

IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DE HAMMERSTEIN EM MALHA FECHADA POR MEIO DE PREDITORES BASEADOS EM SUBESPAÇOS

MARCUS VINICIUS DE PAULA*, RODRIGO AUGUSTO RICCO*[†], BRUNO OTÁVIO SOARES TEIXEIRA*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, MG, Brasil

[†]Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), João Monlevade, MG, Brasil

Emails: marcusdepaula@ufmg.br, ricco@deelt.ufop.br, brunoot@ufmg.br

Abstract— This work aims at presenting an approach for the identification of Hammerstein models, with dynamics represented in state space, operating in a closed loop. Despite the popularity of the Hammerstein models in the literature, there is still a shortage of methods that address the identification of these models using subspace predictors. The methodology presented has the advantage that the parameter estimation of both static and dynamical blocks is performed in one step, requiring only one identification experiment. The nonlinear model SISO is rewritten as a linear model MISO. The model parameters are estimated by combining the Predictor-Based Subspace Identification (PBSID) and least squares methods. Through Monte Carlo simulations, the results are presented and compared with an alternative predictor-based estimation methodology. The comparison suggests that the proposed method is a promising way to identify such systems.

Keywords— Subspace Identification, Hammerstein Model, PBSID, Closed-loop Identification.

Resumo— Este trabalho tem como finalidade apresentar uma abordagem para identificação de modelos de Hammerstein, com dinâmica representada no espaço de estados, operando em malha fechada. Apesar da popularidade dos modelos de Hammerstein na literatura, ainda há escassez de métodos que abordam a identificação desses modelos utilizando preditores nos subespaços. A metodologia apresentada tem como vantagem o fato do processo de estimação dos parâmetros de ambos blocos, estático e dinâmico, ser realizado em única etapa, demandando somente um ensaio de identificação. O modelo não linear SISO é reescrito como um modelo linear MISO. Os parâmetros do modelo são estimados combinando os métodos PBSID e mínimos quadrados. Por meio de simulações de Monte Carlo, os resultados são apresentados e comparados com uma metodologia alternativa de estimação baseada em preditores. A comparação sugere que o método proposto é uma forma promissora para identificação de tais sistemas.

Palavras-chave— Identificação em Subespaços, Modelos de Hammerstein, PBSID, Identificação em Malha Fechada.

1 Introdução

Os modelos de blocos interconectados são uma das possíveis estruturas utilizadas para representar sistemas não lineares. O interesse por esses modelos foi impulsionado a partir da década de 1990 devido à sua aplicabilidade em controle não linear (Aguirre, 2015). Dentre as diversas configurações possíveis, o modelo de Hammerstein é uma das formas mais utilizadas quando se deseja representar sistemas com não linearidades nas entradas. A estrutura desse modelo consiste de uma curva estática não linear conectada em série com um modelo dinâmico linear (Aissaoui et al., 2016).

Na segunda metade da década de 1990, uma nova forma de identificar modelos de Hammerstein foi proposta por (Verhaegen e Westwick, 1996). Trata-se de uma formulação que reescreve o modelo não linear SISO (do inglês, *single-input single-output*) como um modelo linear MISO (do inglês, *multiple-input single-output*) no espaço de estados. Essa nova abordagem permitiu expandir a aplicabilidade dos métodos de identificação por subespaços, tais como o MOESP (do inglês, *multivariable output error state space*) (Verhaegen e Dewilde, 1992) e N4SID (do inglês, *numerical al-*

gorithms for state space subspace system identification) (Van Overschee e De Moor, 1994) a problemas de identificação de sistemas não lineares. A vantagem dessa formulação é que tanto os parâmetros da parcela não linear do modelo quanto da parcela linear são estimados por meio de um único experimento de identificação e em batelada.

Diversas outras abordagens de identificação em única etapa surgiram posteriormente, como os trabalhos de (Gómez e Baeyens, 2005) e (Jalaleddini e Kearney, 2013). Esses métodos diferem um do outro na forma como os parâmetros da curva estática não linear e as matrizes de entrada e transmissão direta do modelo são estimadas.

No entanto, os métodos tradicionais de identificação por subespaços falham ao tentar estimar modelos operando em malha fechada. Isso ocorre, segundo (Qin e Ljung, 2003), porque a premissa de que os sinais de entrada devem ser decorrelacionados dos ruídos de medição e de processo, empregada para a identificação em malha aberta, não é válida quando os dados são coletados em malha fechada.

Baseados na necessidade de buscar métodos que conseguissem contornar esse problema, surgiram as primeiras contribuições no campo de

identificação por subespaços em malha fechada. Dentre eles, citam-se o método SSNEW (do inglês, *space state new*) (Ljung e McKelvey, 1996), SSARX (do inglês, *space state autoregressive exogenous*) (Jansson, 2003) e mais recentemente o PBSID (do inglês, *predictor-based subspace identification*) (Chiuso, 2007a; Chiuso, 2007b). Dentre os trabalhos que estendem a identificação por subespaços a modelos de blocos interconectados em malha fechada citam-se (Van Wingerden e Verhaegen, 2009a; Van Wingerden e Verhaegen, 2009b). Essas abordagens utilizam o método PBSID em conjunto a técnica LS-SVM (do inglês, *least squares support vector machines*) para estimar os parâmetros de modelos de Hammerstein e Hammerstein-Wiener, respectivamente.

Este trabalho visa jogar alguma luz ao campo de identificação de modelos de Hammerstein, em malha fechada, no espaço de estados. Utilizando a formulação proposta por (Verhaegen e Westwick, 1996; Chiuso, 2007a; Chiuso, 2007b), reescreve-se o modelo não linear como um modelo linear na forma de preditor. Os parâmetros desconhecidos do modelo são estimados por meio do método PBSID e da formulação baseada em mínimos quadrados (MQ) introduzida por (Jalaleddini e Kearney, 2011). A diferença entre a metodologia proposta por (Jalaleddini e Kearney, 2011) e a abordagem apresentada neste trabalho está na formulação do problema. Neste trabalho, o sistema opera em malha fechada e a formulação do problema baseia-se em preditores no espaço de estados. No trabalho de (Jalaleddini e Kearney, 2011), o sistema opera em malha aberta, sendo o problema formulado para ser resolvido por meio do método MOESP. A principal motivação deste trabalho é gerar uma metodologia simplificada que possibilite, em trabalhos futuros, estimar modelos de Hammerstein para sistemas incertos operando em malha fechada.

O presente trabalho encontra-se dividido da seguinte maneira. A Seção 2 apresenta a formulação do problema. Na Seção 3 são apresentados os passos do algoritmo PBSID. Na Seção 4, a metodologia utilizada para identificar modelos de Hammerstein em malha fechada é apresentada. A Seção 5 mostra a aplicação do método proposto em um exemplo simulado. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões desse trabalho.

2 Formulação do Problema

Considere um sistema SISO, não linear, operando em malha fechada e representado por meio de um modelo de Hammerstein conforme mostrado na Figura 1. Assuma que são conhecidos os sinais de entrada (referência) $r_k \in \mathbb{R}$ e de saída $y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, N$, sendo N o número de amostras e o ganho F do controlador.

A parcela estática não linear do modelo é re-

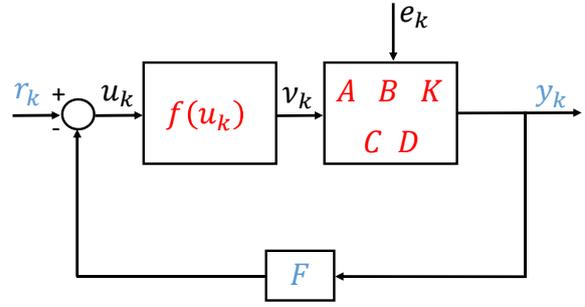


Figura 1: Diagrama esquemático do modelo de Hammerstein em malha fechada. As variáveis e parâmetros destacadas em azul são assumidamente conhecidas, enquanto os parâmetros em vermelho necessitam ser estimados.

presentada por uma função de base de ordem m

$$\nu_k = f(u_k) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(u_k), \quad (1)$$

em que $g_i(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, são os termos de expansão da função e $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ são parâmetros a estimar. Assume-se, como premissa, que $f(0) = 0$. O sinal de entrada do bloco não linear, $u_k \in \mathbb{R}$, é dado por

$$u_k = r_k - F y_k. \quad (2)$$

O bloco dinâmico linear, por sua vez, é representado no espaço de estados

$$x_{k+1} = A x_k + B \nu_k + K e_k, \quad (3)$$

$$y_k = C x_k + D \nu_k + e_k, \quad (4)$$

em que $\nu_k \in \mathbb{R}$ é o sinal de entrada do bloco linear, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $e_k \in \mathbb{R}$ é um vetor de ruído Gaussiano branco de média nula. Deseja-se estimar a matriz dinâmica do sistema $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matriz de entrada $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, matriz de saída $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, matriz de transmissão direta $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ e matriz de observadores $K \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Baseado na formulação proposta por (Verhaegen e Westwick, 1996), considere que os termos de expansão $g_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m$ da curva estática não linear são conhecidos. Sendo assim, é possível escrever um vetor de entradas aumentado como uma combinação destes termos, de modo que

$$V_k \triangleq [g_1(u_k), \dots, g_m(u_k)]^T. \quad (5)$$

Substituindo (1) em (3) e (4) tem-se

$$x_{k+1} = A x_k + B \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(u_k) + K e_k, \quad (6)$$

$$y_k = C x_k + D \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(u_k) + e_k. \quad (7)$$

De acordo com (Gómez e Baeyens, 2005), uma forma de obter uma parametrização única e tornar o sistema identificável é assumir que $\|\alpha_i\|_2 = 1$, em que $\|\cdot\|_2$ é a norma Euclidiana. Considerando

$$\tilde{B} \triangleq [B\alpha_1, \dots, B\alpha_m], \quad (8)$$

$$\tilde{D} \triangleq [D\alpha_1, \dots, D\alpha_m], \quad (9)$$

e (5), é possível reescrever o sistema SISO não linear como um sistema MISO linear

$$x_{k+1} = Ax_k + \tilde{B}V_k + Ke_k, \quad (10)$$

$$y_k = Cx_k + \tilde{D}V_k + e_k. \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10), tem-se o modelo do sistema na forma de preditor

$$\bar{A}x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{\tilde{B}}V_k + Ky_k, \quad (12)$$

$$y_k = Cx_k + \tilde{D}V_k + e_k, \quad (13)$$

em que as matrizes \bar{A} e $\bar{\tilde{B}}$ são definidas como

$$\bar{A} \triangleq A - KC, \quad (14)$$

$$\bar{\tilde{B}} \triangleq \tilde{B} - K\tilde{D}. \quad (15)$$

Desse modo, pode-se resolver o problema de estimação das matrizes de estado de (10) e (11) e da ordem n do modelo linear por meio do método PBSID.

O algoritmo PBSID completo é apresentado na Seção 3. Por meio desta formulação estimam-se as matrizes \hat{A} , \hat{C} e \hat{K} do modelo de Hammerstein. As matrizes estimadas $\hat{\tilde{B}}$ e $\hat{\tilde{D}}$, no entanto, não representam em termos de dimensão as matrizes originais da parcela linear do modelo de Hammerstein. Uma forma de estimar as matrizes $\hat{\tilde{B}}$, $\hat{\tilde{C}}$ e os parâmetros $\hat{\alpha}$ da curva estática é apresentada em (Jalaleddini e Kearney, 2011) para sistemas operando em malha aberta. Uma versão modificada deste método é apresentada na Seção 4, uma vez que a formulação do problema aqui abordada considera que a estimação dos parâmetros do modelo é baseada em preditores para sistemas operando em malha fechada.

3 Identificação de Subespaços Baseada em Preditor - Revisão

A seguir é revisado o algoritmo PBSID para sistemas LIT (Van Wingerden, 2008). Esse método tem como finalidade estimar a ordem n e as matrizes de estado \hat{A} , \hat{C} e \hat{K} do modelo de Hammerstein, consideradas nas representações em espaço de estados (10)-(11) e (12)-(13).

Algoritmo 3.1 *Algoritmo PBSID.*

1. Definir as matrizes

$$z_k \triangleq [V_k^T \quad y_k^T]^T, \quad (16)$$

$$B^* \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\tilde{B}} & K \end{bmatrix}, \quad (17)$$

de modo que (12) e (13) possam ser reescritos como

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B^*z_k, \quad (18)$$

$$y_k = Cx_k + \tilde{D}V_k + e_k. \quad (19)$$

2. Considerando que a variável p refere-se à janela de dados passados, propaga-se (18) por $p-1$ passos, no intervalo $k+2$ a $k+p$

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \bar{A}^2x_k + [\bar{A}B^* \quad B^*] \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ x_{k+p} &= \bar{A}^p x_k + \mathcal{K}^p Z_{0:p-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

em que

$$\mathcal{K}^p \triangleq [\bar{A}^{p-1}B^* \quad \dots \quad B^*], \quad (21)$$

é a matriz de controlabilidade estendida do sistema e

$$Z_{0:p-1} \triangleq \begin{bmatrix} z_k \\ \vdots \\ z_{k+p-1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Fazendo $p \gg 0$ tal que $\|\bar{A}^p\| = 0$ para um sistema estável em malha fechada, (20) reduz-se a

$$x_{k+p} \approx \mathcal{K}^p Z_{0:p-1}. \quad (23)$$

3. Considerando que a variável f refere-se à janela de dados futuros, propaga-se (19), com auxílio de (23), no intervalo $k+p$ a $k+p+f$

$$\begin{aligned} y_{k+p} &\approx CK^p Z_{0:p-1} + \tilde{D}V_{k+p} + e_{k+p}, \\ &\vdots \\ y_{k+p+f} &\approx CK^p Z_{f:p+f-1} + \tilde{D}V_{k+p+f} \\ &\quad + e_{k+p+f}. \end{aligned} \quad (24)$$

4. Construir as matrizes em blocos de Hankel

$$V_{p:f} \triangleq [V_p, \dots, V_f], \quad (25)$$

$$Y_{p:f} \triangleq [y_p, \dots, y_f], \quad (26)$$

$$E_{p:f} \triangleq [e_p, \dots, e_f], \quad (27)$$

$$X_{p:f} \triangleq [x_p, \dots, x_f], \quad (28)$$

e reescrever (23) e (24) na forma matricial por meio de (25), (26), (27) e (28)

$$\begin{aligned} X_{p:f} &\approx \mathcal{K}^p Z_{p:f}, \\ Y_{p:f} &\approx C\mathcal{K}^p Z_{p:f} + \tilde{D}V_{p:f} + E_{p:f}. \end{aligned} \quad (29)$$

5. Se $f = p$, estimar as matrizes $C\mathcal{K}^p$ e \tilde{D} resolvendo o seguinte problema linear

$$[\widehat{C\mathcal{K}^p} \quad \hat{\tilde{D}}] = \arg \min_{[C\mathcal{K}^p \quad \tilde{D}]} \left\| Y_{p:p} - [C\mathcal{K}^p \quad \tilde{D}] \begin{bmatrix} Z_{p:p} \\ V_{p:p} \end{bmatrix} \right\|_F^2, \quad (30)$$

em que $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

6. Sendo a matriz de observabilidade estendida Γ^p definida como

$$\Gamma^p \triangleq \begin{bmatrix} C \\ C\bar{A} \\ \vdots \\ C\bar{A}^{p-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

o produto de Γ^p por \mathcal{K}^p pode ser aproximado por

$$\Gamma^p \mathcal{K}^p \approx \begin{bmatrix} C\bar{A}^{p-1}B^* & \cdots & CB^* \\ 0 & \cdots & C\bar{A}B^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C\bar{A}^{p-1}B^* \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Reescrevendo (23) por meio da formulação das matrizes em blocos de Hankel, tem-se

$$X_{p:p} \approx \mathcal{K}^p Z_{p:p}. \quad (33)$$

Multiplicando ambos os lados de (33) por Γ^p

$$\Gamma^p X_{p:p} \approx \Gamma^p \mathcal{K}^p Z_{p:p}, \quad (34)$$

e aplicando a decomposição em valores singulares em (34)

$$\Gamma^p \mathcal{K}^p Z_{p:p} = [\mathcal{U}_1 \ \mathcal{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

estima-se a ordem n do sistema por meio da matriz Σ_1 , que é uma matriz diagonal que contém os n maiores valores singulares de $\Gamma^p \mathcal{K}^p Z_{p:p}$. A matriz \mathcal{V}_1 é o espaço de linhas correspondente.

7. Estimar a sequência de estados

$$\hat{X}_{p:p} = \Sigma_1 \mathcal{V}_1. \quad (36)$$

8. Estimar a matriz C resolvendo o problema linear

$$\hat{C} = \arg \min_C \|Y_{p:p} - \hat{D}V_{p:p} - C\hat{X}_{p:p}\|_F^2. \quad (37)$$

9. Estimar a matriz de dados $E_{p:p}$ e então determinar as matrizes A , \tilde{B} e K resolvendo o seguinte problema linear

$$[\hat{A} \ \hat{B} \ \hat{K}] = \arg \min_{[A \ \tilde{B} \ K]} \|\hat{X}_{p+1:p} - A\hat{X}_{p:p-1} - \tilde{B}V_{p:p-1} - K\hat{E}_{p:p-1}\|_F^2. \quad (38)$$

□

Por meio da formulação apresentada, o método PBSID consegue remover o viés que surge ao estimar modelos em malha fechada por meio de métodos tradicionalmente empregados na identificação em malha aberta, tais como o MOESP e o N4SID. A operação em malha fechada viola a restrição imposta a esses algoritmos de que os sinais de entrada e ruído devem ser descorrelacionados. O PBSID, no entanto, contorna esta restrição empregando modelos ARX (do inglês, *autoregressive exogenous*) de alta ordem para remover a correlação entre a entrada e a sequência de ruídos (Van Wingerden e Verhaegen, 2009a).

4 Identificação de Modelos de Hammerstein em Malha Fechada

Uma vez estimadas as matrizes de estado \hat{A} , \hat{C} , \hat{K} e a ordem n do sistema por meio do algoritmo PBSID, o próximo passo consiste em estimar os parâmetros $\hat{\alpha}$ da curva estática e as matrizes \tilde{B} e \tilde{D} do modelo de Hammerstein.

O método apresentado a seguir é uma versão adaptada do trabalho de (Jalaleddini e Kearney, 2011). A diferença da abordagem aqui apresentada encontra-se no método de subespaços empregado para estimar os parâmetros do modelo, uma vez que este trabalho considera a identificação por meio de preditores para sistemas que operam em malha fechada. A Figura 2 apresenta um diagrama comparativo entre os dois trabalhos.

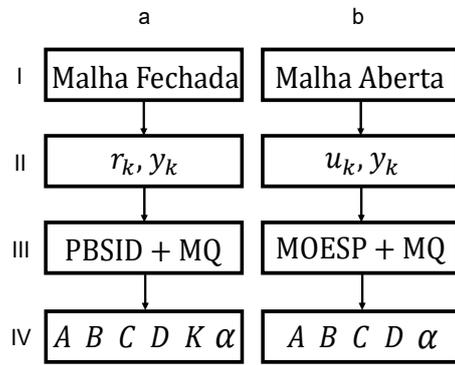


Figura 2: Diferenças entre a metodologia proposta neste trabalho (a) e o trabalho de (Jalaleddini e Kearney, 2011) (b). I) Modo de operação do sistema, II) sinais utilizados para identificação do sistema, III) métodos empregados para estimar os parâmetros e IV) parâmetros estimados.

Considere a representação em espaço de estados (10)-(11) e as matrizes \hat{A} , \hat{C} e \hat{K} estimadas pelo método PBSID. Substituindo as matrizes \tilde{B} e \tilde{D} por

$$\tilde{B}' \triangleq \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \hat{\alpha}_1 & \cdots & \hat{b}_1 \hat{\alpha}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b}_n \hat{\alpha}_1 & \cdots & \hat{b}_n \hat{\alpha}_m \end{bmatrix}, \quad (39)$$

e

$$\tilde{D}' \triangleq [\hat{d}\hat{\alpha}_1 \ \cdots \ \hat{d}\hat{\alpha}_m], \quad (40)$$

respectivamente, e considerando $x_0 = 0$, é possível reescrever a representação em espaço de estados, conforme as instruções de (Van der Veen et al., 2013), da seguinte maneira

$$\hat{y}_k = \sum_{\tau=0}^{k-1} \hat{C} \hat{A}^{k-1-\tau} [\tilde{B}' V_{\tau} + \hat{K} e_{\tau}] + \tilde{D}' V_k + e_k. \quad (41)$$

Considere agora as seguintes propriedades

$$\text{vec}(EGL) = (L^T \otimes E)\text{vec}(G), \quad (42)$$

$$\text{vec}(EG) = (G^T \otimes I_l)\text{vec}(E), \quad (43)$$

em que E , G e L são matrizes genéricas de dimensões arbitrárias, I_l é uma matriz identidade de dimensões apropriadas, \otimes representa o produto de Kronecker e $\text{vec}(\cdot)$ refere-se à operação de vetorização. Aplicando (42) e (43) em (41) tem-se

$$\hat{y}_k = \left[\sum_{\tau=0}^{k-1} V_\tau^T \otimes \hat{C}\hat{A}^{k-1-\tau} \right] \text{vec}(\hat{B}') + V_k^T \text{vec}(\hat{D}') + \eta_k, \quad (44)$$

em que

$$\eta_k = \left[\sum_{\tau=0}^{k-1} e_\tau^T \otimes \hat{C}\hat{A}^{k-1-\tau} \right] \text{vec}(\hat{K}) + e_k. \quad (45)$$

Note que (45) faz referência aos distúrbios que acometem o sistema. Como (44) é uma equação linear nos parâmetros $\text{vec}(\hat{B}')$ e $\text{vec}(\hat{D}')$, é possível reescrevê-la na forma matricial

$$Y = \psi\theta + \Delta, \quad (46)$$

em que

$$Y \triangleq [y_0, \dots, y_{N-1}]^T, \quad (47)$$

$$\psi \triangleq [\Upsilon, \Phi], \quad (48)$$

$$\Upsilon \triangleq \left[0, \dots, \sum_{\tau=0}^{N-2} V_\tau^T \otimes \hat{C}\hat{A}^{N-2-\tau} \right]^T, \quad (49)$$

$$\Phi \triangleq [V_0^T, \dots, V_{N-1}^T], \quad (50)$$

$$\theta \triangleq \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{B}') \\ \text{vec}(\hat{D}') \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$\Delta \triangleq [\eta_0, \dots, \eta_{N-1}]^T, \quad (52)$$

sendo $\psi \in \mathbb{R}^{N \times m(n+1)}$. Segundo (Gómez e Baeyens, 2005), a matriz θ em (51) apresenta uma estreita relação com a matriz de parâmetros $\theta_{\alpha_{BD}}$, tal que

$$\theta_{\alpha_{BD}} = \hat{\alpha}^T \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{D} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \hat{\alpha}_1 & \cdots & \hat{b}_n \hat{\alpha}_1 & \hat{d} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{b}_1 \hat{\alpha}_m & \cdots & \hat{b}_n \hat{\alpha}_m & \hat{d} \hat{\alpha}_m \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Desse modo, o objetivo consiste em estimar a matriz de parâmetros θ em (46), que contém os mesmos termos da matriz $\theta_{\alpha_{BD}}$, porém, dispostos de forma diferente. Esse problema pode ser resolvido aplicando o método de mínimos quadrados em (46). No entanto, antes de aplicar o mínimos quadrados ao problema, é necessário rearranjar a

ordem das colunas da matriz de regressores (48) de modo que ela fique condizente com a ordem dos parâmetros em (53). Sendo assim

$$\Xi \triangleq [\psi_1, \dots, \psi_n, \psi_{mn+1}, \psi_{n+1}, \dots, \psi_{2n}, \psi_{mn+2}, \psi_{2n+1}, \dots, \psi_{m(n+1)}]^T. \quad (54)$$

Uma vez obtida a matriz Ξ , a equação de regressão (46) é reescrita como

$$Y = \Xi\xi + \Delta. \quad (55)$$

Logo, o vetor de parâmetros ξ é estimado pelo operador de mínimos quadrados

$$\xi = (\Xi^T \Xi)^{-1} \Xi^T Y = [\xi_1, \dots, \xi_{m(n+1)}]^T. \quad (56)$$

Os parâmetros estimados em (56) são então organizados em uma matriz com estrutura semelhante a (53)

$$\hat{\theta}_{\alpha_{BD}} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n(m-1)-1} & \cdots & \xi_{m(n+1)} \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Segundo (Gómez e Baeyens, 2005), é possível separar os parâmetros das matrizes de estado \hat{B} e \hat{D} dos parâmetros $\hat{\alpha}$ da curva estática por meio da decomposição em valores singulares (SVD) de (57), de modo que

$$\hat{\theta}_{\alpha_{BD}}^T = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (58)$$

em que $U_1 \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $S_1 = \sigma_1$, sendo σ_1 o maior valor singular de $\hat{\theta}_{\alpha_{BD}}^T$. Por meio das matrizes oriundas da SVD, é possível obter as estimativas dos parâmetros

$$\left(\begin{bmatrix} \hat{B} \\ \hat{D} \end{bmatrix}, \hat{\alpha} \right) = (U_1 S_1, V_1). \quad (59)$$

A seguir é apresentado o algoritmo que compila todos os passos da metodologia em questão.

Algoritmo 4.1 *Identificação de Modelo de Hammerstein em Malha Fechada por Meio de Preditor.*

1. Aplicar um sinal r_k , persistentemente excitante, à entrada do sistema e obter V_k por meio de (2) e (5).

2. Estimar as matrizes \hat{A} , \hat{C} , \hat{K} e a ordem n do sistema por meio do PSBID, utilizando V_k como entrada e y_k como saída.

3. Construir a matriz Y por meio de (47) e ψ por meio de (48), (49) e (50).

4. Obter Ξ rearranjando a matriz ψ , conforme (54).

5. Estimar os parâmetros de $\hat{\theta}_{\alpha_{BD}}$, por meio do método de mínimos quadrados, de acordo com (56) e (57).

6. Determinar as matrizes de estado \hat{B} e \hat{D} e os parâmetros da curva estática $\hat{\alpha}$ por meio de (58) e (59).

□

5 Resultados Simulados

Nesta seção são apresentados os resultados preliminares da aplicação do método proposto em um sistema simulado. Os resultados obtidos são comparados com a metodologia sugerida por (Van Wingerden e Verhaegen, 2009a). Por questões de simplicidade, denominaremos o método proposto neste trabalho de PBSID-MQ, enquanto que o método proposto por (Van Wingerden e Verhaegen, 2009a) será denominado PBSID-SVM. Esse método, diferente da metodologia PBSID-MQ, utiliza os conceitos de Máquinas de Vetores de Suporte (SVM) para estimar os estados do sistema por meio dos dados de entrada e saída. Conhecendo-se os estados, estimam-se a não linearidade estática, a ordem e as matrizes de estado do sistema. Considere um sistema descrito por um modelo de Hammerstein, conforme representado na Figura 1, com os seguintes parâmetros

$$f(u_k) = -0,6u_k^2 + 0,8u_k, \quad (60)$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,5 \\ -0,2 & -0,3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad D = 0,$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,15 \end{bmatrix}, \quad F = 2,5. \quad (61)$$

No processo de estimação do modelo utiliza-se um conjunto de dados de entrada e saída com $N = 450$ amostras. A janela de dados $50 < k \leq 250$ é utilizada na etapa de identificação do modelo, enquanto a janela de dados $250 < k \leq 450$ é utilizada na etapa de validação.

A Figura 3a apresenta uma realização do sinal persistentemente excitante de entrada r_k utilizado na etapa de identificação. Trata-se de um PRBS (do inglês, *pseudorandom binary sequence*), com número de bits $b = 20$, modulado em amplitude por um sinal aleatório. Por se tratar da identificação de um sistema não linear operando em malha fechada, em termos práticos o sinal de referência (entrada) r_k proposto é mais simples de ser projetado e aplicado ao sistema do que um sinal completamente aleatório. A Figura 3b mostra a realização do sinal de saída y_k . A taxa de amostragem escolhida é de 0,4s.

Os valores atribuídos a p e f são $p = f = 10$. O sinal e_k aplicado ao sistema é um ruído Gaussiano branco de média nula e desvio padrão $\sigma = 0,01$. Realizam-se então 100 simulações de Monte Carlo com o sistema como forma de verificar a dispersão da estimativa dos parâmetros. A cada simulação, aplica-se uma sequência de ruído Gaussiano branco à saída do sistema de modo que a relação sinal ruído (SNR) seja de 29dB.

A Figura 4 compara a curva estática não linear $f(u_k)$, em preto (- -), com as curvas estáticas

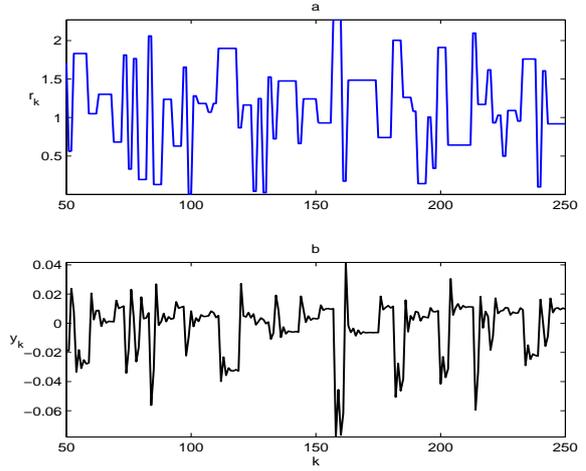


Figura 3: Realizações dos sinais de (a) entrada r_k e (b) de saída y_k utilizados na identificação do sistema.

médias estimadas por meio dos métodos PBSID-MQ, em azul (- ·) e PBSID-SVM, em vermelho (—).

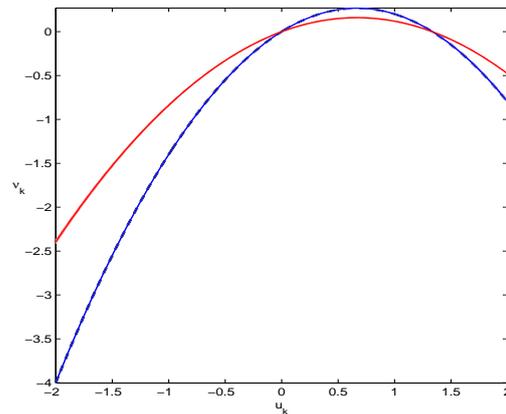


Figura 4: Comparativo entre a curva estática não linear $f(u_k)$ do sistema verdadeiro, em preto (- -), e as curvas médias estimadas por meio dos métodos PBSID-MQ, em azul (- ·), e PBSID-SVM, em vermelho (—).

Devido à consideração $\|\alpha_i\|_2 = 1$, observa-se que a curva estimada pelo PBSID-MQ é bastante próxima à curva estática verdadeira $f(u_k)$. No entanto, o método PBSID-SVM não impõe esta restrição na estimativa dos parâmetros da curva estática, de modo que a curva estimada é diferente da curva verdadeira $f(u_k)$. Isso ocorre devido à presença de um fator de escala não identificável λ . Desse modo, a curva estimada é modificada por este fator. Essa diferença na curva estática, no entanto, é compensada na estimação da parcela dinâmica linear e não interfere no desempenho global do modelo, como será mostrado adiante, na validação por simulação livre.

A Figura 5 mostra a comparação entre os autovaleiros da parcela dinâmica linear do sistema

verdadeiro (\times), em preto, e os autovalores dos 100 modelos lineares estimados pela simulação de Monte Carlo por meio do PBSID-MQ ($*$), em azul, e PBSID-SVM ($+$), em vermelho. Os valores médios dos autovalores estimados e os desvios-padrões associados a estas estimativas são apresentados na Tabela 1. Os parâmetros σ_1 e σ_2 referem-se à parcela real dos autovalores do modelo, enquanto ω_1 e ω_2 referem-se à parcela imaginária dos autovalores. Os autovalores do sistema verdadeiro são $s_{1,2} = -0,45 \pm 0,27j$. Observa-se, por meio da Figura 5 e dos resultados apresentados na Tabela 1, que as estimativas dos autovalores obtidas por meio do PBSID-MQ apresentam uma menor dispersão do que as estimativas obtidas por meio do PBSID-SVM. No entanto, nota-se que as estimativas médias dos autovalores encontram-se bastante próximas dos autovalores do sistema verdadeiro, para ambos os métodos.

Tabela 1: Valores médios e desvios padrões dos autovalores estimados pelas 100 simulações de Monte Carlo para as metodologias PBSID-MQ e PBSID-SVM.

Parâmetro	PBSID-MQ	PBSID-SVM
$\hat{\sigma}_1$	$-0,44 \pm 0,01$	$-0,40 \pm 0,03$
$\hat{\omega}_1$	$0,28 \pm 0,01$	$0,27 \pm 0,02$
$\hat{\sigma}_2$	$-0,44 \pm 0,01$	$-0,40 \pm 0,03$
$\hat{\omega}_2$	$-0,28 \pm 0,01$	$-0,27 \pm 0,02$

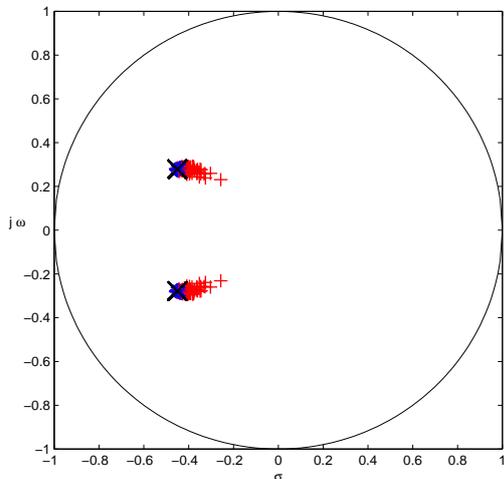


Figura 5: Comparativo entre os autovalores da parcela dinâmica linear do sistema verdadeiro (\times), em preto, e os autovalores dos 100 modelos estimados pelo PBSID-MQ ($*$), em azul, e pelo PBSID-SVM ($+$), em vermelho.

A Figura 6 mostra parte da janela de dados de uma realização, utilizada na validação qualitativa por simulação livre, dos modelos estimados. A curva em preto (- -) refere-se à saída do sistema verdadeiro, enquanto as curvas em azul (- ·) e vermelho (—) referem-se às médias das 100 estimativas da saída, obtidas por meio do PBSID-MQ

e do PBSID-SVM, respectivamente. Como forma de validar quantitativamente os modelos, calcula-se o índice VAF (do inglês, *variance accounted for*) para cada um deles

$$\text{VAF}(\%) = \left(1 - \frac{\text{var}(y - \hat{y})}{\text{var}(y)} \right) 100, \quad (62)$$

em que $\text{var}(\cdot)$ é o operador variância. Este índice compara percentualmente o quão próximo a saída verdadeira do sistema y encontra-se da saída média estimada \hat{y} . Os valores calculados são de 99,6% para o modelo estimado pelo PBSID-MQ e 99,7% para o modelo estimado pelo PBSID-SVM.

Por meio dos índices quantitativos calculados, dos pequenos valores de dispersão associados aos parâmetros estimados pelo PBSID-MQ e da comparação com o PBSID-SVM, os resultados obtidos sugerem que a metodologia proposta é capaz de estimar modelos de Hammerstein acurados para sistemas operando em malha fechada.

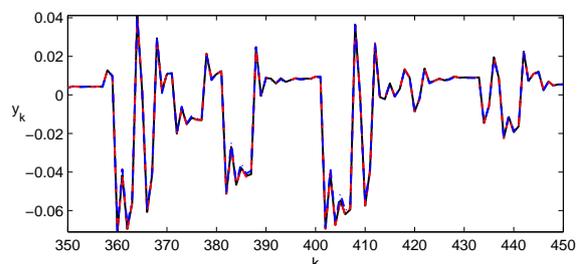


Figura 6: Validação por simulação livre dos modelos de Hammerstein estimados. A curva em preto (- -) refere-se a uma realização do sinal de saída do sistema verdadeiro y_k , enquanto as curvas em azul (- ·) e vermelho (—) referem-se às saídas médias dos modelos estimados por meio dos métodos PBSID-MQ e PBSID-SVM.

6 Conclusões

Neste trabalho, é apresentada uma abordagem para identificação de modelos de Hammerstein, com dinâmica no espaço de estados, para sistemas que operam em malha fechada. Por meio da formulação que converte a representação não linear do sistema em uma representação linear, utiliza-se o método PBSID em conjunto com o método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros do modelo de Hammerstein. A vantagem eminente deste método é que por meio da formulação proposta é possível identificar todos os parâmetros do modelo em um único estágio, por meio de um experimento com sinal de entrada persistentemente excitante. Além disso, a metodologia apresentada nesse trabalho é o primeiro passo na busca de novas técnicas para estimar sistemas não lineares incertos que operam em malha fechada. Os resultados obtidos na simulação de Monte Carlo e a

comparação com o método PBSID-SVM sugerem que é possível obter modelos acurados para sistemas operando em malha fechada na presença de distúrbios, mostrando assim a eficiência da metodologia proposta.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro das agências brasileiras CAPES e CNPq.

Referências

- Aguirre, L. A. (2015). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*, 4 edn, Belo Horizonte, UFMG.
- Aissaoui, B., Soltani, M. e Chaari, A. (2016). Subspace Identification of Hammerstein Model With Unified Discontinuous Nonlinearity, *Mathematical Problems in Engineering*.
- Chiuso, A. (2007a). On The Relation Between CCA And Predictor-Based Subspace Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(10): 1795–1812.
- Chiuso, A. (2007b). The Role Of Vector Autoregressive Modeling in Predictor-Based Subspace Identification, *Automatica* **43**(6): 1034–1048.
- Gómez, J. C. e Baeyens, E. (2005). Subspace Identification of Multivariable Hammerstein and Wiener Models, *European Journal of Control* **11**: 1–10.
- Jalaleddini, K. e Kearney, R. E. (2011). An Identification Algorithm for Hammerstein Systems Using Subspace Method, *American Control Conference (ACC), 2011*.
- Jalaleddini, K. e Kearney, R. E. (2013). Subspace Identification of SISO Hammerstein Systems: Application to Stretch Reflex Identification, *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* **60**(10): 2725–2734.
- Jansson, M. (2003). Subspace Identification and ARX Modeling, *IFAC Proceedings Volumes* **36**(16): 1585–1590.
- Ljung, L. e McKelvey, T. (1996). Subspace Identification From Closed Loop Data, *Signal processing* **52**(2): 209–215.
- Qin, S. J. e Ljung, L. (2003). Closed-Loop Subspace Identification With Innovation Estimation, *IFAC Proceedings Volumes* **36**(16): 861–866.
- Van der Veen, G., van Wingerden, J.-W., Bergamasco, M., Lovera, M. e Verhaegen, M. (2013). Closed-Loop Subspace Identification Methods: an Overview, *IET Control Theory & Applications* **7**(10): 1339–1358.
- Van Overschee, P. e De Moor, B. (1994). N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems, *Automatica* **30**(1): 75–93.
- Van Wingerden, J.-W. (2008). *Control of Wind Turbines With 'Smart' Rotors: Proof of Concept & LPV Subspace Identification*, Tese de Doutorado, Mechanical Maritime and Materials Engineering, Delft University of Technology.
- Van Wingerden, J.-W. e Verhaegen, M. (2009a). Closed Loop Identification of MIMO Hammerstein Models Using LS-SVM, *IFAC Proceedings Volumes* **42**(10): 1650–1655.
- Van Wingerden, J.-W. e Verhaegen, M. (2009b). Closed-Loop Subspace Identification of Hammerstein-Wiener Models, pp. 3637–3642.
- Verhaegen, M. e Dewilde, P. (1992). Subspace Model Identification Part ii. Analysis of the Elementary Output-Error State-Space Model Identification Algorithm, *International Journal of Control* **56**(5): 1211–1241.
- Verhaegen, M. e Westwick, D. (1996). Identifying MIMO Hammerstein Systems in the Context of Subspace Model Identification Methods, *International Journal of Control* **63**(2): 331–349.