. (2018). On local $\mathscr{H}_\infty$ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions, *Fuzzy Sets and Systems* **344**: 1 – 26.

Decarlo, R. A., Zak, S. H. and Matthews, G. P. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial, *Proceedings of the IEEE* **76**(3): 212–232.

Efberg, J. and Löfberg, J. (2004). YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *CACSD CONFERENCE*, IEEE, Taipei, pp. 284–289.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1994). The LMI control toolbox, *IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, Vol. 3, IEEE, Lake Buena Vista, pp. 2038–2041.

Hung, J. Y., Gao, W. and Hung, J. C. (1993). Variable structure control: a survey, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **40**(1): 2–22.

Ogata, K. (2010). *Engenharia de controle moderno*, 5 edn, Pearson Prentice Hall, São Paulo.

Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **22**(6): 1720–1727.

Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Santim, M. P. A., Cardim, R. and Assunção, E. (2013). On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties, *Mathematical Problems in Engineering* **2013**(1): 1–10.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *Systems Man And Cybernetics, IEEE Transactions on* **15**(1): 116–132.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* **9**(4): 525–538.

Teixeira, M. C. M., Silva, N. A. P., Assunção, E. and Machado, E. R. M. D. (2006). Design of fuzzy regulators with optimal initial conditions compensation, *2006 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS*, IEEE, Vancouver, pp. 84–91.

Young, K. D., Utkin, V. I. and Ozguner, U. (1996). A control engineer's guide to sliding mode control, *Variable Structure Systems, 1996. VSS '96. Proceedings., 1996 IEEE International Workshop on*, pp. 1–14.