IDENTIFICAÇÃO ITERATIVA POR CORRELAÇÃO CANÔNICA DE SISTEMAS MIMO LPV

J. ANDRES PUERTO ACOSTA* CELSO P. BOTTURA*

**Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes -LCSI-DSIF-FEEC-UNICAMP*
Av. Albert Einstein - 400, Cidade Universitária Zeferino Vaz
Distrito Barão Geraldo
Campinas, SP, 13083-852, Brasil

Email: japa1@dsif.fee.unicamp.br, bottura@fee.unicamp.br

Abstract— The iterative algorithm ICCALPV for state space identification of linear parameter varying (LPV) multivariable systems is here proposed. It involves three steps: *i)* LPV-MIMO model reformulation with affine parameter dependence for optimal future outputs prediction to calculate its state space and orthonormal basis through the past and present-future subspaces intersection via conditional canonical correlation analysis. *ii)* With the nominal state vector from the first step, the LPV state space model with affine parameter dependence is reformulated to obtain a new state vector and the Kalman gain. *iii)* For the second step estimated state vector, iterative calculations of LPV innovative state space model with affine parameter dependence are made. An application to the iterative identification of a LPV-MIMO system with three scheduling parameters is presented.

Keywords— LPV-MIMO system identification, iterative LPV identification, conditional canonical correlation.

Resumo— Neste trabalho propomos o algoritmo iterativo no espaço de estado ICCALPV para identificação de sistemas multivariáveis com parâmetros lineares variantes no tempo (LPV). Ele consiste de três passos: *i)* Reformular o modelo MIMO LPV com dependência afim aos parâmetros e realizar a predição ótima das saídas futuras para calcular o espaço de estado e sua base ortonormal através da intersecção do subespaço do passado com o subespaço do presente e futuro via análise de correlação canônica condicional. *ii)* Com o vetor de estado nominal obtido no primeiro passo, reformula-se o modelo de estado LPV na forma afim aos parâmetros de maneira que permita obter uma nova estimativa do vetor de estado e o ganho de Kalman. *iii)* Tendo o vetor de estado estimado no segundo passo, é calculado iterativamente o modelo de estado LPV afim aos parâmetros na forma inovativa. Para ilustrar a eficácia do algoritmo realizamos a identificação iterativa de um sistema LPV de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), com três parâmetros que variam no tempo linearmente

Palavras-chave— Identificação de sistemas LPV MIMO, Identificação iterativa, Correlação canônica condicional.

1 Introdução

Sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV)são sistemas com não linearidade suave e que melhor aproximam sistemas reais, por exemplo sistemas com ganho escalonado. Para o controle baseado em modelo de sistemas LPV, sua identificação tem um papel importante como pode ser visto em (Yang et al., 2018; Golabi et al., 2017; Coxy and Tóht, 2016; Visser et al., 2015; Proimadis et al., 2015) e nas suas referências. Em (Lopes dos Santos et al., 2007) apresenta-se uma abordagem iterativa de identificação por subespaços de sistemas LPV, na qual o vetor de parâmetros variantes é considerado como um ruído branco de média zero e variância unitária, característica difícil de cumprir em um sistema real; Em (Lopes dos Santos et al., 2008), os autores consideram o vetor de parâmetros como um vetor não ruído branco e apresentam um método de identificação com aproximações sucessivas, com três passos principais, o primeiro: a identificação de um modelo nominal, o segundo: a estimação do estado usando um filtro baseado na iteração anterior, e finalmente a identificação do modelo LPV.

Neste trabalho estendemos o método de identificação estocástica de sistemas por subespaços CCA[1] para a identificação de sistemas estocásticos LPV. Ele permite o cálculo do vetor de estado em apenas um passo, evitando a filtragem do vetor de estado em um passo adicional, dentre outras ventagens.

Nesta proposta realizamos a identificação global do sistema LPV baseada nos dados de entrada-saída do sistema; dita proposta é dividida em três passos. No primeiro passo obtemos informações anteriores ao presente dos sinais de entradas u_k, saídas y_k, e parâmetros $\delta_{i,k}$; logo após, inserimos o produto Khatri-Rao para expandir as entradas e o vetor de estado, com os parâmetros e suas informações anteriores ao presente, com o fim de representar os subespaços do passado e do futuro. Posteriormente é aplicado o método de análise de correlação canônica para obter o vetor de estado nominal estimado e separa-lo em estado estimado e erro de estimação. No terceiro passo pretende-se reduzir o erro da estimação do vetor de estado, melhorando iterativamente a estimação do mesmo. O procedimento aqui apresentado baseia-se na abordagem feita em (Lopes dos Santos et al., 2008), e se diferencia daquele trabalho por proceder em batelada e não termo a termo. O algoritmo apresentado neste trabalho usando o produto Khatri-Rao, permite uma implementação em bloco e uma rápida convergência mesmo quando as matrizes de entrada crescem exponencialmente em relação às quantidades de parâmetros e de entradas-saídas do sistema.

O método iterativo aqui proposto, é descrito da seguinte maneira: primeiro apresentamos brevemente os conceitos de correlação canônica (Hotelling, 1936) e o método CCA (Akaike, 1975; Picci and Katayama, 1996; Forero, 2016); em seguida a estrutura das ma-

[1] Canonical Correlation Analysis

trizes aumentadas de dados, onde é inserido o produto Khatri-Rao, para calcular em bloco a interação entre o estado e os parâmetros e a entrada e os parâmetros e seus respectivos valores anteriores ao presente; neste passo ainda são criados os subespaços do passado e do futuro, com os quais é calculado o preditor ótimo e o vetor de estado através do uso da correlação canônica. Posteriormente é reformulado o modelo de estado LPV na forma afim aos parâmetros de maneira que o estado estimado possa ser inserido e refinado na estimação iterativa. Finalmente é feita uma implementação de um sistema LPV MIMO com três parâmetros que variam linearmente com o tempo.

2 Fundamentos

Nesta seção apresentamos de forma breve a análise de correlação canônica e o método de identificação CCA[2]. Para ampliar as informações sobre estes temas recomenda-se ver (Hotelling, 1936; Akaike, 1975; Larimore, 1990; Forero et al., 2015).

2.1 *Correlação Canônica*

O problema de encontrar um par de transformações lineares tal que um elemento de um conjunto de variáveis transformadas esteja correlacionado com um único elemento no outro conjunto de variáveis é resolvido pela análise de correlação canônica.

Para o cálculo da correlação, considere dois vetores aleatórios v_1 e v_2 com matrizes de covariância dadas por:

$$\Sigma = E\left\{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \Sigma_{v_1v_1} & \Sigma_{v_1v_2} \\ \Sigma_{v_2v_1} & \Sigma_{v_2v_2} \end{bmatrix} \in \quad \mathbb{R}^{(k+l)\times(k+l)} \tag{1}$$

supondo que $\Sigma_{v_1v_1} > 0$ e $\Sigma_{v_2v_2} > 0$ e definindo-se duas variáveis escalares como: $w_1 = a^T v_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_{1,i}$, e $z_1 = b^T v_2 = \sum_{j=1}^{l} \beta_j v_{2,j}$, com $a \in \mathbb{R}^k$ e $b \in \mathbb{R}^l$ respectivamente. O propósito do procedimento é encontrar os vetores a e b que maximizam a correlação entre w_1 e z_1, que pode-se expressar como:

$$\varepsilon = \max_{a,b}\left\{\frac{cov\{a^T v_1, b^T v_2\}}{\sqrt{cov\{a^T v_1\}}\sqrt{cov\{b^T v_2\}}}\right\}$$

onde ε a é correlação canônica.

2.2 *Método de identificação CCA*

A técnica CCA para identificação de sistemas estocásticos multivariáveis no espaço de estado baseia-se na busca da correlação canônica condicional entre o futuro e o passado, dadas as entradas futuras (Picci and Katayama, 1996).

A partir da correlação, é possível obter as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas; com as quais é feito o cálculo do estado e das matrizes de estado. As matrizes de covariância entre futuro e o passado são definidas por:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & \Sigma_{up} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{pu} & \Sigma_{pp} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{fu} & \Sigma_{fp} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} U_{l|2l-1} \\ \check{W}_{0|l-1} \\ Y_{l|2l-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{l|2l-1} \\ \check{W}_{0|l-1} \\ Y_{l|2l-1} \end{bmatrix}^T = \bar{L}\bar{L}^T \tag{2}$$

onde $\bar{L}$ representa a matriz bloco triangular inferior devida à decomposição LQ da matriz de covariância. l é o número de blocos nas matrizes Toeplitz $\check{W}_{0|k-1}$, e Hankel $U_{l|2l-1}$, $Y_{l|2l-1}$. A matriz bloco de Toeplitz do passado $\check{W}_{0|k-1}$ é composta pelo conjunto dado por: $w_- = \begin{bmatrix} y_- \\ u_- \end{bmatrix}$, sendo que y_- e u_- são os passados dos sinais de saída y_k e de entrada u_k. As matrizes $U_{l|2l-1}$, $Y_{l|2l-1}$, são as matrizes do futuro das entradas e saídas, respectivamente.

De (2) pode-se obter cada uma das matrizes de covariância, como:

$$\begin{aligned} &\Sigma_{uu} = L_{11}L_{11}^T, \qquad \Sigma_{pu} = L_{21}L_{11}^T, \quad \Sigma_{fp} = L_{31}L_{21}^T + L_{32}L_{22}^T, \\ &\Sigma_{fu} = L_{31}L_{11}^T, \qquad \Sigma_{pp} = L_{21}L_{21}^T + L_{22}L_{22}^T, \\ &\Sigma_{ff} = L_{31}L_{31}^T + L_{32}L_{32}^T + L_{33}L_{33}^T \end{aligned} \tag{3}$$

e a correlação canônica condicional das saídas futuras, dadas as entradas futuras como:

$$\Sigma_{ff|u} := E\left\{\hat{E}(f|u_+^\perp)\hat{E}(f|u_+^\perp)^T\right\} \tag{4}$$

onde $\hat{E}(f|u_+^\perp)$ indica a projeção ortogonal do futuro sobre o complemento ortogonal de u e $E\{.\}$ a esperança. De forma similar é obtida $\Sigma_{pp|u}$.

As matrizes com os autovetores canônicos são obtidas mediante os cálculos das raízes quadradas inversas das matrizes de covariâncias condicionais $\Sigma_{ff|u}$ e $\Sigma_{pp|u}$, da forma:

$$\Sigma_{ff|u} = LL^T \qquad \Sigma_{pp|u} = MM^T \tag{5}$$

Mediante a decomposição em valores singulares das matrizes L e M e da matriz de covariância condicional do futuro e do passado dadas as entradas futuras $\Sigma_{fp|u}$, são obtidas as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendidas como:

$$\begin{aligned} &L^{-1}\Sigma_{fp|u}M^{-T} = U\Sigma V^T, \\ &\mathscr{O} = LU\Sigma^{1/2} \quad \mathscr{C} = \Sigma^{1/2}V^T M^T \end{aligned} \tag{6}$$

O vetor de estado estimado $\hat{X}_k$, é calculado usando a controlabilidade estendida, da forma:

$$\hat{X}_k = \mathscr{C}_k \Sigma_{pp|u}^{-1} \check{W}_{0|k-1} \tag{7}$$

e as matrizes de estado são calculadas como:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ \hat{Y}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ke \\ e \end{bmatrix} \tag{8}$$

onde $\hat{X}_{k+1}$ é o vetor de estado estimado no instante $k+1$. O ganho de Kalman calcula-se a partir da resolução da equação de Riccati.

3 Problema de Identificação LPV

O problema abordado neste trabalho é obter o modelo discreto de um sistema MIMO-LPV, dependente

[2] Do inglês: Canonical Correlation Analysis

de múltiplos parâmetros, os quais variam em função do tempo. Dito modelo pretende-se obter a partir das medições das entradas $u_k \in \mathscr{R}^{m\times N}$, saídas $y_k \in \mathscr{R}^{p\times N}$ e parâmetros $\delta_k \in \mathscr{R}^{s\times N}$, medidos em um único experimento. O modelo global do sistema MIMO-LPV é dado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathscr{A}\S_k + \mathscr{B}\sqcap_k + \lambda_k \\ y_k &= \mathscr{C}\S_k + \mathscr{D}\sqcap_k + \zeta_k \end{aligned} \tag{9}$$

onde $\mathscr{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_s \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n\times n+(s+1)}$, $\mathscr{B} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_s \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n\times m+(s+1)}$, $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_s \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{p\times n+(s+1)}$, $\mathscr{D} = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & \dots & D_s \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{p\times m+(s+1)}$, $\S_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n+(s+1)\times N}$, $\sqcap_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{m+(s+1)\times N}$, $\lambda_k \in \mathscr{R}^{n\times N}$, $\zeta_k \in \mathscr{R}^{m\times N}$, λ_k, ζ_k são ruídos brancos de média zero e variância unitária, para $k = 1,2,\dots,N$ amostras. O modelo em (9), é representado na forma inovativa como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathscr{A}\S_k + \mathscr{B}\sqcap_k + \mathscr{K}e_k \\ y_k &= \mathscr{C}\S_k + \mathscr{D}\sqcap_k + e_k \end{aligned} \tag{10}$$

sendo e_k o processo de inovação e $\mathscr{K} = \begin{bmatrix} K_0 & 0_{n\times m} & \dots & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n\times m+(s+1)}$, o ganho de Kalman.

4 Método ICCALPV

A obtenção do modelo inicial é feita realizando uma expansão linear das entradas e saídas medidas, com o propósito de criar os espaços do passado e do futuro do modelo inicial. Com ele é construída a matriz de covariâncias à qual aplica-se a decomposição QR e posteriormente a SVD[3] para obter o preditor ótimo e a correlação canônica, informações essenciais para o cálculo do vetor de estado do sistema inicial. O procedimento requer que o modelo em (9), seja reformulado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 x_k + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \overbrace{A_p(x_k \otimes \delta_k) + \lambda_k}^{\lambda_k^0} \\ y_k &= C_0 x_k + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} \underbrace{C_p(x_k \otimes \delta_k) + \zeta_k}_{\zeta_k^0} \end{aligned} \tag{11}$$

onde λ_k^0 e ζ_k^0, são considerados ruído. No modelo (11), pode ser aplicado o método de identificação CCA LTI[4], sob o suposto de que o sistema cumpre com as característica de um sistema estocástico linear. É claro que os ruídos λ_k^0 e ζ_k^0 não tem uma distribuição de ruído branco gaussiano, como é discutido em (Lopes dos Santos et al., 2008), porém, é possível obter a informação com viés do estado estimado $\hat{x}_k$. Este passo é considerado a primeira iteração, se o modelo associado ao estado estimado é estável.

[3] Singular Value Decomposition

[4] Linear Time Invariant

4.1 *Matriz Aumentada de Dados de Entrada*

Para calcular em bloco a matriz de dados de entrada aumentada utilizamos o produto Khatri-Rao. No primeiro passo construímos as matrizes bloco de Hankel de dados das entradas e dos parâmetros como:

$$U_{0|M} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(N-M+1) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(N-M+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(M-1) & u(M) & \cdots & u(N-1) \\ u(M) & u(M+1) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}$$

e de forma semelhante a matriz bloco de Hankel dos parâmetros $\Delta_{0|M}$.

Posteriormente realiza-se o produto Katri-Rao entre $\Delta_{0|0}$ e $U_{0|0}$ para construir a matriz de entradas aumentada: $u_{a0|0} = \begin{bmatrix} U_{0|0} \\ \rho_{0|0} \odot U_{0|0} \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{s(1+m)\times(N-l*i+1)}$ sendo l o número de blocos usados para construir as matrizes de dados $U_{0|M}$, $\Delta_{0|M}$, i o horizonte de dados; e $\rho_{0|0} = \Delta_{0|0} \in \mathscr{R}^{s\times(N-l*i+1)}$.

A matriz de entradas com uma informação anterior ao presente pode-ser expressa como: $u_{a0|1} = \begin{bmatrix} u_{a1|1} \\ \rho_{0|1} \odot u_{a0|0} \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{s(1+m)(1+s)\times(N-l*i+1)}$ com $\rho_{0|1} = \begin{bmatrix} \Delta_{1|1} \\ \Delta_{1|1} \odot \Delta_{0|0} \end{bmatrix}$

Para informações mais anteriores a do presente a matriz de entradas aumentadas pode ser expressa como: $u_{a0|t} = \begin{bmatrix} u_{at-1|t} \\ \rho_{t-1|t} \odot u_{at-1|t-1} \end{bmatrix}$ sendo, $\rho_{t-1|t} = \begin{bmatrix} \Delta_{t|t} \\ \Delta_{t|t} \odot \Delta_{t-1|t-1} \end{bmatrix}$

A matriz de dados de entrada $u_{a0|t}$ pode conter $t = 1,2,3,\dots,$ informações do passado, porém vai crescer exponencialmente em relação à quantidade de parâmetros s e de entradas m; por tanto é recomendável o uso de no máximo dois vetores de dados anteriores ao presente.

4.2 *Estimação Inicial do Estado*

Neste trabalho coloca-se especial interesse na estimação do estado através do método de correlação canônica, já que com essa estimação é desenvolvida a estimação posterior do modelo MIMO LPV como é discutido na Seção 4.3.

O modelo em (11), pode ser reformulado em relação às informações do passado usadas, isto é:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 x_k + B_{a,t} u_{a0|t,k} + \lambda_{a,t,k}^0 \\ y_k &= C_0 x_k + C_{a,t} u_{a0|t,k} + \zeta_{a,t,k}^0 \end{aligned} \tag{12}$$

onde o subíndice a indica um vetor/matriz aumentado e k o instante de tempo. Na Equação (12), $u_{a0|t,k}$ corresponde à entrada aumentada no instante de tempo k; e as matrizes $B_{a,t}$, $C_{a,t}$, $\lambda_{a,t,k}^0$ e $\zeta_{a,t,k}^0$ são definidas como segue:

$$B_{a,t} = \begin{bmatrix} B_{a,t-1} & A_{p,t-1}(I_{s,t-1} \otimes B_{a,0}) \end{bmatrix}$$

com $B_{a,1} = \begin{bmatrix} B_{a,0} & A_p(I_s \otimes B_{a,0}) \end{bmatrix}$, $B_{a,0} = \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix}$, e $A_{p,1} = A_p \begin{bmatrix} (I_s \otimes A_0) & (I_s \otimes A_p) \end{bmatrix}$, e de forma semelhante para $C_{a,t}$.

Os ruídos são definidos como: $\lambda_{a,t,k}^0 = \begin{bmatrix} I_n & A_{p,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{t-1,k} \\ \delta_{t-1,k} \otimes \lambda_{0,k-t} \end{bmatrix}$ e semelhante com $\zeta_{a,k}^0$. A partir das entradas e saídas do modelo em (12), a estimação do estado inicial é calculada através dos seguintes passos:

1. construir as matrizes Bloco de Hankel das entradas aumentadas $u_{a0|t,k}$ e y_k ou seja:

$$U_{a0|M} = \begin{bmatrix} u_{a0|t}(0) & u_{a0|t}(1) & \cdots & u_{a0|t}(N-M+1) \\ u_{a0|t}(1) & u_{a0|t}(2) & \cdots & u_{a0|t}(N-M+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{a0|t}(M-1) & u_{a0|t}(M) & \cdots & u_{a0|t}(N-1) \\ u_{a0|t}(M) & u_{a0|t}(M+1) & \cdots & u_{a0|t}(N) \end{bmatrix}$$

e

$$Y_{0|M} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(N-M+1) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(N-M+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(M-1) & y(M) & \cdots & y(N-1) \\ y(M) & y(M+1) & \cdots & y(N) \end{bmatrix}$$

2. definir os subespaços do passado U_a^-, Y_a^- e do futuro U_a^+, Y_a^+ a partir das entradas aumentadas e das saidas, com o propósito de encontrar o preditor ótimo das saídas futuras baseado nas entradas aumentadas presentes e passadas:

$$\hat{y}_{\{f|p\}} = Y^+ + \tilde{y}_{\{f|p\}}$$

onde $\{f \mid p\}$ representa a projeção ortogonal do passado ao longo do futuro, $\tilde{y}_{\{f|p\}}$ o erro de predição; e $\hat{y}_{\{f|p\}}$ o preditor ótimo, ou seja $\tilde{y}_{\{f|p\}} \perp U_a^-$ e $\hat{y}_{\{f|p\}} \in U_a^-$

3. obter o espaço preditor gerado pelos preditores ótimos como:
$$X := \overline{span}\{\hat{y}_{\{f|p\}}\}$$

4.3 Estimação do Modelo MIMO LPV

Neste procedimento é estimado o modelo LPV afim aos parâmetros apresentado em (10), a partir das entradas, saídas, parâmetros medidos, e do estado estimado $\hat{x}_k$, o qual pode ser expresso como: $\hat{x}_k = x_k - \tilde{x}_k$, sendo $\tilde{x}_k$ o erro de estimação.

O modelo em (9), substituindo $x_k = \hat{x}_k + \tilde{x}_k$, pode ser reformulado como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \\ (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \lambda_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{x}_k + \tilde{x}_k) \\ x_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \zeta_k \end{aligned} \tag{13}$$

separando a estimação do estado, do erro de estimação, a equação em (13) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \lambda_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \zeta_k \end{aligned} \tag{14}$$

a partir de (14), o sistema a identificar é:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 \hat{x}_k + \begin{bmatrix} B_0 & B_p & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \\ \hat{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \lambda_k}^{\lambda_k^1} \\ y_k &= C_0 \hat{x}_k + \begin{bmatrix} D_0 & D_p & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \\ \hat{x}_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_k \otimes \delta_k \end{bmatrix} + \zeta_k}_{\zeta_k^1} \end{aligned} \tag{15}$$

4.4 Algoritmo de Identificação ICCALPV

A estimação do sistema MIMO LPV é feita da seguinte maneira

1. Obtenha a estimação do vetor de estado $\hat{x}^0$ a partir do modelo apresentado na Seção 4.2

2. calcule iterativamente o estimador de estado do modelo (15), apresentado na Seção 4.3; ou seja:

   (a) calcule a nova estimação do vetor de estado $\hat{x}^i$, usando o $\overline{span}\{\hat{x}^{i-1}\}$, $\overline{span}\{u_k\}$, $\overline{span}\{y_k\}$ e $\overline{span}\{\delta_k\}$, para construir os subespaços do passado $\hat{X}^-$, U^-, Y^-, Δ^- e os subespaços do futuro $\hat{X}^+$, U^+, Y^+, Δ^+

   (b) construa o subespaço do passado e presente das entradas aumentadas a partir de: $u_{a,k}^* = \begin{bmatrix} U_{0|0} \\ U_{0|0} \odot \Delta_{0|0} \\ \hat{X}_{0|0} \odot \Delta_{0|0} \end{bmatrix}$, com $U_a^* = \begin{bmatrix} U_a^{*-} \\ U_a^{*+} \end{bmatrix} = \overline{span}\{u_{a,k}^*\}$ onde $\odot$ indica o produto Khatri-Rao.

   (c) construa o subespaço do passado e presente das saídas como:
   $Y = \begin{bmatrix} Y^- \\ Y^+ \end{bmatrix} = \overline{span}\{y_k\}$.

   (d) com os subespaços Y e U_a^*, encontrar o preditor ótimo das saídas futuras baseado nas entradas aumentadas presentes e passadas, ou seja:

   $$\hat{y}_{\{f|p\}} = Y^+ + \tilde{y}_{\{f|p\}}$$

   onde $\{f \mid p\}$ representa a projeção ortogonal do passado ao longo do futuro, $\tilde{y}_{\{f|p\}}$ o erro de predição; e $\hat{y}_{\{f|p\}}$ o preditor ótimo, ou seja $\tilde{y}_{\{f|p\}} \perp U_a^{*-}$ e $\hat{y}_{\{f|p\}} \in U_a^{*-}$

   (e) obter o espaço preditor gerado pelos preditores ótimos como:

   $$\hat{X}_k := \overline{span}\{\hat{y}_{\{f|p\}}\}$$

   e obter $\hat{x}^{(i+1)}$

   (f) calcular as matrizes do sistema como:

   $$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_a^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ke \\ e \end{bmatrix} \tag{16}$$

   onde $\hat{X}_{k+1}$ é o vetor de estado estimado no instante $k+1$.

   Posteriormente calcular as matrizes do sistema LPV afim aos parâmetros como[5]:

   $B_0 = B(1:n, 1:m)$, $B_p = B(1:m, 1:m+ms)$, $A_p = B(1:n, (m+ms)+1:m+ms+ns)$, $D_0 = D(1:p, 1:m)$, $D_p = (1:p, m+1:m+ms)$, $C_p = D(1:p, (m+ms)+1:m+ms+ns)$.

   (g) para calcular o ganho de Kalman K e a solução da equação algébrica de Riccati (ARE) do filtro de Kalman P, é necessário

[5] tomado de (Lopes dos Santos et al., 2008)

calcular as matrizes de covariâncias do erro de predição, dadas por:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \frac{1}{N-1} \begin{bmatrix} \rho\rho^T & \rho e^T \\ e\rho^T & ee^T \end{bmatrix} \tag{17}$$

O ganho de Kalman é dado por:

$$K = (APC^T + S)(CPC^T + R)^{-1} \tag{18}$$

onde a ARE do filtro de Kalman é dada por:

$$P = APA^T - (APC^T + S)(CPC^T + R)^{-1}(APC^T + S)^T + Q \tag{19}$$

Assim, encontrando as matrizes do sistema (A, B, C, D, K) chegamos no modelo inovativo (10), sendo que Ke é chamado de ρ em (17).

5 Aplicação

Nesta seção apresentamos uma aplicação do método de identificação aqui tratado. A aplicação é feita baseando-se em um sistema MIMO de duas entradas, três saídas e dependente de três parâmetros variantes no tempo (Verdult, 2002). O conjunto de matrizes é dado por:

$$A0 = \begin{bmatrix} -1.3 & -0.6325 & -0.1115 & 0.0596 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A1 = \begin{bmatrix} -0.51 & -0.1075 & -0.007275 & -0.0000625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$
$$B0 = \begin{bmatrix} 01 \\ 10 \\ 10 \\ 01 \end{bmatrix}, B1 = \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \\ 00 \\ 0.30.3 \end{bmatrix}, B2 = B3 = B1$$
$$C0 = I_{3\times 4}, \quad D0 = 0_{3\times 2} \tag{20}$$

O vetor de parâmetros variantes no tempo é dado como:

$$\delta_k = \begin{bmatrix} \delta_{1,k} \\ \frac{1}{2} sen(2\pi t/100)\delta_{1,k} \\ \frac{1}{2} cos(2\pi t/100)\delta_{1,k} \end{bmatrix} \tag{21}$$

sendo $\delta_{1,k} = \frac{1}{2} sen(2\pi t/100)\psi$, e ψ uma sequência aleatória com distribuição uniforme. As entradas u_k são dadas como:

$$u_k = \begin{bmatrix} u_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

sendo $u_k = Z^{-1}\{u_1(z)\}$, onde $u_1(z) = (0.75 + 1.05z^{-1} + 0.15z^{-2})\varphi_1(z)$ e φ_1, φ_2, são sequências aleatórias com distribuição uniforme.

Neste exemplo apresentamos um caso difícil para o algoritmo dado que contém múltiplos parâmetros em forma senoidal, ruído de medição e múltiplas entradas e saídas. Na identificação do sistema foram realizados testes associados a: i) quantidade de informação anterior ao presente na entrada aumentada u_a, para a obtenção do estado estimado inicial $\hat{x}$ e ii) quantidade de iterações realizadas para obter o modelo MIMO LPV.

Como critério de comparação emprega-se o VAF[6] dado por:

$$VAF = max\left(1 - \frac{\text{Variância}(y_k - \hat{y}_k)}{\text{Variância}(y_k)}, 0\right) 100\% \tag{23}$$

sendo y_k e $\hat{y}_k$ a saída real e a saída estimada, respectivamente.

Na Tabela 1, são apresentados os resultados comparativos associados ao número de iterações e quantidade de informações anteriores ao presente (QIAP) usados na identificação.

Table 1: VAF associado ao número de iterações e número de informações anteriores ao presente.

# de QIAP	# de iterações	Saída/VAF %
0	1	$\hat{y}_1 = 86.67$ $\hat{y}_2 = 69,25$ $\hat{y}_3 = 57.58$
0	20	$\hat{y}_1 = 95.11$ $\hat{y}_2 = 91.22$ $\hat{y}_3 = 86.33$
1	1	$\hat{y}_1 = 90.80$ $\hat{y}_2 = 71.35$ $\hat{y}_3 = 70.26$
1	20	$\hat{y}_1 = 95.54$ $\hat{y}_2 = 91.76$ $\hat{y}_3 = 87.17$
2	1	$\hat{y}_1 = 95.32$ $\hat{y}_2 = 85.42$ $\hat{y}_3 = 84.23$
2	20	$\hat{y}_1 = 95.44$ $\hat{y}_2 = 91.76$ $\hat{y}_3 = 87.41$

A partir da informação apresentada na tabela pode se concluir que quanto maior o número de QIAP empregadas na estimação do estado inicial melhor a qualidade do modelo, porém o crescimento da matriz de entradas aumentada é exponencial, sendo isto um serio limitante, sobretudo quando o número de entradas u_k e de parâmetros variantes no tempo δ_k aumentam significativamente; motivo pelo qual neste trabalho limitamos a duas QIAP; por outra parte se mantemos o número de QIAP em zero e aumentamos significativamente o número de iterações obtemos resultados

[6] do inglês: Variance Accounted For [%]

semelhantes aos do caso no qual a QIAP é de dois e o número de iterações é um.

Uma interessante característica do método está associada à precisão com a qual é calculado o vetor de estado, já que $\hat{x}$ está associado aos valores ótimos da correlação obtida entre o subespaço do passado e o presente e subespaço do futuro gerados pelas entradas aumentadas e pelas saídas. Uma vantagem adicional é que a estimativa do vetor de estado é realizada diretamente do preditor ótimo e não através do cálculo iterativo do vetor $\hat{x}_{k+1}$, o que permite uma certa independência entre as matrizes de estado calculadas em cada iteração, ou seja a iteração $i+1$, só depende do conjunto de dados $u_k, y_k, \lambda_k, \zeta_k, \hat{x}_k$, não das matrizes de estado encontradas na iteração $i-1$

6 Conclusão

Neste artigo propomos um novo algoritmo de identificação no espaço de estado de sistemas LPV, que denominamos ICCALPV. O ICCALPV, permite realizar identificação de sistemas MIMO com múltiplos parâmetros que variam linearmente no tempo, com uma precisão adequada e rápida convergência. No ICCALPV inserimos uma nova forma de calcular a matriz ampliada de entradas para o cálculo da estimação do vetor de estado inicial, utilizando o produto Khatri-Rao. Desta forma aumentamos a velocidade do cálculo das matrizes dependentes das QIAP. Também analisamos a eficácia do ICCALPV na identificação de um sistema LPV variando a quantidade de QIAP e de iterações. Vemos que é possível compensar a quantidade de QIAP com iterações e vice versa.

References

Akaike, H. (1975). Markovian representation of stochastic processes by canonical variables, *SIAM Journal on Control* **13**(1): 162–173.

Coxy, P. and Tóht, R. (2016). Alternative form of predictor based identification of lpv-ss models with innovation noise, *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1223–1228.

Forero, A. (2016). *Identificação no espaço de estado de séries temporais e de sistemas de malha fechada estocásticos multivariáveis utilizando análise de correlação canônica*, Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Forero, A. J., Puerto Acosta, J. A. and Bottura, C. P. (2015). Identificação no espaço de estado de um sistema eletro mecânico usando os métodos moesp e cca., *XII Simposio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)* .

Golabi, A., Meskin, N., Tóth, R. and Mohammadpour, J. (2017). A bayesian approach for lpv model identification and its application to complex processes, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **25**(6): 2160–2167.

Hotelling, H. (1936). Relation between two sets of variates, *Biometrika* **28**: 322–377.

Larimore, W. (1990). Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptive control, *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pp. 596–604 vol.2.

Lopes dos Santos, P., Ramos, J. A. and de Carvalho, J. L. M. (2007). Identification of linear parameter varying systems using an iterative deterministic-stochastic subspace approach, *2007 European Control Conference (ECC)*, pp. 4867–4873.

Lopes dos Santos, P., Ramos, J. and de Carvalho, J. (2008). Identification of lpv systems using successive approximations, *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 4509–4515.

Picci, G. and Katayama, T. (1996). Stochastic realization with exogenous inputs and subspace methods identification, *Signal Processing* **52**: 145–160.

Proimadis, I., Bijl, H. and van Wingerden, J. (2015). A kernel based approach for {LPV} subspace identification, **48**(26): 97 – 102. 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, France.

Verdult, V. (2002). *Nonlinear System Identification: A State-Space Approach*, PhD thesis, Delft University of Technology.

Visser, M., Navalkar, S. and van Wingerden, J. (2015). {LPV} model identification for flutter prediction: A comparison of methods, **48**(26): 121 – 126. 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems, France.

Yang, X., Yin, S. and Kaynak, O. (2018). Robust identification of lpv time-delay system with randomly missing measurements, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* **PP**(99): 1–11.