# IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS LPV INTERCONECTADOS PARA FINS DE CONTROLE E OBSERVAÇÃO DE SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

Nelson F. Barroso\* Samir A. M. Martins\*† Ignacio Rubio Scola\*‡ Valter J. S. Leite\*‡

\*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – CEFET-MG/UFSJ Av. Amazonas, 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil, 35510 – 000

†Departamento de Engenharia Elétrica/UFSJ/Campus Santo Antônio Pça. Frei Orlando, 170, São João del-Rei, MG, Brasil, 36307 – 352

<sup>‡</sup>Departamento de Engenharia Mecatrônica/CEFET-MG/Campus Divinópolis R. Álvares de Azevedo, 400, Divinópolis, MG, Brasil, 35503 – 822

E-mails: nelson.mecatronica@gmail.com, martins@ufsj.edu.br, ignacio.rubioscola@gmail.com, valter@ieee.org

**Abstract**— In this work, a strategy for distributed parameters systems identification, oriented to state observers design, is proposed for monitoring purposes. We consider Large-scale DPS with input edge performance, such that, under normal operating conditions, measurement of the interest variable to be monitored is possible only at the output edge of the system. We wishes, however, to estimate the dynamic behavior of such a variable at any position throughout the process. For that, the DPS is approximated by two complementary interconnected LPV models whose parameters vary according to a one-dimensional spatial coordinate. From this perspective, the output variables in each subsystem are interpreted as state variables and a model in the state space (SS-LPV), suitable for state observation, is obtained. The proposed methodology is applied to a real thermal system and its performance is validated from experimental data. A Kalman observer is implemented to illustrate a possible application.

Keywords— Distributed parameter systems. LPV models. Interconnected sub-systems. State observers.

Resumo— Neste trabalho é proposta uma estratégia de identificação de sistemas a parâmetros distribuídos (SPD), orientada à observação de estados e controle de processos. São considerados SPD com atuação em uma borda (de entrada) e medição apenas na outra borda (saída medida). O interesse de monitoramento, no entanto, é uma variável que está em posição entre a entrada e a saída medida do SPD. Com a estratégia proposta é possível obter modelos de baixa complexidade na forma de dois modelos LPV complementares interconectados, cujos parâmetros variam em função de uma coordenada espacial unidimensional. Sob tal perspectiva, as variáveis de saída em cada subsistema são interpretadas como variáveis de estado e um modelo no espaço de estados (SS-LPV), adequado à observação de estados, é obtido. A metodologia proposta é aplicada a um sistema térmico real e o seu desempenho é validado a partir de dados experimentais. Um observador baseado em Kalman é implementado para ilustrar uma possível aplicação.

Palavras-chave— Sistemas a parâmetros distribuídos. Modelos LPV. Subsistemas interconectados. Observadores de estado.

## 1 Introdução

Sistemas a parâmetros distribuídos (SPD) atraem a atenção por diversos motivos, tais como, relevância econômica e social. Exemplos de SPD são trocadores de calor (Mercere et al., 2011), fornos industriais (Teixeira et al., 2007), linhas de transmissão de energia elétrica (Peres et al., 1998), controle de vibração em sistemas flexíveis (Liu e Werner, 2016a), controle de fluxo em canais de irrigação (Bolea et al., 2014a; Bolea et al., 2014b), dentre outros. Para fins de monitoramento e controle os SPD podem ser aproximados por representações de dimensão finita, normalmente obtidas através da discretização espaço-temporal de modelos descritos por equações diferenciais parciais (EDP), o que pode demandar diferentes métodos de modelagem e níveis de complexidade estrutural dos modelos (Padhi e Ali, 2009; Caldeira et al., 2015). Em alguns casos práticos, pontos específicos do SPD podem ser representados por modelos a parâmetros concentrados (Teixeira et al., 2007), porém, essa abordagem leva a perdas no conhecimento da dinâmica do SPD em outros pontos do espaço (Krstic e Smyshlyaev, 2008).

Outra abordagem consiste na discretização espacial do SPD através de conjuntos de sensores, ou pa-

res de sensores e atuadores, dividindo o sistema original em uma rede de subsistemas a parâmetros concentrados interconectados. As interconexões vinculam cada subsistema com sua vizinhança mais próxima, permitindo a caracterização de variáveis internas do SPD por meio das relações de causa e efeito entre os modelos de dimensão finita (Liu e Werner, 2016a). Essa abordagem permite a construção de um modelo único, multidimensional, em espaço de estados aumentado, como, por exemplo, na forma de Roesser (Roesser, 1975; Caldeira et al., 2013). Duas limitações são verificadas nesse caso: a) vinculação das variáveis de estado é restrita aos pontos específicos do processo que foram utilizados na modelagem; e b) a ordem do modelo resultante cresce com o número de divisões espaciais usadas, dificultando ou até inviabilizando o uso do modelo para fins de controle ou monitoração.

Uma alternativa utiliza modelos lineares a parâmetros variantes no espaço (Spatial LPV, do inglês *Spatial Linear Parameter Varying*). Nesse caso, considera-se a mesma estrutura para todos modelos que representam cada subsistema o que permite estabelecer uma relação entre o seus parâmetros e uma variável espacial. O modelo resultante para a relação entrada-saída depende de uma função espaço-

dependente (Liu et al., 2013b; Liu et al., 2014; Liu et al., 2016b). No controle de SPD com ação na borda, costuma-se relacionar a entrada (variável manipulada) com saídas intermediárias distintas, por meio de modelos com a mesma estrutura que abrangem porções diferentes do SPD (Gustavo et al., 2005; Bolea et al., 2014a; Bolea et al., 2014b). Essas abordagens, resultam em um modelo LPV que pode ser suficientemente preciso, dispensando o uso de sensores intermediários, após identificação, para monitoramento de uma variável interna de interesse. Entretanto, como se trata de uma única representação de entrada-saída os modelos nessa forma podem não ser adequados à observação de estados. Outra limitação é a ausência de correção nas predições realizadas.

Assim, é proposto neste trabalho a obtenção de um modelo no espaço de estados adequado ao projeto de observadores e controladores para variáveis que estão entre a borda de entrada (onde há atuação de controle) e a borda de saída (onde há medição). É assumido que o modelo fenomenológico do processo é desconhecido ou que seus parâmetros físicos sejam difíceis de serem estimados. Assim, é proposta uma estratégia prática, baseada em técnicas de identificação de sistemas dinâmicos a parâmetros concentrados, para inferir uma representação dependente do espaço que seja adequada às finalidades de monitoramento e controle.

O restante deste artigo está organizado como segue: na Seção 2 é formalizado o problema tratado e são revisados alguns conceitos importantes e apresentadas as ferramentas utilizadas como base para desenvolvimento da estratégia de identificação proposta, cuja apresentação é feita na Seção 3. Um estudo de caso ilustrando a aplicação da metodologia proposta é apresentado na Seção 4, em que são usados dados experimentais. São apresentadas as conclusões na Seção 5 e referências bibliográficas.

## 2 Problema e conceitos preliminares

Neste trabalho consideramos um SPD contínuo no tempo,  $t \in \mathbb{R}^+$ , e no espaço,  $s \in \mathbb{R}^+$ , tal que,  $0 \le s \le L$ , sendo L a distância entre as bordas do sistema. Supomos o controle de borda, isto é,  $u(s,t)|_{s=0} \in \mathbb{R}$  é a variável de entrada. A saída medida é denotada por y(L,t). No entanto, interessa-se pelo monitoramento e controle de y(s,t), com 0 < s < L. Assumimos que o SPD refere-se a um processo auto-regulável operando em torno de um ponto de equilíbrio.

**Problema 1** Obter modelos a parâmetros concentrados, dependentes do espaço, que sejam adequados ao projeto de observadores e controladores para posições intermediárias do SPD, ou seja, para 0 < s < L.

Portanto, busca-se estimar a saída controlada (ou os estados do SPD) em uma posição intermediária y(s,t) dado y(L,t). Para isso utilizamos modelos NAR-MAX (do inglês, Non-linear AutoRegressive with

eXogenous input model) polinomiais com dependência espacial. Devido ao objetivo enunciado no Problema 1, serão considerados modelos com estruturas simples e de baixa ordem.

### 2.1 Modelos NARMAX/ARMAX polinomiais

O modelo NARMAX é uma representação matemática construída a partir de equações a diferenças que caracterizam a saída atual de um sistema dinâmico por meio de combinações não lineares de suas entradas e saídas passadas, ponderadas por um conjunto de parâmetros. A formulação geral da representação NARMAX é dada por (Chen, 1989):

$$y(k) = F[y(k-1), \dots, y(k-n_{y}), u(k-n_{k}), \dots, u(k-n_{k}-n_{u}), v(k-1), \dots, v(k-n_{v})] + \xi(k),$$
(1)

em que  $F(\cdot)$  é uma função não linear qualquer, k é o tempo discreto,  $y(\cdot)$  e  $u(\cdot)$  representam, respectivamente, as sequências de entradas e saídas,  $v(\cdot)$  e  $\xi(k)$  representam, respectivamente, o ruído de processo e os resíduos,  $n_y$ ,  $n_u$  e  $n_v$  representam os máximos atrasos para cada sequência e  $n_k$  representa o atraso de transporte entre a entrada e a saída.

Como a forma da função  $F(\cdot)$  é desconhecida *a priori*, a dinâmica do sistema deve ser reconstruída por meio de uma aproximação utilizando, por exemplo:

$$y(k) = \theta_0 + \sum_{i_1=1}^n \theta_{i_1} x_{i_1}(k)$$

$$+ \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=i_1}^n \theta_{i_1 i_2} x_{i_1}(k) x_{i_1}(k) + \cdots$$

$$+ \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_\ell=i_{\ell-1}}^n \theta_{i_1 \cdots i_\ell} x_{i_1}(k) \cdots x_{i_\ell}(k) + \xi(k),$$
(2)

sendo  $x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), \dots, x_{n_y+1}(k) = u(k-n_k), x_{n_y+2}(k) = u(k-n_k-1), x_{n_y+3}(k) = u(k-n_k-2), \dots, x_{n_y+n_u+1}(k) = v(k-1), x_{n_y+n_u+2}(k) = v(k-2), \dots, x_n(k) = v(k-n_v) e n = n_v + n_u + n_v.$ 

## 2.2 O estimador de mínimos quadrados (MQ)

A linearidade dos parâmetros nos modelos NAR-MAX permite a utilização de um estimador de mínimos quadrados (MQ) por meio da reescrita de (2) como:

$$y(k) = \hat{\theta}_0 + \sum_{i=1}^{n_{\theta}} \psi_i(k)\hat{\theta}_i + \xi(k),$$
 (3)

em que  $\xi(k)$  representa o erro cometido ao estimar y(k) utilizando-se uma aproximação da forma:  $\hat{y}(k) = \hat{\theta}_0 + \sum_{i=1}^{n_{\theta}} \psi_i(k) \hat{\theta}_i$ . Os regressores,  $\psi_i(k)$ , correspondem aos diferentes termos do polinômio que compõe a estrutura do modelo e  $\hat{\theta}_i$  são os seus respectivos coeficientes. Considerando N realizações de y(k)  $(k = 1, \dots, N)$ , pode-se reescrever (3) matricialmente:

$$\mathbf{y} = \Psi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi},\tag{4}$$

com a matriz de regressores  $\Psi = [1 \ \psi_1 \ \cdots \ \psi_{n_\theta}],$  o vetor de parâmetros a serem estimados  $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_0 \ \hat{\theta}_1 \ \cdots \ \hat{\theta}_{n_\theta}]^T$  e o vetor de resíduos  $\xi = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$  Utilizando-se a função de custo  $J_{MQ}(\theta) = \xi^T W \xi$  e assumindo-se que as incertezas associadas às medições,  $\mathbf{y}$ , sejam variáveis,  $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é uma matriz diagonal, definida positiva, cujos elementos ponderam as observações na determinação de  $\hat{\theta}$ . Essa função de custo pode ser minimizada por meio de

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MO} = [\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{\Psi}]^{-1} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{W} \mathbf{y}. \tag{5}$$

#### 2.3 Determinação de estrutura e validação

São utilizados dois índices, um para a seleção da estrutura dos modelos e outro para a validação dos modelos obtidos. Para a seleção da estrutura é utilizado o critério de informação do erro final de predição (FPE, do inglês, *Final Prediction Error*) dado por:

$$FPE(n_{\theta}) = N \ln[\sigma_{\xi}^{2}(n_{\theta})] + N \ln\left[\frac{N + n_{\theta}}{N - n_{\theta}}\right], \quad (6)$$

em que, N é o número de medições,  $\sigma_{\xi}^2$  é a variância do erro de modelagem (resíduos) e  $n_{\theta}$  é o número de parâmetros do modelo. O valor do FPE quantifica a redução da variância dos resíduos resultante da inclusão de um novo termo, ao mesmo tempo em que penaliza a inclusão de cada um deles. Quanto menor é o valor do FPE melhor é a estrutura correspondente (Ljung, 1999).

A validação do modelo dinâmico resultante, por sua vez, é feita por meio do erro médio quadrático normalizado (NRMSE, do inglês, *Normalized Root Mean Square Error* dado por:

NRMSE = 
$$\left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} (y(k) - \bar{\mathbf{y}})^2}}\right) \times 100\%.$$

Para uma mesma janela de dados medidos, o NRMSE permite comparar a qualidade das estimativas de modelos diferentes. Quanto mais próximo de 100%, melhor é o ajuste do modelo às medições (Chen, 1989).

Cabe salientar que para a solução do Problema 1, nem sempre os melhores valores de FPE e NRMSE levam a uma melhor solução para o problema. Isso deve-se ao fato de que modelos mais simples podem ser mais adequados, por exemplo, ao projeto de controladores.

## 3 Estratégia proposta

Em função do SPD considerado ser autoregulável e a solução buscada para o Problema 1 ser considerada para uma faixa de operação estreita em torno de um ponto de equilíbrio (controle de regulação), apenas os dois primeiros termos e o termo dos resíduos da estrutura polinomial descrita por (2) devem ser considerados. O modelo resultante possui estrutura ARMAX polinomial.

Tomando-se p medidas de y(s,k) em p posições específicas,  $s_j$ ,  $j=1,\ldots,p$ , igualmente distribuídas ao longo do processo, através de um conjunto de sensores (temporários), de forma que,  $s_{j+1}-s_j=\Delta s$  o SPD é espacialmente discretizado conforme indicado na Figura 1(a). O espaçamento entre sensores,  $\Delta s$ , deve ser suficientemente pequeno para capturar o perfil espacial da variável de interesse, porém, deve ser suficientemente grande para garantir  $y(s_j,k)\neq y(s_{j+1},k)$ , ou seja, para detectar variação da variável de interesse. Cabe ressaltar que os sensores usados nas medições intermediárias, referentes às posições  $s_j=1,\ldots,p-1$ , não serão usados após a modelagem, podendo, portanto, serem removidos do processo.

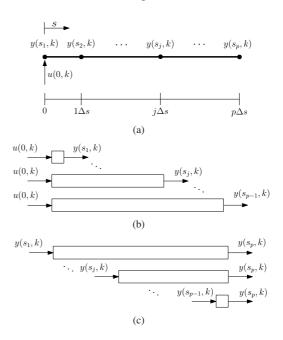


Figura 1: Representação esquemática do procedimento de identificação proposto.

A partir da discretização espacial proposta é possível aproximar o SPD como um conjunto de p subsistemas a parâmetros concentrados que relacionam a variável de entrada, u(0,k), com cada uma das variáveis de saída,  $y(s_i,k)$ , conforme ilustra a Figura 1(b) e p-1subsistemas a parâmetros concentrados que tomam cada uma das variáveis de saída,  $y(s_i,k)$ , como entradas e as relacionam com a variável medida de saída, localizada na borda do processo,  $y(s_p,k)$ , conforme ilustra a Figura 1(c). Feito isso, cada subsistema de cada conjunto pode ser identificado utilizando-se técnicas de identificação de sistemas a parâmetros concentrados. Nesta proposta, assume-se a mesma estrutura para cada conjunto de subsistemas: conjunto 1, de u(0,t) para  $y(s_i,t)$ , e *conjunto* 2, de  $y(s_i,t)$  para  $y(s_p,t)$ . Veja Figura 2. Isso permite recuperar a dependência espacial dos parâmetros de cada conjunto de modelos do SPD via ajuste polinomial dos parâmetros correspondentes em cada ponto do espaço.

Esse procedimento resulta em dois modelos de entrada-saída complementares, interconectados, cujos parâmetros variam de acordo com um conjunto de

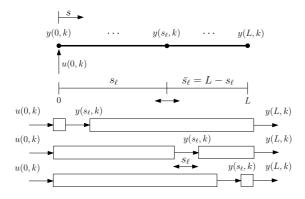


Figura 2: Aproximação de SPD por modelos LPV espaço-dependentes interconectados.

funções contínuas espaço-dependentes. Os modelos de entrada-saída são conhecidos, dessa forma, como modelos LPV espaço-dependentes. Considerando a representação ARMAX polinomial os modelos LPV espaço-dependentes para os conjuntos 1 e 2 podem ser descritos, respectivamente, por

$$y(s_{\ell},k) = \theta_{0}(s_{\ell}) + \sum_{i_{y}=1}^{n_{y}} \theta_{i_{y}}(s_{\ell})y(s_{\ell},k-i_{y})$$

$$+ \sum_{i_{u}=0}^{n_{u}} \theta_{i_{u}+n_{1}}(s_{\ell})u(k-n_{k}-i_{u})$$

$$+ \sum_{i_{y}=1}^{n_{y}} \theta_{i_{y}+n_{2}}(s_{\ell})v(s_{\ell},k-i_{y}) + \xi_{1}(s_{\ell},k),$$
(8)

$$y(L,k) = \phi_0(\bar{s_\ell}) + \sum_{i_y=1}^{n_y} \phi_{i_y}(\bar{s_\ell}) y(L,k - i_y)$$

$$+ \sum_{i_u=0}^{n_u} \phi_{i_u+n_1}(\bar{s_\ell}) y(s_\ell,k - n_k - i_u)$$

$$+ \sum_{i_y=1}^{n_v} \phi_{i_v+n_2}(\bar{s_\ell}) v(\bar{s_\ell},k - i_v) + \xi_2(\bar{s_\ell},k),$$
(9)

sendo que, n1 = ny + 1 e n2 = ny + nu.

**Observação 1** Note que as funções que definem os parâmetros dos modelos dependem, respectivamente, das distâncias,  $s_\ell$ , da borda anterior do processo até o ponto intermediário de interesse, e de  $\bar{s_\ell} = L - s_\ell$ , tomado do ponto intermediário de interesse até a borda posterior do processo conforme ilustra a Figura 2. Portanto, os modelos LPV abrangem porções complementares do sistema original à medida que a variável relacionada ao espaço,  $s_\ell$ , informada pelo usuário, é deslocada ao longo do processo. Tais modelos são, respectivamente, denotados por LPV $_{u\times y_i}(s_\ell)$  e LPV $_{y_i\times y_o}(\bar{s_\ell})$ , correspondendo aos conjuntos 1 e 2 de modelos descritos anteriormente.

Tomando-se a parte referente ao modelo de processo para os conjuntos 1 e 2, modelos  $LPV_{u \times y_i}(s_\ell)$  e  $LPV_{y_i \times y_o}(\bar{s_\ell})$ , e aplicando-se a transformada Z unilateral, obtém-se duas funções de transferência distintas, que podem ser reescritas como representações no

espaço de estados, por exemplo na forma canônica observável (Chen, 2013). Neste caso, as variáveis de saída, y(L,k) e  $y(s_\ell,k)$ , são admitidas como sendo as variáveis de estado  $x_1(L,k)$  e  $x_2(s_\ell,k)$ . As duas equações de estado resultantes, podem então, ser agrupadas em um único sistema de equações em um espaço de estados aumentado. É obtido, dessa maneira, um modelo dependente de parâmetros variantes no espaço de estados, SS-LPV $(s_\ell,\bar{s_\ell})$ , que é espaço-dependente. A forma geral da equação de estados SS-LPV $(s_\ell,\bar{s_\ell})$  é, portanto, dada por:

$$\mathbf{x}(\mathbf{s},k+1) = A(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})\mathbf{x}(\mathbf{s},k) + B(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})u(0,k) + \mathbf{w}(s_{\ell},\bar{s_{\ell}},k)$$

$$y(L,k) = C\mathbf{x}(\mathbf{s},k) + v(L,k),$$
(10)

em que,  $\mathbf{s} = (L, s_\ell)$ ,  $\mathbf{w}(s_\ell, \bar{s_\ell}, k)$  representa o ruído de processo e v(k) representa o ruído de medição. Note que, nesse caso,  $\mathbf{w}(s_\ell, \bar{s_\ell}, k)$  pode ser estimado por meio dos modelos do ruído de processo obtidos na etapa de identificação dos modelos a parâmetros concentrados e  $v(s_\ell, k)$  pode ser estimado a partir dos sinais medidos. O modelo (10)-(11) pode ser usado tanto para a síntese de observadores quanto de controladores. Em particular, espera-se que o uso de observadores a partir de (10)-(11) possa resultar em boas estimativas dos estados SPD em posições intermediárias do espaço de interesse, em virtude das correções de estimação natural dos observadores (Besançon, 2007).

## 4 Estudo de caso

A metodologia proposta é aplicada em um sistema de aquecimento de ar ilustrado na Figura 3, cuja dinâmica é típica de processos industriais que envolvem fenômenos de transporte de massa e/ou energia como, por exemplo, fornos de reaquecimento de O ar é insuflado na extremidade esquerda de um tubo em acrílico com comprimento útil de L = 1400mm e seção transversal quadrada,  $100mm \times$ 100mm, com velocidade constante e à temperatura ambiente. Na borda de entrada, o ar é aquecido por meio de um resistor de aquecimento cuja potência, u(0,k), pode ser variada pelo usuário. Em funcionamento normal, apenas a temperatura na borda da direita, y(L,t), é medida. Conforme enunciado no Problema 1, desejase estimar o valor da temperatura,  $y(s_{\ell},k)$ , em posições arbitrárias,  $s_{\ell}$ , ao longo do comprimento útil, L, do tubo.

Para obtenção do modelo SS-LPV $(s_\ell,\bar{s_\ell})$ , o tubo foi virtualmente dividido em oito segmentos de igual comprimento ( $\Delta s=175mm$ ) e instalados (temporariamente) nove termopares do tipo K. Para avaliar a proposta descrita na Seção 3, as cinco posições com índices impares  $(s_1, s_3, s_5, s_7 \ e \ s_9)$  foram utilizadas para identificação do sistema e as quatro posições com índices pares  $(s_2, s_4, s_5 \ e \ s_8)$  foram utilizadas para validação da estratégia proposta. O período de amostragem usado foi de  $T_s=5s$ . Os sensores utilizados foram calibrados de acordo com a faixa de operação do sistema

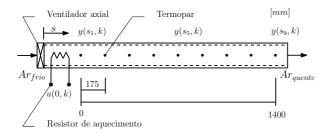


Figura 3: Representação esquemática do sistema de aquecimento de ar.

que varia de  $35^{\circ}C$  a  $95^{\circ}C$  resultando em um ajuste com desvio padrão máximo de  $\pm 0.3^{\circ}C$ .

Definidas as posições de medição, foi projetado e aplicado à entrada do sistema um sinal excitação PRBS (do inglês, Pseudo Random Binary Signal) para gerar os sinais de saída necessários ao processo de identificação. Em seguida, para verificar a repetibilidade do teste de aquisição de dados e do comportamento dos parâmetros dos modelos locais ao longo do sistema, foram realizados mais nove experimentos sob as mesmas condições de operação no que se refere à temperatura ambiente, ponto de operação, sinal de entrada e variação do sinal de entrada. O sinal PRBS foi gerado utilizando-se um gerador de 7 bits com tempo entre bits igual a 40s e variação do sinal de entrada de  $\pm 12,5\%$  em torno do ponto de operação configurado em 80% da potência máxima aplicada ao resistor de aquecimento. Portanto, foram obtidos dez realizações. Os dados de entrada e saídas coletados foram divididos em duas partes em relação ao tempo, sendo que, a primeira metade foi utilizada para identificação dos modelos locais a parâmetros concentrados e a segunda metade foi utilizada para validação de tais modelos.

Para cada uma das dez realizações, foram identificados cinco modelos ARMAX relacionando u(0,k)com  $y(s_{j},k)$  (j = 1, 3, 5, 7, 9) e quatro modelos AR-MAX relacionando  $y(s_j,k)$  (j = 1, 3, 5, 7) com  $y(s_9,k)$ obtendo-se, portanto, dois conjuntos de modelos a parâmetros concentrados. A estrutura dos modelos de cada conjunto foi determinada utilizando-se os índices FPE e NRMSE apresentados na subseção 2.3. Primeiramente, limitando-se a busca por modelos lineares de até quarta ordem, foram avaliadas as estruturas que apresentaram menor índice FPE. Em seguida, limitando o erro de modelagem em no máximo 15% e dando prioridade às estruturas com menor ordem, foram selecionadas aquelas que resultaram em maior índice NRMSE. Finalmente, as estruturas selecionadas para cada conjunto de modelos foram comparadas entre si de forma a escolher aquela que melhor representava o comportamento dinâmico da variável de interesse em todos as posições,  $s_i$ , utilizadas na identifica-

Em particular, os termos da estrutura ARMAX polinomial para cada conjunto de modelos foram definidos, respectivamente, como  $n_y = 1$ ,  $n_u = 1$ ,  $n_v = 2$  e  $n_k = 1$ , para o primeiro conjunto de modelos e,  $n_y = 1$ ,  $n_u = 2$ ,  $n_v = 2$  e  $n_k = 0$ , para o segundo

conjunto. Contudo, utilizando-se os dados dos dez ensaios realizados, os parâmetros de cada estrutura foram re-estimados obtendo-se dez estimativas para cada coeficiente em cada uma das posições ímpares definidas para identificação. Feito isso, procedeu-se com o ajuste polinomial dos parâmetros no espaço utilizando-se o estimador de mínimos quadrados ponderados descrito na subseção 2.2. Nesse caso, as incertezas atribuídas às observações foram medidas por meio da variância dos parâmetros estimadas no processo de identificação dos modelos locais a parâmetros concentrados. A matriz de peso, W, foi construída, portanto, considerando o inverso da variância dos parâmetros estimados. Em geral, essa estratégia faz com que o desvio padrão do ajuste diminua porque toda a massa de dados disponível é utilizada e maior importância é atribuída às estimativas com menor incerteza (Maybeck, 1979).

Com isso foram obtidos dois modelos ARMAX polinomiais cujos parâmetros variam de acordo com funções suaves dependentes da variável externa,  $s_\ell$  ou  $\bar{s_\ell} = L - s_\ell$ . Substituindo-se os termos  $n_y$ ,  $n_u$ ,  $n_v$  e  $n_k$  e utilizando as equações para obter uma representação no espaço de estados conforme dado por (10)-(11), obtemos:

$$A(s_{\ell},\bar{s_{\ell}}) = \begin{bmatrix} \phi_{1}(\bar{s_{\ell}}) & \phi_{2}(\bar{s_{\ell}})\theta_{1}(s_{\ell}) + \phi_{3}(\bar{s_{\ell}}) \\ 0 & \theta_{1}(s_{\ell}) \end{bmatrix}, B(s_{\ell},\bar{s_{\ell}}) = \begin{bmatrix} \phi_{2}(\bar{s_{\ell}})\theta_{2}(s_{\ell}) \\ \theta_{2}(s_{\ell}) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

 $\mathbf{x}(\mathbf{s},k) = [x_1(L,k) \ x_2(s_\ell,k)]^T$  e  $\mathbf{w}(s_\ell,\bar{s_\ell},k) = [w_1(\bar{s_\ell},k) \ w_2(s_\ell,k)]^T$ , sendo que,  $w_2(\cdot)$  e  $w_1(\cdot)$  são os respectivos modelos do ruído de processo usados na identificação. As funções polinomiais que definem os parâmetros do modelo SS-LPV $(s_\ell,\bar{s_\ell})$  são dadas por,

$$\theta_i(s_\ell) = a_1 s_\ell^2 + a_2 s_\ell + a_3,$$
 (12)

$$\phi_i(s_\ell) = b_1 \bar{s_\ell}^2 + b_2 \bar{s_\ell} + b_3, \tag{13}$$

cujos coeficientes são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Coeficientes estimados.

Tubela 1. Coefficientes estimados.			
_	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\theta_1$	$3,016 \times 10^{-8}$	$-3,393 \times 10^{-5}$	0,911
$\theta_2$	$-3,329 \times 10^{-9}$	$-1,598 \times 10^{-5}$	0,057
_	$b_1$	$b_2$	$b_3$
φ1	$-2,977 \times 10^{-8}$	$8,656 \times 10^{-5}$	0,915
φ2	$-4,826 \times 10^{-8}$	$-1,355 \times 10^{-4}$	0,817
ф3	$+5,797 \times 10^{-8}$	$8,136 \times 10^{-5}$	-0,748

A fim de validar o modelo SS-LPV( $s_\ell, \bar{s_\ell}$ ) obtido foi realizada a simulação livre do mesmo verificandose também os índices NRMSE de suas predições. As simulações foram efetuadas nas nove posições de medição de  $y(s_\ell,k)$  e na posição y(L,k), sendo assim, os valores dos índices NRMSE foram comparados entre si considerando as posições utilizadas para identificação e as posições utilizadas para validação. Em todos os casos foram obtidos valores NRMSE em torno

de 82,6% para o estado  $x_1(L,k)$  e 84,7% para o estado  $x_2(s_\ell,k)$  indicando desempenho satisfatórios do modelo geral para a plicação pretendida.

Nos gráficos da Figura 4 são apresentados os valores do erro de predição médio,  $\bar{e}_{x_i}$ , e da variância do erro de predição,  $\sigma_{e_{x_i}}$ , em cada posição avaliada. Para uma análise geral, são apresentados também a média desses valores, ou seja,  $\bar{e}_{x_i}$  e  $\bar{\sigma}_{e_{x_i}}$ , respectivamente. Verifica-se que, em média, as médias das predições dos estados  $x_1(L,k)$  e  $x_2(s_\ell,k)$  estão próximas de zero. Note que tais valores poderiam ficar mais próximos de zero caso os termos constantes fossem considerados no modelo. Verifica-se também que, em média, a variância do erro de predição, cujo maior valor é 0,1255, se encontram dentro da faixa de precisão dos termopares utilizados na identificação do sistema, cuja maior variância é 0,09. Por último, note que os valores do erro médio e os valores da variância do erro, calculados nas posições utilizadas para identificação (posições ímpares) e para validação (posições pares), não apresentam diferenças significativas, o que confere um bom desempenho do modelo geral para qualquer posição,  $s_{\ell}$ , ao longo do processo.

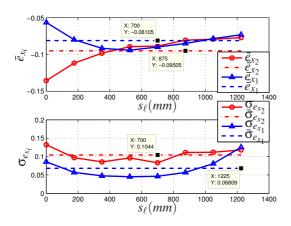


Figura 4: Médias e variâncias dos erros de predição do modelo SS-LPV( $s_{\ell},\bar{s_{\ell}}$ ).

**Aplicação 1** O modelo no espaço de estados (10)-(11) para a posição  $s_{\ell} = 175mm$  com as matrizes descritas nesta seção permitem o projeto de um observador de Kalman (Besançon, 2007) conforme segue (Para detalhes, veja (Barroso, 2017)): O ganho do observador é atualizado usando  $K(k) = P(k)C^{T}(CP(k)C^{T} + R)^{-1}$ , o estado estimado no ponto intermediário de interesse é calculado por meio de  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{s},k+1) = A(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{s},k) K(k)(C\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{s},k) - y(L,k))) + B(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})u(0,k)$  e ao final ocorre a atualização  $P(k+1) = A(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})(P(k)$ conte a attanização  $T(k+1) = A(s_{\ell},s_{\ell})(T(k)) = K(k)CP(k))A(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})^T + Q(s_{\ell},\bar{s_{\ell}})$ , em que foram usados  $Q(s_{\ell},\bar{s_{\ell}}) = \text{diag}\{\sigma^2_{w_1(s_{\ell})},\sigma^2_{w_2(\bar{s_{\ell}})}\}, R = \sigma^2_{v}$ , em que  $\sigma^2_{w_1(s_{\ell})} = 0,009008 \ \sigma^2_{w_2(\bar{s_{\ell}})} = 0,016196, \ \sigma^2_{v} = 0,003083$  foram obtidos no processo de identificação e  $P(0) = \mathbf{I} \times 10^{-5}$ . As estimativas de  $x_1$  e  $x_2$ , correspondentes respectivamente às temperaturas na saída medida e no ponto intermediário, são mostradas na Figura 5. Note que devido à diferença de condições iniciais há um erro maior nas primeiras amostras. Após a convergência do observador, verifica-se que o erro médio de estimação do observador é da ordem que  $0.5^{o}C$ , levemente superior ao desvio dos sensores  $(0.3^{o}C)$ , ilustrando a viabilidade da estratégia proposta neste trabalho. Evidentemente, observadores mais completos, incluindo estimação de alguns parâmetros e das perturbações, poderão melhorar os resultados das estimações a partir dos mesmos modelos aqui utilizados. Tais considerações serão tratadas em trabalhos futuros.

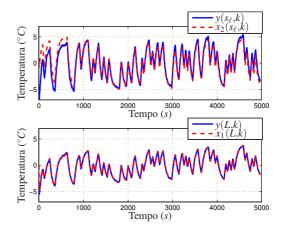


Figura 5: Predições realizadas pelo observador de Kalman na posição  $s_{\ell} = 175mm$ .

### 5 Conclusões

No presente trabalho foi apresentada uma estratégia para identificação de SPD orientada ao projeto de observadores e controladores. O SPD foi aproximado por dois subsistemas LPV complementares, interconectados, cujos parâmetros variam de acordo com funções contínuas dependentes da variável espacial. A estratégia de identificação proposta foi aplicada a um sistema térmico real e as predições do modelo geral obtido apresentaram bom desempenho em todas as posições avaliadas. Um projeto de observador foi realizado para ilustrar a viabilidade de uso da estratégia proposta. A principal vantagem da abordagem proposta é que, embora o modelo SS-LPV $(s_{\ell}, \bar{s_{\ell}})$  mantenha a característica espaço-dependente de um SPD, ele é localmente um modelo a parâmetros concentrados adequado a projetos de monitoração e controle. Além disso, as técnicas de identificação produzem estimativas do ruído de processo que podem ser convenientemente utilizadas como informações de incertezas no projeto de observadores. Para trabalhos futuros pretende-se expandir o desenvolvimento aqui realizado para o caso em que estruturas lineares não são capazes de representar adequadamente a dinâmica do sistema. Além disso, outro ponto importante a ser estudado diz respeito a quando a mesma estrutura não é capaz de representar as dinâmicas do sistema nas diversas seções consideradas. Para esses casos, técnicas de observação de estado não lineares mais sofisticadas poderão ser implementadas.

#### Referências

- Barroso, N. F. (2017). Estratégia de monitoramento de sistemas distribuídos baseada em observadores do tipo kalman, Master's thesis, PPGEL / CEFET-MG.
- Besançon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer.
- Bolea, Y., Puig, V. e Blesa, J. (2014a). Linear parameter varying modeling and identification for real-time control of open flow-irrigation canals, *Environmental Modeling & Software* **53**: 87–97.
- Bolea, Y., Puig, V. e Blesa, J. (2014b). Gain-scheduled smith predictor PID-based LPV controller for open-flow canal control, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **22**: 468–477.
- Caldeira, A. F., Coutinho, D., de Souza, C. E. e Leite, V. J. S. (2013). Numerically tractable stability tests for 2-D singular discrete-time systems, *Proc. of the* 52<sup>nd</sup> *Conf. on Dec. and Control* pp. 3391–3396.
- Caldeira, A. F., Prieur, C., Coutinho, D. e Leite, V. J. S. (2015). Modeling and control of flow with dynamical boundary actions, *Proc. of the* 2015 *IEEE Conference on Control Applications*, pp. 1579–1584.
- Chen, C. (2013). *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, Inc.
- Chen, S.; Billings, S. A. (1989). Representations of non-linear systems: the NARMAX model, *International Journal of Control* **49**: 1013–1032.
- Gustavo, B., D., F. e Gay, P. (2005). LPV approximation of distributed parameter systems in environmental modelling, *Environmental Modeling & Software* **20**: 1063–1070.
- Krstic, M. e Smyshlyaev, A. (2008). Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs, SIAM.
- Liu, Q., Gross, J., Pfeiffer, S. e Werner, H. (2014). A local approach for the LPV identification of an actuated beam using piezoelectric actuators and sensors, *Mechatronics* **24**: 289–297.
- Liu, Q., Hoffmann, C. e Werner, H. (2013b). Distributed control of parameter-varing saptially interconnected systems using parameter-dependent Lyapunov functions, pp. 3278–3283.
- Liu, Q., Mohammadpour, J., Toth, R. e Meskin, N. (2016b). Non-parametric identification of linear parameter-varying spatially-interconnected systems using an LS-SVM approach, *Proc. of the* 2016 American Control Conf. pp. 4592–4597.

- Liu, Q. e Werner, H. (2016a). Distributed identification and control of spatially interconnected systems with application to an actuated beam, *Control Engineering Practice* **54**: 104–116.
- Ljung, L. (1999). System Identification Theory for the User, Prentice Hall.
- Maybeck, P. S. (1979). Stochastic Models, Estimation and Control, Vol. 1, Academic Press.
- Mercere, G., Palsson, H. e Poinot, T. (2011). Continuous-time linear parameter-varying identification of a cross flow heat exchanger: A local approach, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **19**: 64–76.
- Padhi, R. e Ali, S. F. (2009). An account of chronological developments in control of distributed parameter systems, *Annual Reviews in Control* **33**: 59–68.
- Peres, P. L. D., Bonatti, I. S. e Lopes, A. (1998). Transmission line modeling: A circuit theory approach, *SIAM Review* **40**: 347–352.
- Roesser, R. (1975). A discrete state-space model for linear image processing, *IEEE Transc. Automatic Control* **20**: 0–10.
- Teixeira, B. O. S., Jota, F. G. e Teixeira, M. H. (2007). Modelagem, controle e otimização do processo dos fornos de reaquecimento de placas, *SBA Controle & Automação* **18**: 67–93.