Filtragem e redução de modelos para sistemas lineares positivos usando a norma $\mathcal{H}_\infty$ em faixas finitas de frequências ⋆

Tomas L. Herscovici, Ricardo C. L. F. Oliveira, Pedro L. D. Peres

* *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil (e-mails: lubiana.tomas@gmail.com,{ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br).*

Abstract: This paper investigates the problems of model-order reduction and reduced-order filtering for continuous and discrete-time positive linear systems, utilizing the $\mathcal{H}_\infty$ norm as performance criterion within finite frequency ranges. Both problems are formulated in terms of bilinear matrix inequalities, employing additional slack variables derived from the application of Finsler's lemma, which exhibits the closed-loop dynamic matrix isolated from other variables. A solution based on linear matrix inequalities is proposed through an iterative algorithm, exploring relaxations and a systematic initialization procedure. An advantage over the existing methods is a less conservative treatment of positivity constraints, along with the absence of the need to provide initial reduced models (or filters) for the algorithm. Numerical examples and comparisons with techniques from the literature are provided to illustrate the results.

Resumo: Este artigo investiga os problemas de redução de ordem de modelo e filtragem de ordem reduzida para sistemas lineares positivos contínuos e discretos no tempo, utilizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ em faixas de frequência como critério de desempenho. Ambos os problemas são formulados em termos de desigualdades matriciais bilineares, empregando variáveis de folga adicionais derivadas da aplicação do lema de Finsler, as quais apresentam a matriz dinâmica de malha fechada isolada das demais variáveis. Uma solução baseada em desigualdades matriciais lineares é proposta por meio de um algoritmo iterativo, explorando relaxações e um procedimento sistemático de inicialização. Uma vantagem sobre os métodos existentes é um tratamento menos conservador das restrições de positividade, juntamente com a ausência da necessidade de fornecer modelos reduzidos (ou filtros) iniciais para o algoritmo. Exemplos numéricos e comparações com técnicas da literatura são fornecidos para ilustrar os resultados.

Keywords: Positive systems; Model order reduction; Reduced order filtering; Linear matrix inequalities; $\mathcal{H}_\infty$ norm in frequency ranges.

Palavras-chaves: Sistemas positivos; Redução de ordem de modelos; Filtragem de ordem reduzida; Desigualdades matriciais lineares; Norma $\mathcal{H}_\infty$ em faixas de frequência.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas positivos, caracterizados por variáveis que assumem apenas valores não negativos, representam uma classe fundamental de sistemas dinâmicos presentes em uma diversidade de campos científicos e tecnológicos, como economia, processos químicos, redes comportamentais e engenharia (Berman e Plemmons, 1979; Luenberger, 1979; Farina e Rinaldi, 2000; Hernandez-Vargas e Middleton, 2013; Ait Rami et al., 2014; Blanchini e Giordano, 2014; Rantzer e Valcher, 2018). Apesar da presença e importância em vários setores, a pesquisa relacionada a essa classe de sistemas dinâmicos continua a ser uma área de investigação em aberto, motivada pela necessidade de compreender melhor as propriedades e desenvolver técnicas especializadas para análise e síntese de controladores e filtros (Tanaka e Langbort, 2011; Ait Rami, 2011; Spagolla et al., 2022a,b), especialmente quando é necessário lidar com incertezas no modelo e restrições de estrutura nas variáveis de projeto (Spagolla, 2023).

Dois problemas amplamente investigados na literatura de sistemas lineares são redução de ordem de modelos (Assunção et al., 2007; Rowley e Dawson, 2017) e filtragem de ordem reduzida (Tuan et al., 2001). O primeiro tem sua relevância originada na necessidade de lidar com sistemas de ordem elevada, comumente encontrados em modelos de sistemas reais. A redução de ordem é uma solução prática para simplificar a análise desses sistemas complexos, oferecendo uma representação mais compacta e computacionalmente eficiente. O problema de filtragem é fundamental no processamento de sinais, incluindo a estimação de variáveis a partir de observações contaminadas por ruídos, com aplicações em rastreamento de objetos, navegação, detecção de falhas, entre outras. Sempre que possível, filtros de ordem

⋆ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Projeto Stic-Amsud/CAPES NetConHybSDP, code 22-STIC-09.

reduzida possuem preferência por conta da implementação simplificada. Na literatura de sistemas positivos é possível encontrar técnicas de projeto para ambos os problemas formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) (Boyd et al., 1994), normalmente utilizando como critérios de desempenho as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, mas sem garantias de otimalidade (Reis e Virnik, 2009; Feng et al., 2010; Li et al., 2010, 2011; Spagolla et al., 2022b). Além disso, a restrição de positividade do modelo (ou do filtro) projetado costuma impor dificuldades técnicas que geralmente são contornadas com a introdução de conservadorismo nas condições de síntese.

Particularmente no caso da norma $\mathcal{H}_\infty$, resultados mais refinados de redução de modelos e filtragem podem ser obtidos caso os sinais exógenos possam ser melhor caracterizados, por exemplo, se estiverem concentrados em uma faixa finita de frequências. Resultados de análise e projeto nesse contexto puderam ser desenvolvidos a partir do lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (GKYP) (Iwasaki e Hara, 2005; Graham et al., 2009), com técnicas de projeto formuladas em termos de LMIs (Li et al., 2014; Romão et al., 2016; Mazzoccante et al., 2018). Condições de projeto específicas para sistemas positivos também foram desenvolvidas, mas apenas com algoritmos que fornecem soluções subótimas (Li et al., 2015; Spagolla et al., 2022b; Spagolla, 2023; Ren e Wang, 2023), corroborando o fato de tratar-se de uma área aberta para novas contribuições.

Este trabalho aborda os problemas de redução de modelos e filtragem de ordem reduzida para sistemas lineares positivos, contínuos e discretos no tempo, levando em conta como critério de desempenho a norma $\mathcal{H}_\infty$ em faixas finitas de frequências. A formulação proposta explora as metodologias mais favoráveis na literatura tanto para lidar com síntese de ordem reduzida como para tratar restrições de positividade comuns aos projetos. Basicamente, formula-se o problema com a aplicação do lema de Finsler e resolvem-se as desigualdades bilineares resultantes com a aplicação de relaxações e algoritmos iterativos. Uma extensão para tratar sistemas politópicos é apresentada e exemplos numéricos com sistemas retirados da literatura ilustram as vantagens da técnica proposta.

Notação: $\mathbb{R}^{m\times n}$ representa o conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$. $\mathbb{R}^n$ representa o espaço de vetores com uma coluna e n linhas. Em matrizes quadradas, $\star$ denota o respectivo termo transposto conjugado. I e 0 representam a matriz identidade e uma matriz de zeros, respectivamente, com as dimensões apropriadas. $diag(\cdot)$ simboliza uma matriz bloco diagonal formada com os elementos entre parenteses. $P \succ 0$ ($P \prec 0$) indica que P é uma matriz definida positiva (negativa). $\sigma_{\max}[\cdot]$ denota o máximo valor singular de uma matriz. $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ é um intervalo de frequência de interesse com $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < +\infty$ para o caso contínuo e $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \pi$ para o caso discreto. O conjunto das matrizes Metzler, isto é, matrizes quadradas com elementos fora da diagonal não negativos, é denotado por $\mathbb{M}$. A notação $X \geqslant 0$ é utilizada para indicar que todos os elementos da matriz X são não negativos.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Seja um sistema linear positivo representado no espaço de estados por

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Ex(t) + Fw(t) \end{aligned} \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são os vetores de estados, entradas exógenas, saída medida e saída de desempenho, respectivamente, e $A \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x\times n_w}$, $C \in \mathbb{R}^{n_z\times n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{n_z\times n_w}$, $E \in \mathbb{R}^{n_y\times n_x}$ e $F \in \mathbb{R}^{n_y\times n_w}$ são matrizes constantes. O operador $\delta[x(t)]$ representa $\dot{x}(t)$ para sistemas contínuos no tempo e $x(t+1)$ para sistemas discretos no tempo.

Um sistema é (internamente) positivo se para entradas e condições iniciais não negativas, as variáveis de estado e de saída são não negativas. Para garantir a positividade, basta impor as seguintes restrições lineares nas matrizes do sistema (Farina e Rinaldi, 2000)

$$\begin{aligned} &A \in \mathbb{M},\ B \geqslant 0,\ C \geqslant 0,\ D \geqslant 0,\ E \geqslant 0,\ F \geqslant 0 \ \text{(contínuo)} \\ &A \geqslant 0,\ B \geqslant 0,\ C \geqslant 0,\ D \geqslant 0,\ E \geqslant 0,\ F \geqslant 0 \ \text{(discreto)} \end{aligned} \tag{2}$$

O primeiro objetivo deste trabalho é projetar um modelo de ordem reduzida $1 \leq n_r < n_x$ em que a relação entre a entrada w e a saída z seja a mais próxima possível do sistema original em uma faixa finita de frequências. Nesse problema a saída y não é utilizada. O modelo reduzido positivo a ser projetado é dado por

$$\begin{aligned} \delta[x_r(t)] &= A_r x_r(t) + B_r w(t) \\ z_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

em que $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z_r \in \mathbb{R}^{n_z}$ representam os vetores de estados, entrada e saída do modelo reduzido, respectivamente, e $A_r \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{n_r\times n_w}$, $C_r \in \mathbb{R}^{n_z\times n_r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{n_z\times n_w}$ são as matrizes do sistema reduzido a serem determinadas com as restrições que garantem a positividade. Tomando o erro da aproximação entre o sistema original e o modelo reduzido como $e = z - z_r$, obtém-se a seguinte dinâmica para o erro

$$\begin{aligned} \delta[\xi_r(t)] &= A_e \xi_r(t) + B_e w(t) \\ e(t) &= C_e \xi_r(t) + D_e w(t) \end{aligned} \tag{4}$$

em que $\xi_r = [x'\ x_r']' \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $\bar{n} = n + n_r$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}, C_e = [C\ \ -C_r], D_e = D - D_r.$$

O segundo problema investigado neste artigo é o projeto de um filtro positivo dado por

$$\begin{aligned} \delta[x_f(t)] &= A_f x_f(t) + B_f y(t) \\ z_f(t) &= C_f x_f(t) + D_f y(t) \end{aligned} \tag{5}$$

em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$ é o vetor de estados, $1 \leq n_f \leq n_x$ e $z_f \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída do filtro, utilizada para estimar a saída z da planta com a menor influência possível do distúrbio w, com as matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n_f\times n_f}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n_f\times n_w}$, $C_f \in \mathbb{R}^{n_z\times n_f}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{n_z\times n_f}$ atendendo as restrições que garantem a positividade. Neste caso, o erro pode ser modelado como $e = z - z_f$, resultando no sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \delta[\xi_f(t)] &= A_e \xi_f(t) + B_e w(t) \\ e(t) &= C_e \xi_f(t) + D_e w(t) \end{aligned} \tag{6}$$

em que $\xi_f = [x' \ x_f']' \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $\bar{n} = n + n_f$,

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f E & A_f \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ B_f F \end{bmatrix},$$
$$C_e = [C - D_f E \ \ -C_f], D_e = D - D_f F.$$

Tanto no problema de redução de ordem de modelo quanto no problema de filtragem, o objetivo é reduzir a norma $\mathcal{H}_\infty$ em uma faixa finita de frequências da função transferência do erro dada por $G_e(\zeta) = C_e(\zeta \mathbf{I} - A_e)^{-1} B_e + D_e$ (no caso contínuo, ζ é a variável de Laplace; no discreto, ζ representa a variável da transformada Z). A norma $\mathcal{H}_\infty$ em uma faixa finita de frequências é definida como

$$\|G_e\|_\infty^\Omega = \begin{cases} \sup_{\omega \in \Omega} \sigma_{\max}[G_e(j\omega)] & \text{(contínuo)} \\ \sup_{\omega \in \Omega} \sigma_{\max}[G_e(e^{j\omega})] & \text{(discreto).} \end{cases}$$

Para desenvolver o algoritmo de redução de ordem de modelo e o de filtragem, assume-se que o sistema é estável, isto é, A é Hurwitz para sistemas a tempo contínuo e Schur para sistemas a tempo discreto. Na sequência apresenta-se uma condição (baseada no lema GKYP) para computar a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema erro em uma faixa finita de frequência (Iwasaki e Hara, 2005) quando as matrizes do modelo reduzido ou do filtro são conhecidas.

Lema *1.* $\|G_e\|_\infty^\Omega < \gamma$ se e somente se existirem matrizes simétricas P e $0 \prec T \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ tais que

$$\Psi' \Theta \Psi \prec 0 \tag{7}$$

com

$$\Theta = \text{diag}(\Xi, I, -\gamma^2 I)$$

e $\Xi = \Xi_c$ para sistemas a tempo contínuo e $\Xi = \Xi_d$ para sistemas a tempo discreto e

$$\Xi_c = \begin{bmatrix} -T & P + j\omega_c T \\ \star & -\omega_1 \omega_2 T \end{bmatrix}, \quad \Xi_d = \begin{bmatrix} P & e^{j\omega_c} T \\ \star & -P - 2\cos(\omega_a) T \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_e' & I & C_e' & 0 \\ B_e' & 0 & D_e' & I \end{bmatrix}', \omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2, \omega_a = (\omega_2 - \omega_1)/2.$$

As condições do Lema 1 são de difícil tratamento em termos de LMIs caso as matrizes do modelo reduzido ou do filtro sejam variáveis de projeto. Condições alternativas, mais favoráveis à obtenção de condições LMIs suficientes, são propostas na próxima seção como principal contribuição do artigo.

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

O resultado do Teorema 2 apresentado em seguida é uma extensão do Lema 1 que incorpora variáveis de folga, facilitando o projeto (busca pelas matrizes do sistema reduzido ou matrizes do filtro). Além disso, considerando as matrizes do modelo reduzido (ou do filtro) como variáveis de projeto e por tratar-se de uma condição em frequência finita, é necessário impor que A_r (ou A_f) seja estável.

Teorema *2.* Sejam $Y \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times (3\bar{n} + n_z + n_u)}$ e $S \in \mathbb{R}^{\bar{n} - n \times 3(\bar{n} - n)}$ matrizes dadas e A estável. Se existirem matrizes simétricas P, $0 \prec T \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$ e $0 \prec J \in \mathbb{R}^{\bar{n} - n \times \bar{n} - n}$, matrizes $X \in \mathbb{R}^{(3\bar{n} + n_z + n_u) \times \bar{n}}$, $R \in \mathbb{R}^{3(\bar{n} - n) \times \bar{n} - n}$ e do modelo reduzido (ou filtro) positivo de dimensões apropriadas, e um escalar $\gamma > 0$ tais que

$$H + XY + Y'X' \prec 0, \ \ W + RS + S'R' \prec 0 \tag{8}$$

com $\Xi = \Xi_c$ e $W = W_c$ para sistemas a tempo contínuo e $\Xi = \Xi_d$ e $W = W_d$ para sistemas a tempo discreto,

$$H = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & 0 & -I \\ \star & \Xi_{22} & 0 & C_e' & A_e' \\ \star & \star & -\gamma I & D_e' & B_e' \\ \star & \star & \star & -\gamma I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & J & A_p' \\ \star & 0 & -I \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix}, \quad W_d = \begin{bmatrix} -J & 0 & A_p' \\ \star & J & -I \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix}$$

e A_p igual a A_r (A_f) para o problema de redução de modelo (filtragem), então A_e é estável e $\|G_e\|_\infty^\Omega < \gamma$.

Prova. A prova, feita para o caso contínuo ($\Xi = \Xi_c$ e $W = W_c$), é similar para o discreto. Considere a matriz

$$X' = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' & X_3' & X_4' & X_5' \end{bmatrix},$$
$$X^\perp = \begin{bmatrix} I \\ \Phi \end{bmatrix}, \Phi = -X_5^{-1'} \begin{bmatrix} X_1' & X_2' & X_3' & X_4' \end{bmatrix}$$

como uma base para o espaço nulo de X', isto é, $X'X^\perp = 0$ (a factibilidade de (8) garante que X_5 é invertível). Aplicando o lema de Finsler na primeira desigualdade em (8) obtém-se $X^{\perp'} H X^\perp \prec 0$, que pode ser reescrita na forma

$$Q + \Phi' G + G' \Phi \prec 0 \tag{9}$$

com $G = [-I \ A_e \ B_e \ 0]$ e

$$Q = \begin{bmatrix} -T & P + j\omega_c T & 0 & 0 \\ \star & -\omega_1 \omega_2 T & 0 & C_e' \\ \star & \star & -\gamma I & D_e' \\ \star & \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix}.$$

Adotando

$$G^\perp = \begin{bmatrix} A_e & B_e & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

tal que $GG^\perp = 0$ e aplicando o lema de Finsler novamente em (9), tem-se

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & C_e' \\ \star & \Delta_3 - \gamma I & D_e' \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0$$

com

$$\Delta_1 = A_e'(P + j\omega_c T) - (A_e' T - P + T j\omega_c) A_e - T\omega_1 \omega_2,$$
$$\Delta_2 = -(A_e' T - P + j\omega_c T) B_e, \quad \Delta_3 = -B_e' T B_e.$$

Aplicando uma transformação de congruência na desigualdade anterior com $\text{diag}(\gamma^{1/2} I, \gamma^{1/2} I, \gamma^{-1/2} I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \gamma\Delta_1 & \gamma\Delta_2 & C_e' \\ \gamma\Delta_2' & \gamma\Delta_3 - \gamma^2 I & D_e' \\ C_e & D_e & -I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Os termos $\gamma\Delta_i$ podem ser linearizados com as mudanças de variáveis $\tilde{P} = \gamma P$ e $\tilde{T} = \gamma T$. Com mais um complemento de Schur e um pequeno rearranjo dos blocos, chega-se à desigualdade

$$\begin{bmatrix} A_e' & I \\ B_e' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -T & \tilde{P} + j\omega_c \tilde{T} \\ \star & -\omega_1 \omega_2 \tilde{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_e & B_e \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_e' & 0 \\ D_e' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_e & D_e \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0$$

que é precisamente (7), concluindo a primeira parte da prova.

Para $R' = \begin{bmatrix} R_1' & R_2' & R_3' \end{bmatrix}$, escolha

$$R^{\perp} = \begin{bmatrix} I \\ \Gamma \end{bmatrix}, \; \Gamma = -R_3^{-1'} \begin{bmatrix} R_1' & R_2' \end{bmatrix}$$

como uma base para o espaço nulo de R', isto é, $R'R^{\perp} = 0$ (a factibilidade de (8) garante que R_3 é invertível). Com o lema de Finsler aplicado à segunda desigualdade em (8) tem-se $R^{\perp'} W R^{\perp} \prec 0$, que pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ \star & 0 \end{bmatrix} + \Lambda' Z + Z' \Lambda \prec 0 \tag{10}$$

com $Z = [A_p \; -I]$. Escolhendo $Z^{\perp} = [I \; A_p']'$ e aplicando o lema de Finsler novamente, tem-se $A_p' J + J A_p \prec 0$, provando a estabilidade de A_p (note que $J \succ 0$). □

O procedimento de prova mostra que a primeira desigualdade em (8) é equivalente a (7), isto é, também caracteriza o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ com exatidão, se Y for uma variável de otimização, mas nesse caso é necessário lidar com uma desigualdade matricial bilinear. Portanto, para resolver as condições do Teorema 2 em termos de LMIs (obtendo apenas um custo garantido) é necessário fixar valores para as matrizes Y e S. Além disso, para garantir uma solução factível é necessário impor algum tipo de relaxação. Os teoremas a seguir oferecem uma solução para as escolhas de Y e S.

Teorema *3.* Para $Y = [I \; I \; 0 \; 0 \; -I]$, $S = [I \; I \; -I]$ e $A_e = A_e - rI$, sempre há um $\gamma > 0$ e um $r > 0$ suficientemente grandes que garantem a factibilidade das LMIs em (8) no caso de sistemas contínuos no tempo.

Prova. Considere a matriz

$$K = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adotando $X = -0{,}5rY'$ aplica-se a transformação de congruência $K'(H + XY + Y'X')K \prec 0$ na primeira desigualdade em (8), resultando em

$$\begin{bmatrix} -T - rI & P + j\omega_c T - rI & rI - I & 0 & 0 \\ \star & -\omega_1\omega_2 T - rI & A_e' + rI & 0 & C_e' \\ \star & \star & -rI & B_e & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma I & D_e' \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Para $T = tI$, com $t > 0$ suficientemente pequeno, pode-se desconsiderar a influência de T na negatividade dessa LMI que, com a aplicação do complemento de Schur leva a

$$\begin{bmatrix} -rI & P - rI & rI - I \\ \star & -rI & A_e' + rI \\ \star & \star & -rI \end{bmatrix} - M' \begin{bmatrix} -\gamma I & D_e' \\ \star & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} M \prec 0$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_e' \\ 0 & C_e & 0 \end{bmatrix}$$

e, tomando γ suficientemente grande, o segundo termo pode ser desconsiderado. Adotando $P = rI$ e $A_e = A_e - rI$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -rI & 0 & (r-1)I \\ \star & -rI & A_e' \\ \star & \star & -rI \end{bmatrix} \prec 0. \tag{11}$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$-rI + [rI - I \; A_e] \begin{bmatrix} r^{-1}I & 0 \\ 0 & r^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rI - I \\ A_e' \end{bmatrix} = (-2r+1)I + A_e A_e' \prec 0 \; .$$

Assim é possível verificar que para um r suficientemente grande, a escolha proposta para Y garante factibilidade da LMI tratada. Substituindo a escolha proposta para S na segunda desigualdade em (8), e fazendo $R = -0{,}5rS'$, $J = rI$, $A_p = A_p - rI$, obtém-se a desigualdade (11) com A_e substituída por A_p e o resto da prova segue de modo similar, concluindo a demonstração. □

Na sequência apresentam-se as inicializações propostas para sistemas discretos no tempo.

Teorema *4.* Para $Y = [I \; 0 \; 0 \; 0 \; -I]$, $S = [0 \; I \; -I]$ e $A = rA$, sempre há um $\gamma > 0$ suficientemente grande e um $r > 0$ suficientemente pequeno que garantem a factibilidade das LMIs (8) no caso de sistemas discretos no tempo.

Prova. Adotando os mesmos passos empregados no início da prova do Teorema 3 mas com a nova escolha de Y, $X = -0{,}5Y'$, $J = pI$ $(p > 0)$, $A = rA$, $A_r = 0$ (ou $A_f = B_f = 0$) e tomando γ suficientemente grande, tem-se

$$\begin{bmatrix} (p-1)I & 0 & 0 \\ \star & -pI & \mathrm{diag}(rA,0) \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{12}$$

que é sempre factível para $r \to 0$ e $0 < p < 1$. A proposta de S juntamente com as escolhas $R = -0{,}5S'$, $J = pI$, $A_p = rA_p$ levam a uma desigualdade similar a (12), concluindo a prova. □

Como proposto por Felipe e Oliveira (2021), a variável de relaxação r introduzida no Teorema 3 (Teorema 4) pode ser minimizada (maximizada) como função objetivo ao resolver as condições do Teorema 2 com as escolhas indicadas para Y e S. Caso seja possível obter $r = 0$ ($r = 1$), então tem-se uma solução para o problema de síntese com um certo valor de γ. Caso contrário, o Teorema 2 pode ser testado novamente utilizando $Y = X'$, $S = R'$ tendo a garantia que o novo valor de r não pode crescer (diminuir) (veja Felipe e Oliveira (2021) para mais detalhes). Em caso de obter-se uma solução com $r = 0$ ($r = 1$), então r pode ser eliminado e o Teorema 2 pode continuar sendo testado minimizando-se o valor de γ. Toda essa estratégia é resumida no Algoritmo 1, que divide o processo de síntese em duas fases. Na primeira (código entre as linhas 6 e 10) objetiva-se chegar a $r = 0$ ($r = 1$), mantendo um valor fixo de γ (mais detalhes são dados na seção numérica). Em caso de sucesso, inicia-se a minimização de γ na fase dois (código entre as linhas 11 e 14) com $r = 0$ ($r = 1$). O algoritmo só possui convergência local, sendo possível que a primeira fase não convirja mesmo que exista um modelo reduzido (filtro) factível. Além disso, não há garantias de convergência da fase dois para o modelo reduzido (filtro) com o menor valor de γ, ou seja, apenas uma solução subótima é garantida.

Em condições de projeto que fornecem apenas soluções subótimas, explorar a representação dual do sistema torna-se uma opção importante pois os custos garantidos computados para os sistemas primal e dual podem ser bem diferentes. Na abordagem proposta testar o sistema dual não demanda nenhum ajuste no Teorema 2, bastando substituir a quádrupla (A_e, B_e, C_e, D_e) por (A_e', C_e', B_e', D_e') e adequar os valores das dimensões de n_u e n_z.

Como comentário final, a eficiência do algoritmo proposto pode ser melhorada sempre que modelos (ou filtros) reduzidos estiverem disponíveis, pois servem para inicializar o

Algorithm 1 Síntese de modelo reduzido (ou filtro)

Adote as relaxações em r e escolhas de Y e S indicadas nos teoremas 3 ou 4;
Fixe uma tolerância tol;
$it \leftarrow 0$; $fase \leftarrow 1$;
Enquanto $it < it_{max}$ **Faça**
  Se $fase = 1$ **Então**
    minimize r (**maximize** r) **sujeito a** (2) e (8);
    Se $r \leq 0$ ($r \geq 1$) **Então**
      $fase \leftarrow 2$
      Fixe $r \leftarrow 0$ ($r \leftarrow 1$);
    Fim Se
  Senão
    minimize γ **sujeito a** (2) e (8)
    Se $|\gamma_{atual} - \gamma_{anterior}| < tol$ **Então**
      abandone;
    Fim Se
  Fim Se
  $it \leftarrow it + 1$
  $Y \leftarrow X'$, $R \leftarrow S'$;
Fim Enquanto
Se $fase = 2$ **Então**
  Retorna γ e matrizes de projeto;
Senão
  Retorna $\emptyset$
Fim Se

algoritmo, potencialmente levando a resultados melhores que os obtidos a partir das inicializações propostas nos Teoremas 3 e 4. Para isso, a equivalência entre as condições em (8), (9) e (10) pode ser explorada. Por exemplo, a condição (9) é uma LMI sempre que A_e e B_e forem conhecidas, e a matriz solução Φ pode ser usada como condição inicial para Y, fazendo-se $Y = [\Phi \ -I]$. O mesmo vale para a segunda desigualdade em (8), com um valor inicial para S obtido a partir de $S = [\Lambda \ -I]$. Usando essas inicializações, é possível testar o Algoritmo 1 diretamente na fase 2.

4. SISTEMAS INCERTOS

Seja o sistema linear positivo incerto

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)w(t) \\ z(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)w(t) \\ y(t) &= E(\alpha)x(t) + F(\alpha)w(t) \end{aligned} \tag{13}$$

em que as variáveis x, w, z e y são as mesmas do sistema (1) e as matrizes $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, $E(\alpha)$ e $F(\alpha)$ são politópicas, isto é, dadas pela combinação convexa de N vértices conhecidos em termos do vetor de parâmetros α, que pertence ao simplex unitário. Como as condições de síntese propostas não demandam nenhuma mudança de variável, a extensão para tratar sistemas incertos é imediata. Para isso basta considerar todas as variáveis de otimização, com exceção das matrizes de projeto do modelo reduzido (ou do filtro), como matrizes que também dependem do parâmetro incerto α, por exemplo, na forma afim, e utilizar um *parser* (por exemplo, o ROLMIP — Robust LMI Parser (Agulhari et al., 2019)) para extrair das desigualdades resultantes um conjunto de LMIs. A principal vantagem do algoritmo proposto para tratar sistemas incertos é que, assim como no caso de sistemas precisamente conhecidos, não é necessário ter um modelo reduzido (ou filtro) para inicializar o procedimento, e a mesma inicialização do caso precisamente conhecido pode ser utilizada.

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

O Algoritmo 1 (A1) foi implementado em Matlab (R2020a) utilizando o *parser* Yalmip (Löfberg, 2004) para sistemas precisamente conhecidos e o *parser* ROLMIP (Agulhari et al., 2019) para sistemas incertos junto com o *solver* de programação semidefinida Mosek (Andersen e Andersen, 2000). O PC utilizado possui processador AMD Ryzen 7 4800H, 16 GB de RAM, Windows 11 64 bits.

O método proposto no caso de redução de modelo é comparado com a técnica de Li et al. (2015) (LYG15), que tem como principal deficiência a necessidade de um modelo inicial ser conhecido para inicializar o procedimento (que também é iterativo). Para computar um modelo inicial, utiliza-se a técnica de Reis e Virnik (2009) que é a extensão do truncamento balanceado para lidar com sistemas positivos considerando a norma $\mathcal{H}_\infty$ em toda a faixa de frequência. Dado que um modelo inicial está disponível, o Algoritmo 1 também é testado a partir desse modelo (denotado por A1*), como discutido no final da seção 3. Para tratar parâmetros incertos, a técnica de LYG15 foi estendida, fixando todas as variáveis de otimização (com exceção das variáveis envolvidas na recuperação das matrizes do modelo reduzido) com dependência afim nos parâmetros incertos, e utilizando o *parser* ROLMIP para extrair as LMIs. Os seguintes valores foram considerados nas implementações $it_{\max} = 50$ e $tol = 10^{-3}$.

Exemplo 1: Considere o sistema positivo a tempo contínuo investigado em Li et al. (2015), com matrizes dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -1{,}5 & 0{,}6 & 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & -1{,}9 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & -2{,}7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -3 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & -1{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & -1{,}6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que descreve uma rede comportamental. Com faixa de frequência limitada entre $\omega_1 = 0{,}1$ e $\omega_2 = 3$, os resultados utilizando LYG15, A1 e A1* com $n_r = 2$ são mostrados na Tabela 1 (subíndices p e d indicam o uso do sistema primal ou dual, respectivamente). A tabela informa os custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ do erro de aproximação (γ), o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ computada *a posteriori* com uma condição de análise (γ_a), e valores associados à complexidade computacional, como o número de variáveis escalares (V), o número de linhas de LMIs (L), o número de iterações e o tempo médio por iterações (t/it) em segundos. É possível observar

Tabela 1. Resultados das técnicas LYG15, A1 e A1* com $n_r = 2$ no Exemplo 1.

Algoritmo	γ	γ_a	V	L	it	t/it
LYG15$_p$	0,0231	0,0230	96	32	50	0,021
LYG15$_d$	0,0266	0,0265	96	32	50	0,021
A1$^*_p$	0,0113	0,0112	328	44	27	0,095
A1$_p$	0,0162	0,0151	329	44	50	0,091
A1$^*_d$	0,0112	0,0112	328	44	49	0,090
A1$_d$	0,0202	0,0188	329	44	50	0,087

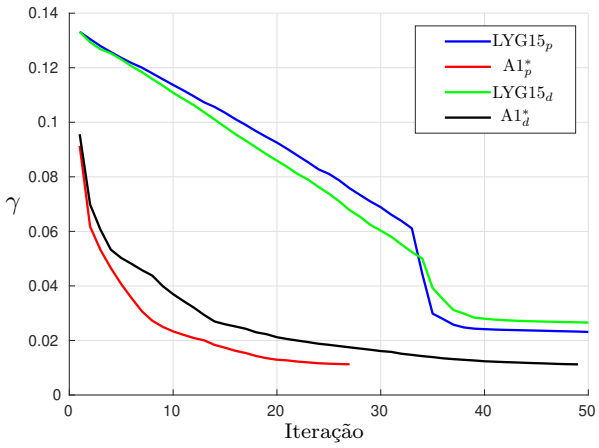

Figura 1. Custo garantido γ em função do número de iterações dos algoritmos LYG15$_p$, LYG15$_d$, A1$_p^*$ e A1$_d^*$.

que nesse exemplo o algoritmo proposto ofereceu melhor desempenho no erro de aproximação em todas as variações de A1. Por outro lado, a técnica de LYG15 demanda menor complexidade computacional. A Figura 1 mostra mais detalhes sobre a evolução de γ ao longo das iterações para os algoritmos testados a partir de um modelo inicial dado. Como pode ser notado, as variações do método proposto produzem valores de γ menores e convergem mais rápido. O modelo reduzido projetado por A1$_d^*$ é dado por

$$\left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1{,}3360 & 0{,}6816 & 0{,}8044 & 0{,}0000 \\ 0{,}3063 & -1{,}7272 & 0{,}0000 & 0{,}8677 \\ \hline 1{,}1524 & 0{,}0000 & 0{,}0133 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 1{,}0516 & 0{,}0003 & 0{,}0162 \end{array}\right]$$

Como uma segunda investigação, considere a matriz A modificada para $A + \eta\mathbb{1}$ com $\eta \in [-0{,}05 \quad 0{,}05]$ e $\mathbb{1}$ uma matriz de uns de dimensão 6×6, caracterizando uma matriz politópica na forma $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ com os vértices A_1 e A_2 computados nos valores mínimo e máximo de η, respectivamente. O objetivo é testar as técnicas sob comparação no contexto de sistemas incertos. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2, e novamente pode ser vista a superioridade do método proposto em termos dos custos garantidos, porém demandando maior complexidade computacional.

Tabela 2. Resultados das técnicas LYG15, A1 e A1* com $n_r = 2$ no Exemplo 1, caso incerto.

Algoritmo	γ	γ_a	V	L	it	t/it
LYG15$_p$	0,2058	0,2055	171	88	45	0,079
LYG15$_d$	0,1935	0,1899	171	88	50	0,080
A1$_p^*$	0,1663	0,1663	639	122	11	0,229
A1$_p$	0,1651	0,1651	640	88	17	0,220
A1$_d^*$	0,1655	0,1655	639	122	10	0,225
A1$_d$	0,1679	0,1677	640	88	47	0,211

Exemplo 2: Seja um sistema positivo a tempo contínuo que descreve o processo de tanques sêxtuplos investigado em Spagolla et al. (2022b) (SMOP22) e ilustrado na Figura 2, com matrizes dadas por

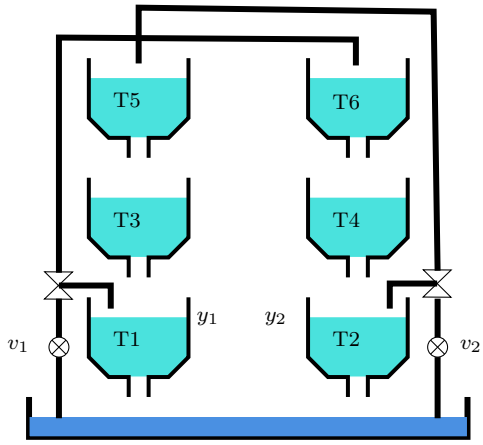

Figura 2. Diagrama esquemático dos tanques sêxtuplos. Fonte: Spagolla et al. (2022b)

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}0159 & 0 & 0{,}0419 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0111 & 0 & 0{,}0333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0419 & 0 & 0{,}0419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}0333 & 0 & 0{,}0333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0333 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}0833 & 0 \\ 0 & 0{,}0628 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0479 \\ 0{,}0312 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}', \; F = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix},$$

$C = [0 \mid I_4]$ e $D = 0_{4\times 2}$. O objetivo deste exemplo é projetar um filtro de ordem reduzida ($n_f = 2$) para estimar os níveis dos tanques $3, \ldots, 6$ a partir da leitura dos níveis dos tanques 1 e 2. Além disso, considerando um filtro com implementação digital, é necessário discretizar a planta. Para garantir uma maior robustez do filtro contra falhas nos sensores que medem a saída y, assume-se uma incerteza na matriz E, assim como foi estudado em Spagolla et al. (2022b). Discretizando a planta com um tempo de amostragem incerto $t \in [3{,}5 \quad 5]$, tem-se um modelo politópico como em (13) com quatro vértices (ver (Spagolla et al., 2022b) para mais detalhes sobre a discretização). A técnica proposta é comparada com o algoritmo de SMOP22, que lida com sistemas positivos mas com a norma $\mathcal{H}_\infty$ em toda a faixa de frequências. Para aliviar o esforço computacional, as variáveis de folga dos métodos testados foram fixadas como independentes dos parâmetros incertos. Adotando $\omega_1 = \pi/6$ e $\omega_2 = \pi/2$, têm-se os resultados apresentados na Tabela 3. Como pode ser percebido, a projeto do filtro considerando uma faixa de frequência forneceu um resultado significativamente superior.

Tabela 3. Resultado SMOP22 e A1 para o problema de filtragem do Exemplo 2.

Algoritmo	γ	γ_a	V	L	it	t/it
SMOP22	1,0063	0,7446	410	177	45	0,074
A1$_p$	0,1707	0,1707	569	160	26	0,168
A1$_d$	0,1645	0,1645	569	160	15	0,160

As matrizes do filtro projetado por SMOP22 são

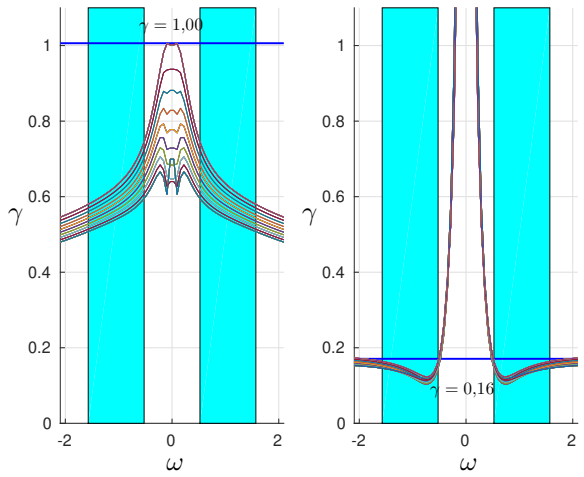

Figura 3. Máximos valores singulares da dinâmica do erro com os filtros projetados por SMOP22 (à esquerda) e $\mathrm{A1}_d$ (à direita).

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0{,}9104 & 0{,}0078 & 0{,}0053 & 0{,}0089 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}1286 \\ \hline 0{,}0000 & 1{,}1727 & 0{,}0000 & 0{,}2223 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}2553 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}4254 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}2372 & 0{,}0000 \end{array}\right]$$

e as matrizes dos filtros projetados por $\mathrm{A1}_p$ e $\mathrm{A1}_d$ são dadas respectivamente por

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0{,}9398 & 0{,}0111 & 0{,}3379 & 0{,}0107 \\ 0{,}0000 & 0{,}9793 & 0{,}0000 & 0{,}2492 \\ \hline 0{,}0047 & 0{,}2206 & 0{,}0061 & 0{,}0000 \\ 0{,}0245 & 0{,}0045 & 0{,}0000 & 0{,}0004 \\ 0{,}0141 & 1{,}0699 & 0{,}0018 & 0{,}1787 \\ 0{,}3223 & 0{,}0000 & 0{,}0999 & 0{,}0022 \end{array}\right]$$

e

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0{,}8535 & 0{,}1090 & 0{,}0000 & 0{,}7519 \\ 0{,}2055 & 0{,}8433 & 0{,}4711 & 0{,}0076 \\ \hline 0{,}0352 & 0{,}1115 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0456 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0146 \\ 0{,}3541 & 0{,}0000 & 0{,}0134 & 0{,}0608 \\ 0{,}0000 & 0{,}3799 & 0{,}0261 & 0{,}1672 \end{array}\right].$$

A Figura 3 mostra os máximos valores singulares da dinâmica do erro com os filtros projetados por SMOP22 (à esquerda) e $\mathrm{A1}_d$ (à direita) considerando alguns valores para os parâmetros incertos no intervalo $\eta \in [-0{,}05 \;\; 0{,}05]$. É claro que o projeto do filtro considerando uma faixa limitada de frequência tem vantagens quando comparado com uma técnica que considera toda a faixa de frequência. No entanto, note que, ao computar um custo garantido para o sistema do erro com o filtro projetado por SMOP22 e considerando a faixa de frequência especificada, tem-se um custo garantido de $\gamma = 0{,}7446$, que ainda é bem superior ao valor fornecido por $\mathrm{A1}_d$.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo foi proposto um método iterativo baseado em LMIs para a síntese de modelos positivos ou filtros positivos de ordem reduzida para sistemas positivos a tempo contínuo ou discreto. Os resultados derivam do lema GKYP e permitem o projeto de modelos ou filtros reduzidos sem a necessidade de um modelo reduzido ou filtro inicial, o que é uma vantagem em relação aos métodos da literatura. Os exemplos numéricos mostram a eficácia em relação à minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ em uma faixa de frequências do sistema do erro, garantindo a positividade do sistema, e, em geral, fornecendo resultados superiores aos da literatura ao preço de um maior esforço computacional.

Trabalhos futuros preveem a extensão das condições e do método para tratar o problema de síntese de controladores estáticos e dinâmicos de ordem arbitrária, e também explorar estratégias diferentes para a atualização das variáveis S e Y (que ocorre na linha 18 do algoritmo 1) visando melhorar a convergência do algoritmo.

REFERÊNCIAS

Agulhari, C.M., Felipe, A., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2019). Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3), 36:1–36:25. `http://rolmip.github.io`.

Ait Rami, M. (2011). Solvability of static output-feedback stabilization for LTI positive systems. *Syst. Control Lett.*, 60(9), 704–708.

Ait Rami, M., Bokharaie, V.S., Mason, O., and Wirth, F.R. (2014). Stability criteria for SIS epidemiological models under switching policies. *Discrete Cont. Dyn. Syst. B*, 19(9), 2865–2887.

Andersen, E.D. and Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, 197–232. Springer US. `http://www.mosek.com`.

Assunção, E., Marchesi, H.F., Teixeira, M.C.M., and Peres, P.L.D. (2007). Global optimization for the $\mathcal{H}_\infty$-norm model reduction problem. *Int. J. Syst. Sci.*, 38(2), 125–138.

Berman, A. and Plemmons, R.J. (1979). *Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, New York, NY.

Blanchini, F. and Giordano, G. (2014). Piecewise-linear Lyapunov functions for structural stability of biochemical networks. *Automatica*, 50(10), 2482–2493.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, NY.

Felipe, A. and Oliveira, R.C.L.F. (2021). An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Trans. Autom. Control*, 66(9), 4365–4370.

Feng, J., Lam, J., Shu, Z., and Wang, Q. (2010). Internal positivity preserved model reduction. *Int. J. Control*, 83(3), 575–584.

Graham, M.R., de Oliveira, M.C., and de Callafon, R.A. (2009). An alternative Kalman-Yakubovich-Popov lemma and some extensions. *Automatica*, 45(6), 1489–1496.

Hernandez-Vargas, E.A. and Middleton, R.H. (2013). Modeling the three stages in HIV infection. *J. Theor. Biol.*, 320, 33–40.

Iwasaki, T. and Hara, S. (2005). Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(1), 41–59.

Li, P., Lam, J., and Shu, Z. (2010). H_∞ positive filtering for positive linear discrete-time systems: An augmentation approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55(10), 2337–2342.

Li, P., Lam, J., Wang, Z., and Date, P. (2011). Positivity-preserving H_∞ model reduction for positive systems. *Automatica*, 47(7), 1504–1511.

Li, X., Yin, S., and Gao, H. (2014). Passivity-preserving model reduction with finite frequency H_∞ approximation performance. *Automatica*, 50(9), 2294–2303.

Li, X., Yu, C., and Gao, H. (2015). Frequency-limited H_∞ model reduction for positive systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 60(4), 1093–1098.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, 284–289. Taipei, Taiwan. `http://yalmip.github.io`.

Luenberger, D.G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models & Apllications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.

Mazzoccante, G.S., Hilhorst, G., Pipeleers, G., and Oliveira, R.C.L.F. (2018). Model order reduction of uncertain linear systems using generalized KYP lemma. In *Proc. 2018 Eur. Control Conf.*, 2616–2622. Limassol, Cyprus.

Rantzer, A. and Valcher, M.E. (2018). A tutorial on positive systems and large scale control. In *Proc. 57th IEEE Conf. Decision Control*, 3686–3697. Miami Beach, FL, USA.

Reis, T. and Virnik, E. (2009). Positivity preserving balanced truncation for descriptor systems. *SIAM J. Control Optim.*, 48(4), 2600–2619.

Ren, Y. and Wang, Q. (2023). Frequency-limited model reduction for linear positive systems: A successive optimization method. *Appl. Sci.*, 13(6), 4039.

Romão, L.B.R.R., de Oliveira, M.C., Peres, P.L.D., and Oliveira, R.C.L.F. (2016). State-feedback and filtering problems using the generalized KYP lemma. In *Proc. 2016 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, 1054–1059. Buenos Aires, Argentina.

Rowley, C.W. and Dawson, S.T.M. (2017). Model reduction for flow analysis and control. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 49, 387–417.

Spagolla, A. (2023). *Controle de Sistemas Lineares Positivos Incertos por meio de Desigualdades Matriciais Lineares.* Ph.D. thesis, FEEC – Universidade Estadual de Campinas.

Spagolla, A., Lemaire, A.A., Morais, C.F., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2022a). Robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control for positive continuous-time uncertain linear systems. *J. Franklin Inst.*, 359(10), 4842–4855.

Spagolla, A., Morais, C.F., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2022b). Reduced order positive filter design for positive uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Control Syst. Letts.*, 6, 1148–1153.

Tanaka, T. and Langbort, C. (2011). The bounded real lemma for internally positive systems and H-infinity structured static state feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56(9), 2218–2223.

Tuan, H.D., Apkarian, P., and Nguyen, T.Q. (2001). Robust and reduced-order filtering: New LMI-based characterizations and methods. *IEEE Trans. Signal Process.*, 49(12), 2975–2984.