

SOLUÇÕES DE CARATHÉODORY E DE FILIPPOV EM SISTEMAS LINEARES COM COMUTAÇÃO

JOSÉ C. GEROMEL*, PATRIZIO COLANERI†, LIU HSU‡

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP
Campinas, Brasil*

†*Instituto Politécnico de Milão
Milão, Itália*

‡*Programa de Engenharia Elétrica - COPPE / UFRJ
Rio de Janeiro, Brasil*

Emails: geromel@dsce.fee.unicamp.br, patrizio.colaneri@polimi.it, liu@coep.ufrj.br

Abstract— Global stability analysis of continuous-time switched linear systems with special emphasis to those controlled by a *min-type* switching function is addressed. For this class of discontinuous dynamical systems, the existence and uniqueness of Carathéodory and Filippov solutions with respect to all initial conditions are investigated in an original way. As a new result, it is shown that whenever a sliding motion occurs, the corresponding Filippov solution is unique and converges to the equilibrium point of the closed-loop switched system. As a consequence, global asymptotical stability of the unique equilibrium point (the origin) is established. Interpretations of this result relying on control Lyapunov function and measurement noise are provided. Illustrations by means of a second-order example including phase portraits are discussed.

Keywords— Switched linear systems, stability analysis, sliding motions.

Resumo— Uma análise de estabilidade global de sistemas lineares com comutação em tempo contínuo é apresentada, com ênfase especial àqueles controlados por uma função de comutação do tipo *min*. Em tais sistemas dinâmicos descontínuos, a existência e unicidade das soluções de Carathéodory e Filippov em relação a todas as condições iniciais são investigadas de modo original. Como um resultado novo, é mostrado que sempre que ocorre um modo deslizante, a solução de Filippov correspondente é única e converge para o ponto de equilíbrio do sistema com comutação em malha fechada. Em consequência, a estabilidade assintótica global do único ponto de equilíbrio (a origem) é estabelecida. Interpretações deste resultado baseadas em uma função de Lyapunov de controle e na presença de ruído de medição são formuladas. Ilustrações por meio de um exemplo de segunda ordem, incluindo retratos de planos de fase, são discutidas.

Palavras-chave— Sistemas lineares com comutação, análise de estabilidade, modos deslizantes.

1 Introdução

Os sistemas com comutação têm recebido muita atenção nas últimas décadas. Em particular, importantes esforços de pesquisa foram dedicados a sistemas lineares com comutação em tempo contínuo, produzindo novos resultados em análise e síntese de controle no âmbito da estabilidade e otimização de desempenho. A este respeito, cabe mencionar o interessante e bastante completo livro de Liberzon (2003) e os artigos (DeCarlo et al., 2000), (Liberzon and Morse, 1999). Além disso, a análise de estabilidade e as condições de projeto de controle com comutação, a maioria delas expressas por restrições matriciais convexas, foram relatadas em (Galbusera et al., 2012), (Geromel and Colaneri, 2006), (Geromel et al., 2008), (Heemels and Weiland, 2008), (Heemels et al., 2017) e (Johansson and Rantzer, 1998) entre muitos outros. Duas classes de funções de comutação são as mais relevantes. A primeira é caracterizada pelo fato de que o sinal de comutação depende do tempo sendo geralmente provido por um nível de controle de malha aberta mais elevado, (Hespanha and Morse, 2002). A segunda é composta por sinais de controle em malha fechada sintetizados via

realimentação de estado ou de saída de tal forma a garantir estabilidade assintótica global e melhoria de desempenho, vide (Geromel et al., 2008) e suas referências.

Este artigo trata da análise de estabilidade de sistemas lineares com comutação em tempo contínuo, com sinais de comutação pertencentes à segunda classe, i.e., gerados por realimentação de estado. Mostra-se aqui que a estratégia de comutação do tipo *min* que resulta de uma solução factível das chamadas desigualdades de Lyapunov-Metzler, introduzidas em (Geromel et al., 2008), torna a origem um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Esta importante propriedade engloba outras disponíveis na literatura, vide por exemplo (Johansson and Rantzer, 1998), onde apenas soluções tipo Carathéodory são levadas em conta. Aqui, nós vamos além, provando a estabilidade global mesmo na presença de modos deslizantes caracterizados como soluções do tipo Filippov. Este tópico específico é abordado no livro seminal de Filippov (1988) e nos artigos de Dieci and Lopez (2009), Hsu et al. (2000) e Polycarpou and Ioannou (1993). Os resultados teóricos são ilustrados através de um exemplo simples tirado de (Heemels and Weiland, 2008).

A notação principal é a seguinte. Para vetores ou matrizes reais, $(\cdot)'$ refere-se à sua transposta. Os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{K}$ denotam os conjuntos de números reais, reais não-negativos e $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$, respectivamente, sendo $N \geq 1$ um número inteiro finito. Para uma matriz simétrica, $X > 0$ ($X \geq 0$) indica que ela é positiva (semi-)definida. A norma euclidiana de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é denotada por $\|x\|$. Para matrizes, $\|\cdot\|$ indica a norma Euclidiana induzida. O simplex unitário $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ é composto por todos os vetores não negativos cuja soma de todas as suas componentes é igual a um.

2 Sistemas lineares com comutação

Considere um sistema linear com comutação com a seguinte representação de estado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (1)$$

onde $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o estado e $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ é a função de comutação que seleciona em cada instante de tempo $t \in \mathbb{R}_+$ um subsistema $i \in \mathbb{K}$ para se tornar ativo, ademais $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para todo $i \in \mathbb{K}$. O sistema (1) é governado por uma equação diferencial com o lado direito descontínuo, profundamente estudada no célebre livro de A. Filippov (Filippov, 1988) e em muitas outras referências interessantes e úteis, como por exemplo, (Dieci and Lopez, 2009) e (Polycarpou and Ioannou, 1993). O presente artigo tem dois objetivos principais. Em relação a (1), é realizada a análise da existência, unicidade e caracterização de uma solução em um sentido preciso, para qualquer condição inicial dada $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e da estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio único $x_{eq} = 0$. As definições das soluções do tipo Carathéodory e Filippov, bem como as condições de existência e unicidade, são aquelas adotadas em (Polycarpou and Ioannou, 1993).

Dependendo da natureza da função de comutação $\sigma(\cdot)$, diferentes classes de soluções de (1) devem ser consideradas. Na verdade, a comutação em *malha aberta* surge quando $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função que varia de forma independente do estado. Neste caso, (1) torna-se um sistema linear variante no tempo cuja solução $\varphi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\dot{\varphi}(t) = A_{\sigma(t)}\varphi(t)$, $\varphi(0) = x_0$ é do tipo Carathéodory desde que $\sigma(t)$ seja contínua em quase todos os pontos, ou seja, somente pontos isolados de descontinuidade são permitidos. A equação diferencial (1) tem o lado direito descontínuo, mas a linearidade por partes assegura a existência e a unicidade de uma solução do tipo Carathéodory, vide (Polycarpou and Ioannou, 1993).

Por outro lado, a comutação em *malha fechada* é caracterizada por $\sigma(t) = u(x(t))$ com $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ sendo uma função dependente do estado. Devido à possibilidade de comutação com taxa infinita, a suposição de continuidade (quase

em todos os pontos) falha e um tipo mais geral de caracterização de trajetória que permanece na superfície de descontinuidade deve ser aplicado. Para tal, observe-se que o sistema de malha fechada pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \text{ sempre que } x(t) \in \Sigma_i \quad (2)$$

onde Σ_i , $i \in \mathbb{K}$ são conjuntos disjuntos cuja união é igual a $\mathbb{R}^n$. Existem várias possibilidades a serem levadas em conta. Dentro de Σ_i para alguns $i \in \mathbb{K}$, ou seja, fora de uma superfície de descontinuidade, essa parte da solução existe, é única e do tipo Carathéodory. O mesmo é verdadeiro se uma trajetória atingir e cruzar uma superfície de descontinuidade. De acordo com Polycarpou and Ioannou (1993), para essas trajetórias chamadas *modos de comutação regulares*, as soluções de Carathéodory e Filippov são equivalentes. Outra possibilidade é que o campo vetorial definido por $f_i = A_i x$, $i \in \mathbb{K}$, juntamente com os conjuntos Σ_i , force as trajetórias a permanecerem na variedade suave de comutação Σ , de dimensão no máximo $n-1$ (no caso geral), definida pelas bordas de Σ_i e Σ_j para alguns $j \neq i \in \mathbb{K}$. Esse comportamento é chamado de *modo deslizante* e não pode ser caracterizado por uma solução do tipo Carathéodory. No caso particular de dois subsistemas, seguindo a definição de Filippov (1988), o modo deslizante pode ser caracterizado por uma solução do tipo Carathéodory de

$$\dot{x} = (\lambda_i(x)A_i + \lambda_j(x)A_j)x \quad (3)$$

na qual os pesos da combinação convexa λ_i e λ_j são calculados para que a trajetória permaneça confinada em Σ . Finalmente, para completar, precisamos analisar a última possibilidade referenciada, em (Polycarpou and Ioannou, 1993), como *caso não genérico*. O campo vetorial definido por $f_i = A_i x$, $i \in \mathbb{K}$, juntamente com os conjuntos Σ_i , força as trajetórias a se afastarem da variedade de comutação Σ , o que significa que uma trajetória pode começar em $t = 0$, na variedade Σ porém nunca chegar nela a partir de $x(0) \notin \Sigma$. Como será discutido mais adiante, este caso é controverso e é a questão principal a ser aprofundadamente esclarecida no contexto de sistemas lineares com comutação.

Por ora, vamos sintetizar uma estratégia global de controle dependente do estado para o sistema linear com comutação (1). Para tal, se existir um conjunto de matrizes positivas definidas $P_i > 0$ e uma matriz do tipo Metzler $\Pi = \{\pi_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com $\pi_{ij} \geq 0$ para todos os $j \neq i$ e com a normalização $\sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} = 0$ para todos os $i \in \mathbb{K}$, satisfazendo as chamadas desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4)$$

então definindo as funções quadráticas $v_i(x) = x'P_i x$ para todo $i \in \mathbb{K}$, a estratégia de controle $\sigma(t) = u(x(t))$ com

$$u(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v_i(x) \quad (5)$$

assegura estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$. Esta importante propriedade decorre da adoção da função Lyapunov quadrática radialmente ilimitada

$$V(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} v_i(x) \quad (6)$$

associada ao sistema em malha fechada. Foi provado em (Liberzon, 2003) para $N = 2$ e em (Geromel and Colaneri, 2006) para N arbitrário que esta propriedade permanece válida mesmo na eventual ocorrência de modos deslizantes. Em outras palavras, sempre que ocorrer um modo deslizante, a solução associada do tipo Filippov converge para o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$. É importante mencionar que, no contexto de estabilidade, as soluções do tipo Filippov pertencentes ao caso *não genérico* ainda devem ser analisadas.

Definindo o conjunto $I(x) = \{j : x'P_j x = V(x), j \in \mathbb{K}\}$ então, sem perda de generalidade, a estratégia de controle de comutação dada em (5) é denotada como $u(x) = \kappa = \min\{i : i \in I(x)\}$. Este é um mapeamento que impõe um resultado único para $u(x)$, mesmo que o conjunto $I(x)$ contenha vários índices diferentes, isto é, quando tiver cardinalidade maior do que um. Como resultado, qualquer variedade de comutação Σ previamente definida pode ser alternativamente visualizada como o conjunto de $x \in \mathbb{R}^n$ em que a cardinalidade de $I(x)$ é maior do que um.

3 Análise de estabilidade

Esta seção é inteiramente dedicada à análise de estabilidade do sistema linear com comutação em malha fechada (1) governado pela função de comutação (5). Para tal, vamos considerar a função de Lyapunov quadrática por partes (6) que é radialmente ilimitada, contínua, mas não necessariamente diferenciável em todos os pontos do seu domínio. A derivada direcional unilateral pode ser determinada para qualquer par $(x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De fato, a partir do Teorema de Danskin, segue-se que

$$\begin{aligned} D_+ V(x, d) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(x + \varepsilon d) - V(x)}{\varepsilon} \\ &= \min_{j \in I(x)} \nabla v_j(x)' d \end{aligned} \quad (7)$$

Claramente, se o conjunto $I(x)$ tem um único elemento, então a linearidade de $D_+ V(x, d)$ em relação a $d \in \mathbb{R}^n$ indica que $V(x)$ é diferenciável. Por outro lado, se $I(x)$ possui vários elementos, então esta propriedade importante, em geral, não

é válida. Em qualquer caso, a derivada direcional unilateral é central nos próximos cálculos. De fato, supondo que $(x(t), \sigma(t)) = (x, \kappa) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ em um instante de tempo arbitrário $t \in \mathbb{R}_+$, a derivada de Dini de $V(x(t))$ ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema com comutação em malha fechada (1) governado pelo controle (5) segue de (7), isso é

$$\begin{aligned} D_+ V(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(x(t + \varepsilon)) - v(x)}{\varepsilon} \\ &= D_+ V(x, A_\kappa x) \\ &= \min_{j \in I(x)} \nabla v_j(x)' A_\kappa x \end{aligned} \quad (8)$$

Observe que, como consequência direta do Teorema de Danskin, vide (Lasdon, 1970), a função $V(x)$ definida em (6) é tal que $\limsup$ e $\liminf$ para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ coincidem. Por esta razão, a derivada de Dini $D_+ V(x)$, como definida em (8), pode ser expressa diretamente em termos da derivada direcional unilateral (veja também (Galbusera et al., 2012) para mais detalhes). Este é um importante resultado instrumental a ser aplicado em todos os casos tratados no que segue.

3.1 Modos de comutação regulares

Vamos aqui dirigir nossa atenção para o cálculo da derivada de Dini da função de Lyapunov candidata ao longo de uma trajetória arbitrária de (1). Para tal, considere-se novamente o par $(x(t), \sigma(t)) = (x \neq 0, \kappa) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ em um instante arbitrário de tempo $t \in \mathbb{R}_+$ e observe que um modo de comutação regular é caracterizado por $\{\kappa\} \subseteq I(x)$ onde $I(x)$ é, em geral, um conjunto com um único elemento, mas nem sempre. O conjunto $I(x)$ pode ser deste tipo em qualquer região do espaço de estado, mas em pontos isolados onde a trajetória cruza Σ . Como consequência, um modo de comutação regular é sempre caracterizado por uma solução do tipo Carathéodory. Neste caso, adotando $V(x)$ como sendo a função Lyapunov juntamente com (8), obtém-se

$$\begin{aligned} D_+ V(x) &= \min_{j \in I(x)} \nabla v_j(x)' A_\kappa x \\ &\leq 2x' P_\kappa A_\kappa x \\ &< - \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{j\kappa} x' P_j x \\ &\leq - \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{j\kappa} \right) x' P_\kappa x = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

onde levamos em conta que $\kappa = u(x) \in I(x)$, as desigualdades de Lyapunov-Metzler (4) são estritas e que Π é Metzler. A conclusão é que existe $\epsilon > 0$ tal que $D_+ V(x) < -\epsilon \|x\|^2$ para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ o que significa que $D_+ V(x) < -\eta V(x)$ com $\eta = \epsilon / \min_{i \in \mathbb{K}} \|P_i\|$ para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, os modos de comutação regulares, caracterizados por soluções do tipo Carathéodory, convergem para o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$.

3.2 Modos deslizantes

Primeiramente, neste caso, temos que considerar que $I(x)$ contém vários elementos, o que significa que, em geral, a função de Lyapunov $V(x)$ não é diferenciável. Assumindo que $(x(t), \sigma(t)) = (x \neq 0, \kappa) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ em um instante de tempo arbitrário $t \in \mathbb{R}_+$, a derivada de Dini da função de Lyapunov ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema de comutação de malha fechada é dada por (8). No entanto, quando ocorre um modo deslizante, a solução correspondente deve ser caracterizada como uma solução do tipo Filippov. Seguindo Filippov (1988) e a discussão fornecida na seção anterior, a noção de solução de Filippov aplicada à equação diferencial com o lado direito descontínuo (1), indica que, no caso de um modo deslizante, temos que lidar com a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in \text{co}\{A_i x, i \in J(x)\} \quad (10)$$

onde $\text{co}\{\cdot\}$ denota o contorno convexo de $\{\cdot\}$ e $J(x)$ é um subconjunto de $I(x)$. Fazendo isso, estamos simplesmente assumindo a existência eventual de índices em $I(x)$ que não são ativados em um modo deslizante para alguns $x \in \Sigma$. Portanto, em geral, mas nem sempre, a equivalência $J(x) \equiv I(x)$ é válida. Como ficará claro na sequência, o fato de $J(x) \subset I(x)$ tem um grande impacto na análise de estabilidade do sistema linear com comutação em malha fechada (1) governado pela regra de comutação (5).

As condições que caracterizam uma ocorrência de um modo deslizante foram dadas em ((Liberzon, 2003), página 70, equação (3.22)) para o caso $N = 2$ e podem ser generalizadas para lidar com um número arbitrário de subsistemas. De acordo com Polycarpou and Ioannou (1993), um modo deslizante é o resultado de comutações arbitrariamente rápidas entre elementos de $I(x)$. Ou seja, em um instante de tempo arbitrário $t \in \mathbb{R}_+$ e $(x(t), \sigma(t)) = (x \neq 0, \kappa) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ considere o conjunto $J(x)$ como sendo o maior subconjunto de $I(x)$ que contém $\kappa \in I(x)$ e todos os índices $i \in I(x)$ que podem ativar $\kappa \in I(x)$. Em outras palavras, cada elemento $i \neq \kappa \in J(x)$ indica que a transição $i \mapsto \kappa$ é possível. Felizmente, para a regra de comutação específica (5) sob consideração, esta condição é facilmente extraída do conjunto de funções continuamente diferenciáveis $v_i(x)$, $\forall i \in I(x)$, impondo que a desigualdade $\dot{v}_\kappa(x(t))|_{\sigma(t)=i} \leq \dot{v}_i(x(t))|_{\sigma(t)=i}$ se verifique para todo $i \in J(x)$. Levando em conta que as funções $v_i(x)$ têm o mesmo valor $V(x) = v_i(x) = v_\kappa(x)$ para todo $i \in I(x)$, os elementos $i \in J(x)$ são aqueles que satisfazem

$$\nabla v_\kappa(x)' A_i x \leq \nabla v_i(x)' A_i x, i \in I(x) \quad (11)$$

Observe-se que esse conjunto é sempre não vazio, pois, por definição, $\kappa \in J(x)$. Esta é apenas uma condição necessária para a caracterização de um modo deslizante, porque a ocorrência real requer mais do que simplesmente assegurar a existência de índices $i \in J(x)$ capazes de ativar $\kappa \in J(x)$. Como consequência importante, se $J(x)$ determinado desta forma tiver apenas um elemento, um modo deslizante não ocorrerá na região correspondente à variedade de comutação Σ . Finalmente, reescrevendo (10) como

$$\dot{x} = \sum_{i \in J(x)} \lambda_i(x) A_i x \quad (12)$$

onde $\lambda_i(x) \geq 0$ para todo $i \in J(x)$ são os pesos da combinação convexa calculados para que a trajetória permaneça em Σ , seguindo o mesmo caminho anterior temos

$$\begin{aligned} D_+ V(x) &= \min_{j \in I(x)} \nabla v_j(x)' \left(\sum_{i \in J(x)} \lambda_i(x) A_i x \right) \\ &\leq \sum_{i \in J(x)} \lambda_i(x) \nabla v_\kappa(x)' A_i x \\ &\leq \sum_{i \in J(x)} \lambda_i(x) \nabla v_i(x)' A_i x \\ &< - \sum_{i \in J(x)} \lambda_i(x) \left(\sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} x' P_j x \right) \end{aligned} \quad (13)$$

onde usamos o fato de que $\kappa \in J(x) \subseteq I(x)$ e $J(x)$ é composto por índices que satisfazem (11), exclusivamente. A conclusão, como no caso anterior, é que existe $\epsilon > 0$ tal que $D_+ V(x) < -\epsilon \|x\|^2$ ao longo de qualquer solução da inclusão diferencial (10). Isso assegura que qualquer modo deslizante, sempre que ocorrer, converge para o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$. Argumentos semelhantes foram adotados em (Geromel and Colaneri, 2006) onde, sem perda de generalidade, uma vez que alguns $\lambda_i(x)$, $i \in \mathbb{K}$ podem ser definidos como zero, o conjunto $I(x)$ foi considerado como composto por todos os índices tais que satisfazem (11), exclusivamente.

3.3 Caso não genérico

Vamos lembrar que, no caso geral, $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de comutação de dimensão no máximo $n - 1$. Já que para qualquer $x \in \Sigma$ devemos ter $I(x)$ com cardinalidade maior do que um, em princípio, devido ao fato de que este caso não é um modo deslizante, não podemos deixar de lado a possibilidade de determinar uma trajetória com comportamento instável caracterizada como uma solução do tipo Filippov, desde que os pesos da combinação convexa (12) sejam calculados de forma que ela permaneça em Σ . Felizmente, essa possibilidade nunca ocorre neste contexto. De

fato, levando-se em consideração a condição necessária para existência de modo deslizante (11), sem perda de generalidade, pode-se afirmar que as trajetórias que compõem um caso não genérico são aquelas para as quais (11) produz o conjunto com um único elemento $J(x) = \{\kappa\}$. Isso significa que a trajetória correspondente permanece em Σ ou se afasta de Σ , mas é sempre caracterizada como uma solução do tipo Carathéodory tal que $D_+V(x) \leq \nabla v_\kappa(x)' A_\kappa x < -\epsilon \|x\|^2$ para algum $\epsilon > 0$ e qualquer $0 \neq x \in \Sigma$. Consequentemente, vide (9), ela converge para o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$.

Uma condição inicial pertencente à variedade de comutação $x_0 \in \Sigma$ é tal que a função de comutação em $t = 0$

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v_i(x_0) \\ &= \min\{i : i \in I(x_0)\} \end{aligned} \quad (14)$$

é determinada de forma única e produz uma solução do tipo Carathéodory. Portanto, nesse caso, a condição inicial $(x(0), \sigma(0)) = (x_0, u(x_0))$ com $x_0 \in \Sigma$ exclui uma solução do tipo Filippov, se houver. Na seção 5, os resultados apresentados até agora são ilustrados por meio de um exemplo de segunda ordem.

4 Interpretações relacionadas

Os resultados anteriores podem ser interpretados no contexto de um projeto feito através de uma função de Lyapunov de controle, na qual um sistema mais geral, em vez de (1), é considerado. Além disso, o mesmo conjunto de resultados permite a determinação de um limite superior válido para todas as trajetórias sempre que o sistema de comutação em malha fechada (1) governado pela estratégia de controle estabilizadora (5) estiver sujeito a medidas contaminadas por incertezas.

4.1 Função de Lyapunov de controle

Em vez de (1) considere-se o sistema politópico que se segue do relaxamento de Filippov-Wazeski

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i \in \mathbb{K}} \mu_i(t) A_i \right) x(t) \quad (15)$$

onde $\mu(t) = [\mu_1(t) \cdots \mu_N(t)]'$ pertence ao simplex unitário Λ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, Liberzon (2003). Adotando novamente a função Lyapunov (6) e denotando $x(t) = x$ em um instante arbitrário de tempo $t \in \mathbb{R}_+$, a lei de controle

$$\mu(t) = \arg \min_{\alpha \in \mathcal{P}(x)} D_+V \left(x, \sum_{i \in \mathbb{K}} \alpha_i A_i x \right) \quad (16)$$

com $\mathcal{P}(x) \subseteq \Lambda$ sendo um conjunto a ser especificado mais adiante, é tal que a derivada de Dini ao

longo de uma trajetória arbitrária do sistema de malha fechada (15) - (16) é

$$D_+V(x) = \min_{\alpha \in \mathcal{P}(x)} \min_{j \in I(x)} 2x' P_j \left(\sum_{i \in \mathbb{K}} \alpha_i A_i x \right) \quad (17)$$

Alguns casos são de interesse. Primeiro, considere $\mathcal{P}(x) \equiv \Lambda$ e observe que (17) produz $D_+V(x) \leq \min_{i \in I(x)} 2x' P_i A_i x$. Segundo, faça $\mathcal{P}(x) = \text{co}\{\Lambda_v\}$ em que Λ_v contenha todos os vértices de Λ correspondentes a $I(x)$. Após cálculos idênticos, temos mais uma vez que $D_+V(x) \leq \min_{i \in I(x)} 2x' P_i A_i x$. O mesmo vale para $\mathcal{P}(x) = \Lambda_v$ mas, neste caso particular, (16) fornece $\mu(t)$ que corresponde a algum $\sigma(t) \in I(x)$. Finalmente, defina $\mathcal{P}(x)$ como o conjunto composto por um vértice arbitrário de $I(x)$. Tomando $\alpha_i = 1$ para $i = \kappa \in I(x)$ e $\alpha_i = 0$ caso contrário, nota-se que $D_+V(x) \leq 2x' P_\kappa A_\kappa x$. Este caso reproduz exatamente a estratégia de comutação $\sigma(t) = u(x(t))$ dada em (5). Em todos esses casos, o limite $D_+V(x) \leq 2x' P_i A_i x$ para $i \in I(x)$ é válido o que, junto com as desigualdades de Lyapunov-Metzler (4), significa que $D_+(x) < 0$ para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, trajetórias instáveis de qualquer tipo não podem ser geradas, pois $V(x)$ é uma função de Lyapunov de controle, ou seja, uma função de Lyapunov para o sistema de malha fechada (15)-(16).

4.2 Ruído de medição

Pode-se argumentar que trajetórias instáveis podem aparecer se as medições forem corrompidas por algum tipo de ruído. Mostraremos que esse não é o caso da estratégia de controle de chaveamento do tipo em discussão, pelo menos para uma classe de incertezas a ser dada em seguida. A variável de medição associada à variável de estado do sistema (1) é da forma

$$z(t) = x(t) + \xi(t) \quad (18)$$

onde $\xi \in \mathcal{L}_\infty$ é uma perturbação exógena limitada e diferenciável a menos de eventuais pontos isolados com derivada temporal limitada. Assim, em vez de (5), a regra de comutação se torna

$$u(z) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} v_i(z) \quad (19)$$

Definindo $d_\sigma = \dot{\xi} - A_\sigma \xi$ verifica-se que a evolução temporal da variável medida obedece à equação diferencial do sistema afim com comutação

$$\dot{z}(t) = A_{\sigma(t)} z(t) + d_{\sigma(t)} \quad (20)$$

Adotando o mesmo raciocínio de antes, a função de Lyapunov quadrática por partes $V(z)$ definida em (6) com $P_i > 0$, $i \in \mathbb{K}$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler (4) reescrita como

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j = -Q_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (21)$$

é construída. Assim, considerando $(z(t), \sigma(t)) = (z \neq 0, \kappa) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ em um $t \in \mathbb{R}_+$ e mantendo em mente que $\kappa = u(z) \in I(z)$, a derivada de Dini ao longo de uma trajetória arbitrária do sistema de malha fechada satisfaz

$$\begin{aligned} D_+V(z) &= \min_{j \in I(z)} 2z'P_j(A\kappa z + d\kappa) \\ &< -z'Q_\kappa z + 2z'P_\kappa d\kappa \\ &\leq -\gamma\|z\|^2 + 2\beta\|z\| \max_{i \in \mathbb{K}} \|d_i\| \end{aligned} \quad (22)$$

onde $\gamma = \min_{i \in \mathbb{K}} \|Q_i^{-1}\|^{-1}$ e $\beta = \max_{i \in \mathbb{K}} \|P_i\|$. Isso nos permite concluir que $D_+V(z) < 0$ fora do conjunto limitado definido por $z \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|z\| \geq 2(\beta/\gamma) \max_{i \in \mathbb{K}} \|d_i\|$. Como consequência, existe um conjunto de nível limitado $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^n : V(z) \leq \theta\}$ tal que as trajetórias do sistema de malha fechada convergem para ele. Portanto, trajetórias ilimitadas de qualquer tipo não existem. Observe que este conjunto residual se reduz à origem $\Omega = \{x_{eq} = 0\}$ sempre que a perturbação $\xi \in \mathcal{L}_\infty$ desaparecer. Nesse caso, os resultados anteriores são recuperados.

5 Exemplo ilustrativo

5.1 Parte 1

Vamos ilustrar os resultados anteriores, resolvendo o primeiro exemplo discutido em (Heemels and Weiland, 2008), mas no presente contexto. O sistema de malha aberta é constituído por $N = 2$ subsistemas de segunda ordem estáveis, com o vetor de estado $x = [x_1 \ x_2]' \in \mathbb{R}^2$ e

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

A função de comutação (5) é construída com as matrizes positivas definidas fornecidas na mesma referência

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.9140 & -2.0465 \\ -2.0465 & 1.5761 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 3.9140 & 2.0465 \\ 2.0465 & 1.5761 \end{bmatrix} \quad (25)$$

que satisfazem (4) com $\Pi = 0$. Manipulações algébricas simples indicam que o sistema linear com comutação em malha fechada (1), com a lei de controle (5), pode ser escrito da forma (2), ou seja

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x & , \quad x_1 x_2 \geq 0 \\ A_2 x & , \quad x_1 x_2 < 0 \end{cases} \quad (26)$$

da qual se segue que a variedade de comutação com dimensão um é identificada como $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$, os eixos coordenados. As próximas observações são importantes. Primeiro, a cardinalidade de $I(x)$ é igual a dois para todo $x \in \Sigma$ e segundo, de acordo com (5), em (26) impusemos que $u(x) = 1$ para todo $x \in \Sigma$.

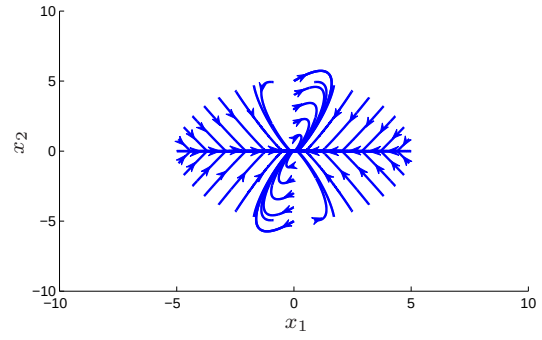


Figura 1: Plano de fase - sistema em malha fechada

Seguindo as condições fornecidas em (Polycarpou and Ioannou, 1993), de acordo com as dadas anteriormente, pode-se ver que um modo deslizante ocorre apenas no eixo $x_2 = 0$. Nesta parte de Σ as condições (11) são preenchidas para $J(x) = I(x) = \{1, 2\}$. De fato, este comportamento pode ser confirmado adotando-se $\lambda(x) = [1/2 \ 1/2]'$ e $x = [x_1 \ 0]'$ de tal forma que (12) se torna $\dot{x}_1 = -3x_1$ e $\dot{x}_2 = 0$. Como esperado, esse modo deslizante converge para a origem. No eixo $x_1 = 0$ não há modo deslizante, uma vez que as condições (11) são preenchidas para o conjunto com um único elemento $J(x) = \{1\} \subset I(x)$ o que confirma que esta parte da variedade de comutação compõe um *caso não genérico*. Essa situação também é identificada pelas condições fornecidas em (Polycarpou and Ioannou, 1993). É importante mencionar que se for assumido (erroneamente) que um modo deslizante ocorre nesta parte de Σ e considerar $J(x) = I(x) = \{1, 2\}$, então adotando $\lambda(x) = [1/2 \ 1/2]'$ e $x = [0 \ x_2]'$ a equação (12) fornece $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = x_2$ dando a falsa impressão de que este é um modo deslizante com comportamento divergente. Formalmente, tal solução divergente existe no sentido de Filippov. De fato, se o exemplo for simulado em tempo reverso, então tal solução apareceria como um modo deslizante sobre o eixo x_2 , convergindo exponencialmente para a origem. Entretanto, adotando a regra (14) para o caso não genérico, essa solução é descartada.

Para ilustrar o que foi dito, determinamos, numericamente, o plano de fase do sistema de comutação em malha fechada(1) controlado pela função de comutação $\sigma(t) = u(x(t))$ dada em (5). Na Figura 1, é evidente que não há movimento deslizante no eixo $x_1 = 0$. Sempre que uma trajetória começa nesse eixo, ela se afasta com $\sigma(t) = 1$ até que o eixo $x_2 = 0$ seja alcançado. Após este ponto, a trajetória prossegue até a origem em um movimento de deslizamento convergente de acordo com a teoria apresentada anteriormente. A conclusão é que a origem $x_{eq} = 0$ é um ponto de equilíbrio

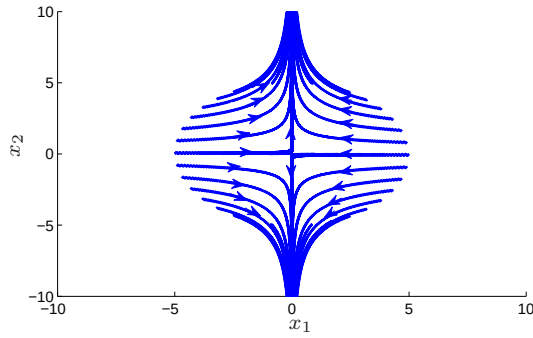


Figura 2: Plano de fase - sistema de malha aberta

globalmente assintoticamente estável.

Para corroborar esse entendimento, vamos fazer uso da interpretação segundo a função de Lyapunov de controle. Adotando $\mathcal{P}(x) = \Lambda$, em $x = [x_1 \ 0]'$, (17) tem-se $(1/2)D_+V(x) = -21.9745 x_1^2 \leq -1.5095x_1^2 = x'P_1A_1x = x'P_2A_2x$ e para $x = [0 \ x_2]'$ determina-se $(1/2)D_+V(x) = -0.4709 x_2^2 = x'P_1A_1x = x'P_2A_2x$ onde o mínimo é alcançado indiferentemente em ambos os vértices de Λ . Como consequência, os mesmos valores da derivada são obtidos para todos os outros conjuntos $\mathcal{P}(x)$ anteriormente considerados.

Este sistema linear com comutação não é estável sob comutação com frequência arbitrária porque a matriz $(A_1 + A_2)/2$ não é Hurwitz estável. Uma possível função de comutação desestabilizadora dependente do tempo $\sigma(t) \in \mathbb{K}$ é uma função periódica com um pequeno período $T = 0.01$ e razão cíclica 50% definido pelas componentes de $\lambda(x)$. A Figura 2 mostra as trajetórias do sistema de malha aberta (1) geradas por essa regra de comutação. A partir das mesmas condições iniciais de antes, observa-se uma trajetória convergente no eixo x_1 ($x_2 = 0$) e uma trajetória divergente no eixo x_2 ($x_1 = 0$). As trajetórias que se aproximam do eixo x_2 também divergem para o infinito. Claramente, neste caso, a origem $x_{eq} = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. Observe-se a notável diferença entre os planos de fase em ambas as figuras.

5.2 Parte 2

Neste momento, usando os resultados apresentados anteriormente, é importante analisar o primeiro exemplo discutido em (Heemels and Weiland, 2008) que pode ser expresso como

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x & , \quad x_1 \geq 0 \\ A_2x & , \quad x_1 < 0 \end{cases} \quad (27)$$

onde as matrizes A_1 e A_2 são aquelas dadas em (23). Seguindo Heemels and Weiland (2008), as matrizes $P_1 > 0$ e $P_2 > 0$ em (24)-(25) foram calculadas pelo procedimento descrito em (Johansson

and Rantzer, 1998) para garantir que em $\mathbb{R}^2$, incluindo a variedade de comutação $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$, a função quadrática por partes $V(x) = v_1(x)$ quando $x_1 \geq 0$ e $V(x) = v_2(x)$ quando $x_1 \leq 0$ é uma função de Lyapunov contínua e radialmente ilimitada associada a (27). Portanto, como claramente indicado em (Johansson and Rantzer, 1998), para este sistema, apenas soluções do tipo Carathéodory convergem para o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$. No entanto, usando as denominações anteriores, a parte positiva $x_2 > 0$ de Σ constitui um caso não genérico, mas agora, diferentemente do exemplo tratado anteriormente, o modo deslizante divergente $x_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = x_2$ aparece na parte negativa $x_2 < 0$ de Σ . A conclusão, de acordo com Heemels and Weiland (2008) e Johansson and Rantzer (1998), é que a origem é um ponto de equilíbrio instável de (27). O comportamento instável é consequência de um modo deslizante divergente e não devido à existência de um caso não genérico. Como já provamos anteriormente, e ao contrário do que é mencionado em (Heemels et al., 2017), tal situação é impossível de ocorrer no contexto de sistemas lineares com comutação (1) controlados pela estratégia (5). A Parte 1 deste exemplo confirma esta afirmação.

6 Conclusão

Foi demonstrado que o ponto de equilíbrio (a origem) de um sistema linear controlado por uma estratégia de comutação dependente do estado específica do tipo *min* é globalmente assintoticamente estável mesmo na presença de modos deslizantes vistos como soluções do tipo Filippov. As soluções do tipo Carathéodory e Filippov, sempre que existirem, são tomadas automaticamente em consideração a partir da utilização de uma mesma função de Lyapunov quadrática por partes e radialmente ilimitada. O ruído de medição de uma certa classe bastante geral não afeta a estabilidade do sistema em malha fechada. Um exemplo simples tirado da literatura foi utilizado para ilustrar as conclusões de convergência e estabilidade aqui estabelecidas.

Referências

- DeCarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE* **88**: 1069–1082.
- Dieci, L. and Lopez, L. (2009). Sliding motion in Filippov differential systems: Theoretical results and a computational approach, *SIAM J. Num. Analysis* **47**: 2023–2051.
- Filippov, A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer, The Netherlands.

- Galbusera, L., Bolzern, P., Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2012). State and output feedback $\mathbb{H}_\infty$ control of time-delay switched linear systems, *Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control* **22**: 1674–1690.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **45**: 1915–1930.
- Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control* **53**: 720–733.
- Heemels, W., Kundu, A. and Daafouz, J. (2017). On Lyapunov-Metzler inequalities and S-procedure characterisations for the stabilisation of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**: 4593–4597.
- Heemels, W. and Weiland, S. (2008). Input-to-state stability and interconnections of discontinuous dynamical systems, *Automatica* **44**: 3079–3086.
- Hespanha, J. P. and Morse, A. S. (2002). Switching between stabilizing controllers, *Automatica* **38**: 1905–1917.
- Hsu, L., Kaszkurewicz, E. and Bhaya, A. (2000). Matrix-theoretic conditions for the realizability of sliding manifolds, *Systems and Control Letters* **40**: 145–152.
- Johansson, M. and Rantzer, A. (1998). Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**: 555–559.
- Lasdon, L. S. (1970). *Optimization theory for large systems*, Macmillan Publishing, New York.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, Birkhauser Boston, Boston.
- Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine* **19**: 59–70.
- Polycarpou, M. M. and Ioannou, P. A. (1993). On the existence and uniqueness of solutions in adaptive control systems, *IEEE Trans. on Automatic Control* **38**: 474–479.