PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES BASEADA EM MODELO NEBULOSO TAKAGI-SUGENO INVERSO: UMA ABORDAGEM DIRETA NO CONTEXTO DO ESPAÇO DE ESTADOS

Adriano Mendes Magalhães*, Ginalber Luiz de Oliveira Serra†

*Universidade Federal do Maranhão
Av. do Português, Vila Bacanga, s.n.
São Luís, MA, Brasil

†Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
Av. Getúlio Vargas, Monte Castelo, s.n.
São Luís, MA, Brasil

Emails: adriano.mendes.magalhaes@gmail.com, ginalber@ifma.edu.br

Abstract— This paper presents a fuzzy model as an estimator for inverse dynamics of nonlinear systems. The proposed model will be of the Takagi-Sugeno type, and will perform the fuzzy combination of linear submodels obtained from experimental data, located around operating points. Each submodel is mathematically defined in the context of the observer state space, whose parameters will be estimated by the methodology of ***O**bserver **K**alman **ID**entification* (OKID). Both the operating points and the data subsets will be obtained from the partitioning of the training data space, using the Gustafson-Kessel nebulous clustering algorithm and the cylindrical projection and extension methodology. Thus a mathematical statements that describes the methodology of the proposed model, as well as the results of the experimental applications of the methodology will be presented.

Keywords— Inverse batch identification, non-linear systems, Takagi-Sugeno fuzzy models, OKID.

Resumo— Este artigo apresenta uma proposta de modelo nebuloso como estimador para dinâmica inversa de sistemas não lineares. O modelo proposto será do tipo Takagi-Sugeno, e realizará a combinação nebulosa de submodelos lineares obtidos de dados experimentais, localizados em torno de pontos de operação. Cada submodelo está matematicamente definido no contexto do espaço de estados com observador, cujos parâmetros serão estimados por meio da metodologia de identificação do observador de Kalman (do inglês ***O**bserver **K**alman **ID**entification* – OKID). Tanto os pontos de operação quanto os subconjuntos de dados serão obtidos a partir do particionamento do espaço de dados de treinamento, utilizando o algoritmo de agrupamento nebuloso de Gustafson-Kessel e a metodologia de projeção e extensão cilíndrica. Assim uma formulação matemática que descreve a metodologia do modelo proposto, bem como os resultados das aplicações experimentais da metodologia serão apresentados.

Palavras-chave— Identificação inversa em batelada, sistemas não lineares, modelos nebulosos Takagi-Sugeno, OKID

1 Introdução

Em identificação de sistemas, um dos grandes desafios consiste na obtenção de modelos matemáticos que representem suficientemente bem o comportamento inverso de um determinado sistema dinâmico (Sousa and Kaymak, 2002). Para identificação inversa de sistemas dinâmicos, destacam-se três abordagens principais (Jung and Enqvist, 2013). Na primeira abordagem, o modelo direto do sistema é estimado na forma padrão (usando dados de entrada e de saída do sistema dinâmico), e em seguida o modelo obtido é invertido, resultando na estimação inversa. Na segunda abordagem o modelo direto do sistema é estimado na forma padrão (com dados de entrada e dados de saída), em seguida modelo obtido é usado em série com o modelo inverso, e os parâmetros do modelo inverso são estimados nesta configuração, por minimização da diferença entre a entrada do modelo direto e a saída do modelo inverso. Já na terceira abordagem, a identificação é feita em uma só etapa, por estimar o modelo inverso diretamente, usando dados de saída e de entrada do sistema dinâmico.

Nesse contexto, muitos modelos que realizam o mapeamento inverso de sistemas dinâmicos não lineares têm sido desenvolvidos para atender várias aplicações na medicina, nas ciências geográficas, nas ciências biológicas, assim como em outras áreas da conhecimento (Kovalets et al., 2018; Dai et al., 2017; Wang and Cisse, 2017; Qin and Jia, 2018). Em Mu et al. (2008), um algoritmo de realização de mínimos quadrados, baseado em agrupamentos nebulosos, estruturado sobre redes neurais artificiais é proposto como metodologia para realizar a identificação inversa de sistemas não linear do tipo SISO. Em Brunot et al. (2018), um método baseado em variável instrumental refinada (RIV), como procedimento de estimação paramétrica de modelo obtido por identificação dinâmica inversa, é proposto para controle de manipulador robótico do tipo MIMO. Em termos de estrutura de modelo, observa-se nessas duas abordagens que tanto a estimação do comportamento das entradas quanto os estados inversos são decorrentes da manipulação algébrica de inversão das leis físicas que mapeiam as entradas para as saídas do sistema.

Assim, a originalidade proposta por este artigo consiste em obter estados inversos e em estimar o comportamento das entradas de um sistema dinâmico não linear do tipo MIMO, a partir de um Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno Inverso, estruturado no contexto do espaço de estados com estimação paramétrica obtida diretamente dos dados de entrada e saída do sistema, dispensando a manipulação algébrica de leis físicas que regem a natureza do sistema. A estimação paramétrica será formulada a partir da versão nebulosa do algoritmo OKID, cujos os dados serão extraídos pelo método da projeção e extensão cilíndrica, em conjunto com o algoritmo de agrupamento nebuloso de Gustafson-Kessel (Wang, 1997; Babuška, 1998), a partir de uma batelada de dados de treinamento. Uma outra contribuição do artigo é apresentar uma nova metodologia de observação de estados nebulosos, porém no contexto de mapeamento inversos de sistemas dinâmicos não lineares.

Dessa forma, o artigo está organizado como segue. A seção dois apresenta a proposta da metodologia de identificação inversa em batelada de sistemas dinâmicos não lineares MIMO, baseada em modelo nebuloso Takagi-Sugeno Inverso Direto, com estrutura no contexto do espaço de estados. A seção três apresenta os resultados experimentais da aplicação da metodologia proposta. A seção quatro apresenta a análise dos resultados experimentais com as respectivas considerações finais.

2 Metodologia

Nesta seção serão estabelecidas as formulações matemáticas referentes à metodologia proposta.

2.1 Modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso

Seja um sistema MIMO não linear $\mathbf{S}$ de r entradas $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ e m saídas $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Propõe-se o modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso como estimador para a dinâmica inversa de $\mathbf{S}$, cuja base de regras é definida nos seguintes termos:

$$R^i\text{: SE } \mathbf{y}(k) \text{ é } \mathcal{Y}^i_{yu} \text{ E } \mathbf{u}(k) \text{ é } \mathcal{U}^i_{yu}$$
$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}^i_{yu}\left(\mathbf{y}(k), \mathbf{u}(k)\right) \\ \hat{\mathbf{u}}^i(k) = \hat{\mathbf{u}}^i\left(\mathbf{y}(k), \mathbf{u}(k)\right) \end{cases} \quad (1)$$

onde $i \in [1, c] \subset \mathbb{Z}^*_+$ é o *índice da regra*. O termo consequente é estabelecido no contexto do espaço de estados, e n é como o número de estados estimados e, consequentemente, a *ordem* do submodelo, $\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k+1) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ é a *equação de estados estimados* e $\hat{\mathbf{u}}^i(k) \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ é *equação da saída estimada*, ambas referentes ao submodelo local do termo consequente da i-ésima regra. O i-ésimo valor das variáveis linguísticas $\mathcal{Y}^i_{yu}$ e $\mathcal{U}^i_{yu}$ são estabelecidos por conjunto nebulosos, cujos graus de pertinência são definidos matematicamente como $\mu_{\mathcal{Y}^i_{yu}}(k) = \mu_{\mathcal{Y}^i_{yu}}(\mathbf{y}(k)) : \mathbb{R}^{m\times 1} \longmapsto [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $\mu_{\mathcal{U}^i_{yu}}(k) = \mu_{\mathcal{U}^i_{yu}}(\mathbf{u}(k)) : \mathbb{R}^{r\times 1} \longmapsto [0, 1] \subset \mathbb{R}$ respectivamente. O *grau de ativação de cada regra* $\beta^i_{yu}(k)$ é definido pela norma T $\otimes$ como segue:

$$\beta^i_{yu}(k) \triangleq \mu_{\mathcal{Y}^i_{yu}}(k) \otimes \mu_{\mathcal{U}^i_{yu}}(k) \quad (2)$$

O *grau de ativação normalizado* de cada regra é definido como sendo:

$$\gamma^i_{yu}(k) \triangleq \frac{\beta^i_{yu}(k)}{\sum_{i=1}^{c} \beta^i_{yu}(k)} \quad (3)$$

Assim, o modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso com base de regras conforme (1) pode ser matematicamente definido tanto para o estado predito como para a saída do modelo:

$$\tilde{\hat{\mathbf{x}}}_{yu}(k+1) \triangleq \sum_{i=1}^{c} \gamma^i_{yu}(k)\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k+1) \quad (4)$$

$$\tilde{\hat{\mathbf{u}}}(k) \triangleq \sum_{i=1}^{c} \gamma^i_{yu}(k)\hat{\mathbf{u}}^i(k) \quad (5)$$

2.2 Modelagem inversa com abordagem direta e a Identificação do Observador de Kalman

Para a proposta deste artigo, o submodelo local deve realizar o processo de inversão pela *abordagem direta* do subconjunto de dados referente à i-ésima regra (Sousa and Kaymak, 2002), conforme a Figura 1.

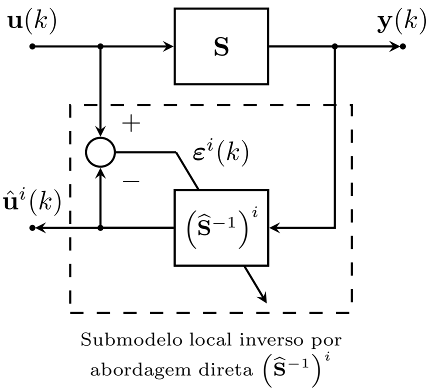
Associando o submodelo local $\left(\widehat{\mathbf{S}}^{-1}\right)^i$ da Figura 1 com o contexto do termo consequente da base de regras em (1), propõe-se a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k+1) = {} & \widehat{\mathbf{G}}^i\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k) + \widehat{\mathbf{H}}^i\mathbf{y}(k) \\ & -\widehat{\mathbf{O}}^i\left[\mathbf{u}(k) - \hat{\mathbf{u}}^i(k)\right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^i(k) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i\mathbf{y}(k) \quad (7)$$

como sendo o *submodelo local no espaço de estados* ***com*** *observador de estados de Kalman*, onde $\widehat{\mathbf{G}}^i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widehat{\mathbf{H}}^i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widehat{\mathbf{O}}^i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \in \mathbb{R}^{r\times n}$ e $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i \in \mathbb{R}^{r\times m}$ são respectivamente a *matriz dinâmica ou matriz de estados*, a *matriz de entrada*, a *matriz do*

Figura 1: Diagrama de blocos do submodelo inverso em torno de um ponto de operação i por abordagem direta (Sousa and Kaymak, 2002).



observador de estados, a *matriz de saída* e a *matriz de transição direta*, todos referente ao submodelo. A *equação de estados estimados* em Eq. (6) pode ser sintetizada para incluir o termo do observador de estados em sua estrutura, resultando em:

$$\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k+1) = \overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\,\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k) + \overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i\,\mathbf{z}_{yu}(k) \tag{8}$$

$$\hat{\mathbf{u}}^i(k) = \widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k) + \widehat{\mathbf{\Delta}}^i\mathbf{y}(k) \tag{9}$$

como sendo *submodelo local no espaço de estados* ***do*** *observador de Kalman*, com

$$\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i \triangleq \widehat{\mathbf{G}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{10}$$

$$\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i \triangleq \left[\widehat{\mathbf{H}}^i + \widehat{\mathbf{O}}^i\widehat{\mathbf{\Delta}}^i\ ,\ -\widehat{\mathbf{O}}^i\right] \in \mathbb{R}^{n\times(m+r)} \tag{11}$$

e $\mathbf{z}_{yu}(k) = \left[\left(\mathbf{u}(k)\right)^T, \left(\mathbf{y}(k)\right)^T\right]^T_{(m+r)\times 1}$ é o *vetor de dados* pertencente à *batelada* ou o *conjunto dados de treinamento* de tamanho l, definido pela matriz $\mathbf{Z}_{yu}(l) = [\mathbf{z}_{yu}(1), \cdots, \mathbf{z}_{yu}(k), \cdots, \mathbf{z}_{yu}(l)] \in \mathbb{R}^{(m+r)\times l}$, com $k \in \{1, \cdots, l\} \subset \mathbb{Z}_+$.

A partir das Eqs. (8) e (9), a metodologia OKID é desenvolvida em três passos. Primeiramente, a estimação em batelada dos parâmetros de Markov é realizada. Em seguida, os parâmetros Markov estimados são desacoplados. Por fim, os parâmetros de Markov desacoplados são utilizados no algoritmo ERA, e a estimação dos parâmetros das Eqs. (6) e (7) é realizada.

2.2.1 Estimação dos parâmetros dos Markov do observador de Kalman

O processo de estimação dos parametros de Markov do observador é inicializado ao aplicar o subconjunto local de dados nas variáveis da estutura do respectivo submodelo local do observador de Kalman, descrito nas das Eqs. (8) e (9). Além disso algumas definições iniciais são necessárias. Matematicamente sejam:

1) o i-ésimo subconjunto local de dados (de tamanho l^i_c), $\mathbf{Z}^i_{yu}(l^i_c) \subset \mathbf{Z}_{yu}(l)$, tal que $\mathbf{Z}^i_{yu}(l^i_c) = \left[\mathbf{z}^i_{yu}(1), \cdots, \mathbf{z}^i_{yu}(\kappa), \cdots, \mathbf{z}^i_{yu}(l^i_c)\right] \in \mathbb{R}^{(m+r)\times l^i_c}$, com $\kappa \in \left\{1, \cdots, l^i_c\right\} \subset \mathbb{Z}_+$;

2) o registro de dados do i-ésimo subconjunto local, $\mathbf{z}^i_{yu}(\kappa) = \left[\left(\mathbf{u}^i(\kappa)\right)^T, \left(\mathbf{y}^i(\kappa)\right)^T\right]^T \in \mathbb{R}^{(m+r)\times 1}$;

3) o *índice do deadbeat do observador de Kalman*, $q \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < q \ll \min\limits_{i=1}^{c}\left\{l^i_c\right\}$.

A priori, seja a matriz $\left[\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\right]^q$ obtida pela expanção da Eq. (8) de $\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(\kappa+1)$ a $\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(\kappa+q)$. Se $\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i$ é assintoticamente estável e os estados estimados $\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(\kappa)$ são limitados (contornáveis), então um q adequado é uma condição suficiente para que a matriz $\left[\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\right]^q$ convirja para a matriz nula (Wu et al., 2015). Além disso, a aplicação da expanção na Eq. (9) para todo $\kappa \in \left\{1, \cdots, l^i_c - q\right\} \subset \mathbb{Z}_+$ resulta em:

$$\boldsymbol{\upsilon}^i = \overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\mathbf{V}^i_{yu} \tag{12}$$

a qual é denominada *submodelo local inverso linear invariante no tempo* para cada regra i, onde:

$$\boldsymbol{\upsilon}^i = \left[\mathbf{u}^i(1+q)\cdots\mathbf{u}^i(\kappa+q)\cdots\mathbf{u}^i(l^i_c)\right] \tag{13}$$

$$\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu} = \Bigg[\underbrace{\widehat{\mathbf{\Delta}}^i}_{\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_1}\quad \underbrace{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i}_{\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_2}\quad \underbrace{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i}_{\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_3}\quad \underbrace{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\left[\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\right]^2\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i}_{\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_4}\cdots$$
$$\cdots\underbrace{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\left[\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\right]^{(q-2)}\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i}_{\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_q}\quad \underbrace{\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i\left[\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^i\right]^{(q-1)}\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^i}_{\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_{q+1}}\Bigg] \tag{14}$$

$$\mathbf{V}^i_{yu} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^i(q+1) & \cdots & \mathbf{y}^i(\kappa+q) & \cdots & \mathbf{y}^i(l^i_c) \\ \mathbf{z}^i_{yu}(q) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(\kappa+(q-1)) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(l^i_c-1) \\ \mathbf{z}^i_{yu}(q-1) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(\kappa+(q-2)) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(l^i_c-2) \\ \mathbf{z}^i_{yu}(q-2) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(\kappa+(q-3)) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(l^i_c-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{z}^i_{yu}(2) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(\kappa+1) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}((l^i_c-q)+1) \\ \mathbf{z}^i_{yu}(1) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(\kappa) & \cdots & \mathbf{z}^i_{yu}(l^i_c-q) \end{bmatrix} \tag{15}$$

onde $\boldsymbol{\upsilon}^i \in \mathbb{R}^{r\times(l^i_c-q)}$, $\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu} \in \mathbb{R}^{r\times[m+q(m+r)]}$, $\mathbf{V}^i_{yu} \in \mathbb{R}^{[m+q(m+r)]\times(l^i_c-q)}$ são respectivamente a *matriz de regressores da saída*, a *matriz dos parâmetros de Markov* e a *matriz dos dados locais* *da entrada do sistema e dos regressores de saída*, todas referentes ao ponto de operação da i-ésima regra. Resolvendo a Eq. (12) para $\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}$ no contexto de Mínimos Quadrados tem-se:

$$\boxed{\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu} = \boldsymbol{\upsilon}^{i}\left(\mathbf{V}^{i}_{yu}\right)^{T}\left[\mathbf{V}^{i}_{yu}\left(\mathbf{V}^{i}_{yu}\right)^{T}\right]^{-1}} \quad (16)$$

que são os parâmetros (ótimos) de Markov do observador, estimados em batelada do subconjunto de dados em torno do ponto de operação referente à i-ésima regra.

2.2.2 Desacoplamento dos parâmetros de Markov do observador de Kalman estimados

Cada elemento da matrix dos parâmetros de Markov do observador de Kalman estimados em (14) combina tanto o *conjunto de parâmetros de Markov estimados associados com o submodelo local* (sem observador local), quanto ao *conjunto de parâmetros de Markov associados com o ganho do observador local*. Consequentemente, para computá-los, é necessário desacoplá-los. Como $\overline{\widehat{\mathbf{G}}}^{i}$ e $\overline{\widehat{\mathbf{H}}}^{i}$, descritos nas Eqs. (10) e (11), a partir de (14) tem-se que $\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)_{1} = \widehat{\mathbf{\Delta}}^{i}$, e para um $\kappa \in \mathbb{Z}_{+},\ \kappa \geq 2$ pode-se obter (Wu et al., 2015):

$$\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} = \left[\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(1)}_{\kappa}, -\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{\kappa}\right] \quad (17)$$

onde $\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(1)}_{\kappa} \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{\kappa} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} \in \mathbb{R}^{r\times(m+r)}$. Assim de (17), o *conjunto de parâmetros de Markov estimados associados com o submodelo local* $\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{1} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ e $\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ pode ser obtido como segue: (Phan et al., 1991; Wu et al., 2015):

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{1} = \left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)_{1} = \widehat{\mathbf{\Delta}}^{i} \quad (18)$$

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} = \left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(1)}_{\kappa} - \sum_{\iota=1}^{\kappa-1}\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{\iota+1}\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa-\iota}, \quad \forall\ \kappa \in \{2,\cdots,q+1\} \subset \mathbb{Z}_{+} \quad (19)$$

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} = -\sum_{\iota=1}^{q}\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{\iota+1}\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa-\iota}, \quad \forall\ \kappa \in \mathbb{Z}_{+},\ \kappa \geq q+2 \quad (20)$$

e o *conjunto de parâmetros de Markov associados com o ganho do observador local* $\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{2} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ pode ser obtido como segue (Phan et al., 1991; Wu et al., 2015):

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{2} = \left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{2} \quad (21)$$

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa} = \left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{\kappa} - \sum_{i=1}^{\kappa-2}\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{i+1}\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa-i}, \quad \forall\ \kappa \in \{3,\cdots,q+1\} \subset \mathbb{Z}_{+} \quad (22)$$

$$\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa} = -\sum_{i=1}^{q}\left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^{i}_{yu}\right)^{(2)}_{i+1}\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa-i}, \quad \forall\ \kappa \in \mathbb{Z}_{+},\ \kappa \geq q+2 \quad (23)$$

Uma vez encontrado os parâmetros desacoplados $\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa}$ e $\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa}$, monta-se o *conjunto de parâmetros de Markov estimados e* ***desacoplados*** *do submodelo local* ***com*** *observador de estados*, para $\kappa \in \mathbb{Z}_{+},\ \kappa \geq 2$, como segue:

$$\left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} = \left[\left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa}, \left(\widehat{\mathbf{Y}}^{i}_{yu}\right)^{o}_{\kappa}\right] \in \mathbb{R}^{r\times(m+r)} \quad (24)$$

2.2.3 Algoritmo de realização de autossistemas

A função da Eq. (24) é obter um conjunto de parâmetros de Markov desacoplados que permita estimar os parâmetros $\widehat{\mathbf{G}}^{i}$, $\widehat{\mathbf{H}}^{i}$, $\widehat{\mathbf{O}}^{i}$, $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^{i}$ e $\widehat{\mathbf{\Delta}}^{i}$ para cada submodelo local descrito pelas Eqs. (6) e (7). Uma metodologia que conduz alcançar esta função é o algoritmo de realização de autossistemas ERA. O ERA usa a definição da matriz de Hankel para organizar $\left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa}$ em uma configuração específica para estimar aqueles parâmetros via decomposição de valores singulares (SVD).

Seja a matriz de Hankel definida com $\kappa \geq 2$ inteiro como segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{i}_{yu}(\kappa-2) = \begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa} & \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+1} & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+g-1} \\ \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+1} & \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+2} & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+p-1} & \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+p} & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{\Upsilon}}^{i}_{yu}\right)_{\kappa+p+g-2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{i}_{yu}(\kappa-2) \in \mathbb{R}^{pr\times g(m+r)}$, e $p \geq 0$ e $g \geq 0$ são inteiros arbitrários suficientemente grandes. Observa-se que $pr < g(m+r)$ e $p \geq q$ são condições necessárias para executar o ERA via matriz de Hankel (Wu et al., 2015).

Para realizar o ERA, é necessário calcular $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{i}_{yu}(0)$ e $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{i}_{yu}(1)$, e em seguida decompor $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{i}_{yu}(0)$ em valores singulares, tal como $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{i}_{yu}(0) = \mathbf{\Lambda}^{i}_{yu}\mathbf{\Sigma}^{i}_{yu}\left(\mathbf{S}^{i}_{yu}\right)^{T}$, onde $\mathbf{\Lambda}^{i}_{yu} \in \mathbb{R}^{pr\times pr}$ e $\mathbf{S}^{i}_{yu} \in \mathbb{R}^{g(m+r)\times g(m+r)}$ são matrizes ortogonais, e $\mathbf{\Sigma}^{i}_{yu} \in \mathbb{R}^{pr\times g(m+r)}$ é a matriz diagonal definida como:

$$\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu} = \left[\begin{array}{c:c} \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)_n & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{26}$$

$$\left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)_n = \left[\begin{array}{c:c} \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_{n_{min}}} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)\Big|_{\sigma_{n_{min}+1}}^{\sigma_n} \end{array}\right] \tag{27}$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{n_{min}} \gg \sigma_{n_{min}+1} \geq \ldots \geq \sigma_n$ sendo os elementos da *matriz de valores singulares* $\left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, desenvolvida em (27), a qual pode ser decomposta em duas submatrizes: a *matriz de valores singulares significativos* $\left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)\big|_{\sigma_1}^{\sigma_{n_{min}}} = \mathrm{diag}\left[\sigma_1, \cdots, \sigma_{n_{min}}\right] \in \mathbb{R}^{n_{min}\times n_{min}}$ e a *matriz de valores singulares não significativos* $\left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)\big|_{\sigma_{n_{min}+1}}^{\sigma_n} = \mathrm{diag}\left[\sigma_{n_{min}+1}, \cdots, \sigma_n\right] \in \mathbb{R}^{(n-n_{min})\times(n-n_{min})}$. Os valores singulares não significativos são relativamente pequenos por conterem mais informações ruidosas do que sistema, implicando que o seu comportamento pode ser aproximadamente representado por $\left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)\big|_{\sigma_1}^{\sigma_{n_{min}}}$. Para isso é necessário limitar o número de colunas até as n_{min} primeiras colunas em ambas as matrizes $\boldsymbol{\Lambda}^i_{yu}$ e $\mathbf{S}^i_{yu}$, resultando em $\left(\boldsymbol{\Lambda}^i_{yu}\right)_{n_{min}} \in \mathbb{R}^{pr\times n_{min}}$ e $\left(\mathbf{S}^i_{yu}\right)_{n_{min}} \in \mathbb{R}^{g(m+r)\times n_{min}}$, tal que $\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^i_{yu}(0)\right)_{n_{min}} = \left(\boldsymbol{\Lambda}^i_{yu}\right)_{n_{min}} \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)\big|_{\sigma_1}^{\sigma_{n_{min}}} \left(\mathbf{S}^i_{yu}\right)^T_{n_{min}} \approx \boldsymbol{\mathcal{H}}^i_{yu}(0)$. Assim os parâmetros $\widehat{\mathbf{G}}^i$, $\widehat{\mathbf{H}}^i$, $\widehat{\mathbf{O}}^i$, $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^i$ e $\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^i$ são estimados como (Wu et al., 2015):

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{G}}^i = &\left[\left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)^{-1/2}_{n_{min}} \left(\boldsymbol{\Lambda}^i_{yu}\right)^T_{n_{min}}\right] \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}}^i_{yu}(1) \\ &\cdot \left[\left(\mathbf{S}^i_{yu}\right)_{n_{min}} \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)^{-1/2}_{n_{min}}\right]\end{aligned} \tag{28}$$

$$[\widehat{\mathbf{H}}^i \quad \widehat{\mathbf{O}}^i] = \text{as primeiras } m + r \text{ colunas de } \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{yu}\right)^{1/2}_{n_{min}} \left(\mathbf{S}^i_{yu}\right)^T_{n_{min}}. \tag{29}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}^i = \text{as primeiras } m \text{ colunas de } [\widehat{\mathbf{H}}^i \quad \widehat{\mathbf{O}}^i]. \tag{30}$$

$$\widehat{\mathbf{O}}^i = \text{as últimas } r \text{ colunas de } [\widehat{\mathbf{H}}^i \quad \widehat{\mathbf{O}}^i]. \tag{31}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^i = \text{as primeiras } r \text{ linhas de } \left(\boldsymbol{\Lambda}^i_{yu}\right)_{n_{min}} \left(\boldsymbol{\Sigma}^i_{\boldsymbol{yu}}\right)^{1/2}_{n_{min}}. \tag{32}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^i = \left(\widehat{\mathbf{Y}}^i_{yu}\right)_1 = \left(\overline{\widehat{\mathbf{Y}}}^i_{yu}\right)_1 \text{ de acordo com (18).} \tag{33}$$

Consequentemente **em termos de implementação** de (1), o modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso com abordagem direta dos dados em batelada pode ser completamente definido como:

$$R^i\text{: SE } \mathbf{y}(k) \text{ é } \mathcal{Y}^i_{yu} \text{ E } \mathbf{u}(k) \text{ é } \mathcal{U}^i_{yu}$$

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}^i(k) = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^i \hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k) + \widehat{\boldsymbol{\Delta}}^i \mathbf{y}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k+1) = \widehat{\mathbf{G}}^i \hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(k) + \widehat{\mathbf{H}}^i \mathbf{y}(k) \\ \qquad - \widehat{\mathbf{O}}^i \left[\mathbf{u}(k) - \hat{\mathbf{u}}^i(k)\right] \end{cases} \tag{34}$$

onde os termos linguísticos $\mathcal{Y}^i_{yu}$ e $\mathcal{U}^i_{yu}$ são definidos pelos conjuntos nebulosos de acordo com o que foi acima citado.

2.3 *Questões de implementação*

Para implementar o modelo nebuloso proposto pela Eq. (34) é necessário usar três metodologias como suporte: o *agrupamento de dados*, a *extração de dados referente a cada regra* e o *cálculo do grau de ativação do antecedente*. Apesar de existirem várias formas de executá-los (Babuška, 1998; Lughofer, 2011; Sousa and Kaymak, 2002; Wang, 1997), neste artigo serão usados o algoritmo de agrupamento de *Gustafson-Kessel* de acordo com Babuška (1998), a *abordagem da projeção e extenção cilíndrica* de acordo com Wang (1997) e *a metodologia probabilistica ou das distâncias* de acordo com Babuška (1998) para cada uma daquelas metodologias respectivamente. Observa-se que cada agrupamento (do inglês *cluster*) está associado com cada regra, e portanto serão considerados como sinônimos.

Além disso nos termos de cada consequente de regra ou agrupamento, tem-se alguns parâmetros definidos pelo usuário, i.e., n_{min}, q, p e g, os quais devem ser escolhidos seguindo alguns critérios:

a) $n_{min} \geq 1$;

b) $\dfrac{n_{min}}{m+r} \leq q \leq \dfrac{\min\limits_{i=1}^{c}\left\{l^i_c\right\} - m}{m+r+1}$;

c) $p \geq q$;

d) $g > \dfrac{pr}{m+r}$.

Se as frações não são inteiras, então elas devem ser arredondas em direção ao próximo inteiro positivo. O estado inicial de cada submodelo local pode ser definido como $\hat{\mathbf{x}}^i_{yu}(1) = \left[\left(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^i\right)^T \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^i\right]^{-1} \left(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^i\right)^T \mathbf{u}^i(1)$.

O Algoritmo 1 resume o procedimento de implementação da metodologia proposta por este artigo.

3 Implementação experimental: o tanque de reação de agitação contínua

Aqui será apresentado o processo de implementação experimental da metodologia proposta. Os

Algoritmo 1 Procedimento da realização do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso com abordage direta em batelada.

Entrada: a) a batelada de dados de treinamento $\mathbf{Z}_{yu}(l)$; b) os parâmetros referentes ao algoritmo de agrupamento de Gustafson-Kessel (GK) (são os mesmos para o método das distâncias (probabilístico)); c) o número de regras/agrupamentos $c \in \{2, \cdots, l\} \subset \mathbb{Z}_+$ e d) os parâmetros n_{min}, q, p e g, pelos critérios anteriormente estabelecidos.

Saída: A implementação do modelo nebuloso Takagi-Sugeno inverso estimado via abordagem direta da batelada de dados.

$\triangleright$ ETAPA 01: realizar o agrupamento e extração dos subconjuntos de dados $\mathbf{Z}^i_{yu}(l^i_c)$.

$\triangleright$ PASSO 1.2: obter os agrupamentos nebulosos via algoritmo GK conforme em Babuška (1998) e retornar a *matriz de partição nebulosa* $\mathbf{U} = [\mu_{ik}]_{c\times l}$, *matriz de centros dos agrupamentos* (ou pontos de operação) $\boldsymbol{\mathcal{V}} = [\mathbf{v}_i]_{(m+r)\times c}$ a a *matriz de covariância ponderada dos dados agrupados* $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \left[\mathbf{F}^i\right]_{c(m+r)\times(m+r)}$.

$\triangleright$ PASSO 1.3: da matriz de partição $\mathbf{U}$ e da batelada de dados de treinamento $\mathbf{Z}_{yu}(l)$, aplicar a metodologia de projeção e extensão cilíndrica sobre $\mathbf{Z}_{yu}(l)$ e obter cada subconjunto local de dados $\mathbf{Z}^i_{yu}(l^i_c)$. Maiores detalhes dessa metodologia consultar em Wang (1997).

$\triangleright$ ETAPA 02: Estimar os parâmetros de Markov do observador de Kalman pelas Eqs. (13), (15) e (16).

$\triangleright$ ETAPA 03: Desacoplar os parâmetros de Markov do observador de Kalman estimados no Passo 02 pelas Eqs. (17) a (24).

$\triangleright$ ETAPA 04: Estimar as matrizes $\widehat{\mathbf{G}}^i$, $\widehat{\mathbf{H}}^i$, $\widehat{\mathbf{O}}^i$, $\widehat{\mathbf{\Gamma}}^i$ e $\widehat{\mathbf{\Delta}}^i$, utilizando o ERA conforme as Eqs. (25) a (33).

$\triangleright$ ETAPA 05: Implementar o modelo Takagi-Sugeno inverso da Eq. (34) por meio das Eqs. (3) à (5) e estimar o *grau de ativação regra* em (2), nas seguintes condições:

1) Na etapa de treinamento: $\beta^i_{yu}(k) = \mu_{ik}$;
2) Na etapa de validação: a partir de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ obtidos do algoritmo GK, estimar $\beta^i_{yu}(k)$ por meio do método das distâncias (ou probabilístico), conforme Babuška (1998). OBS.: os parâmetros definidos pelo usuário para o algoritmo GK são os mesmos para a implementação do método das distâncias.

Fonte: autor próprio.

experimentos acontecerão com os dados da planta denominada tanque de reação de agitação contínua (Lightbody and Irwin, 1997). O funcionamento básico da planta consiste na reação de dois produtos que são misturados, gerando um composto A, cuja concentração é $C_a(t)$ em $[mol/L]$. A temperatura da mistura é $T(t)$ em $[K]$ (Kelvin). A reação exotérmica é controlada pela introdução de um refrigerante com taxa de fluxo $q_c(t)$ $[L/min]$. A dinâmica da planta é descrita pelas seguintes equações diferenciais não lineares:

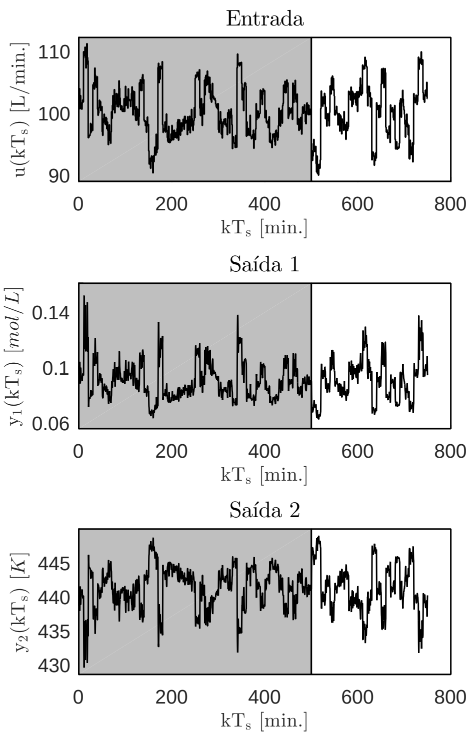
$$\frac{dC_a(t)}{dt} = \frac{q}{v}\left(C_{a0} - C_a(t)\right) - k_0 C_a(t) e^{-\frac{E}{RT(t)}} \tag{35}$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{q}{v}\left(T_0 - T(t)\right) - k_1 C_a(t) e^{-\frac{E}{RT(t)}} + k_2 q_c(t)\left(1 - e^{-\frac{k_3}{q_c(t)}}\right)\left(T_{c0} - T(t)\right) \tag{36}$$

onde os valores numéricos dos parâmetros são avaliáveis em Lightbody and Irwin (1997). Esta planta é do tipo SIMO, o qual tem uma entrada $\mathbf{u}(t) = u(t) = q_c(t)$ e duas saídas $\mathbf{y}(t) = \left[y_1(t)\,, y_2(t)\right]^T = \left[C_a(t)\,, T(t)\right]^T$.

Os dados do processo são obtidos do repositório DaISy (Moor, 2010), o qual tem 7500 pontos com um período de amostragem de $T_s = 0.1$ min. $= 6$ s. Para a realização das simulações, o espaço de treinamento (ou batelada) e o espaço de validação foram estabelecidos respectivamente como os primeiros $l = 5000$ pontos e os últimos $\eta = 2500$ pontos, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2: apresentação dos dados da planta. A área ▭ (cinza) é o espaço de treinamento e a área ▭ é o espaço de validação.



Para o projeto do modelo nebuloso proposto pela metodologia do artigo são definidos as seguintes características: a) o índice de deadbeat do observador $q = 1$; b) o número mínimo de estados para cada submodelo local de $n_{min} = 1$ estados; $p = 40$ e $g = 60$. Os outros parâmetros relativos ao algoritmo de agrupamento GK são definidos como padrão de acordo com Babuška (1998).

3.1 Resultados experimentais

Foram realizados 4 experimentos para a identificação de dinâmica inversa da planta do tanque de agitação, utilizando a metodologia proposta por este artigo. Cada experimento está associado com um número de regras/agrupamentos $c \in \{2, 3, 4, 5\}$. O desempenho dos experimentos foi avaliado pelas métricas erro quadrático médio normalizado NMSE e índice quadrático de confiabilidade R^2 (Lughofer, 2011), conforme a seguinte formulação:

$$NMSE = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\tilde{\hat{u}}(k) - u(k)}{\max(u) - \min(u)}\right]^2 \tag{37}$$

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left[\tilde{\hat{u}}(k) - \overline{u}(k)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N}\left[\tilde{\hat{u}}(k) - \overline{u}(k)\right]^2 + \sum_{k=1}^{N}\left[u(k) - \tilde{\hat{u}}(k)\right]^2} \tag{38}$$

onde N é o número de dados do espaço de treinamento (i.e. $N = l$); $u(k)$ e $\tilde{\hat{u}}(k)$ são a entrada da planta e a saída do modelo nebuloso inverso respectivamente, e $\overline{u}(k)$ é o valor médio recursivo de u até a amostra k, definido por $\overline{u}(k) = \frac{1}{k}\sum_{\kappa=1}^{k} u(\kappa),\ \forall\ k \in \{1, \cdots, N\} \subset \mathbb{Z}_+$.

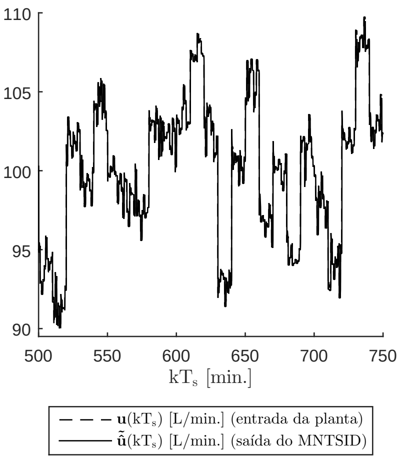
Na Tabela 1 estão os resultados destas métricas de desempenho para a simulação de cada regra/grupamento.

Tabela 1: número de regras / agrupamentos c *versus* métricas de desempenho do NMSE e do R^2.

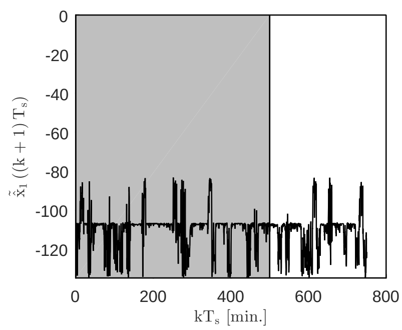
c	NMSE	R^2
2	$0,002311$	$0,964343$
3	$0,004679$	$0,932454$
4	$0,002258$	$0,964723$
5	$0,004743$	$0,930719$

A Figura 3 ilustra os resultados do experimento para $c = 4$ regras/agrupamentos: a Figura 3a apresenta a comparação entre a dinâmica da entrada do sistema $u(k)$ e a dinâmica da saída do modelo nebuloso inverso $\tilde{\hat{u}}(k)$ no espaço de validação, enquanto que a Figura 3b apresenta a dinâmica dos estados estimados do modelo nebuloso inverso, conforme a Eq. (4), para ambos os espaços de treinamento e validação.

Figura 3: resultados do experimento com $c = 4$ regras/agrupamentos.



(a) Comparação entre a saída modelo nebuloso inverso obtido pela metodologia proposta e a entrada da planta no espaço de validação.



(b) Estado nebuloso estimado. A área ▭ é o espaço de treinamento e a área ▭ é o espaço validação.

4 Conclusões

4.1 Análise dos resultados experimentais

Baseado nas Eqs. (37) e (38), observa-se que o valores ótimos para as métricas $NMSE$ e R^2 são obtidos com o mínimo e o máximo entre todos os valores comparados respectivamente. Assim o modelo nebuloso inverso ótimo dentre os experimentos foi aquele com $c = 4$ regras, $NMSE = 0,002258$ e $R^2 = 0,964723$, conforme a Tabela 1, apresentando um desempenho com pouca variabilidade e adequadamente confiável como estimador de $u(k)$, o que pode ser observado na etapa de validação do modelo nebuloso inverso ilustrado na Figura 3a. Porém um desempenho semelhante é obtido para um modelo nebuloso inverso com $c = 2$ regras, indicando tendência da metodologia apresentar melhores desempenhos com poucas regras.

O estado nebuloso estimado $\tilde{\hat{x}}_1$, conforme ilustrado na Figura 3b, apresenta uma dinâmica muito oscilatória. Isso é devido à composição nebulosa entre os submodelos locais, ponderados pelo seus respectivos graus de ativação normalizados γ^i_{yu}. Ainda assim os estados estimados dos submodelos locais $\hat{x}^i_1$ conduz a respostas da saídas locais adequadas, e a combinação dos seus efeitos na saída nebulosa da Eq. (5) compensa essas oscilações.

4.2 Considerações finais

Como acima mencionado, a formulação apresentada estruturou a metodologia na abordagem local do consequente, associando a metodologia do OKID para estimar os parâmetros a partir dos dados em cada submodelo local no contexto do espaço do estados com o observador de Kalman. Algumas questões sobre configurações de parâmetros da metodologia proposta, relativas aos algoritmo de agrupamento GK, a metodologia de projeção e extensão cilíndrica e ao OKID do consequente, foram estabelecidos na para a implementação experimental. Assim os resultados experimentais acima analisados demonstraram que o modelo decorrente da metodologia proposta é adequado para identificar a dinâmica inversa de dados em batelada de sistemas não lineares.

Referências

Babuška, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*, Vol. 27, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Brunot, M., Janot, A., Young, P. C. and Carrillo, F. (2018). An improved instrumental variable method for industrial robot model identification, *Control Engineering Practice* **74**: 107–117.

Dai, Y., Gruber, D., Jin, S. and Harmuth, H. (2017). Modelling and inverse investigation of the fracture process for a magnesia spinel regractory using a heterogeneous continuum model, *Engineering Fracture Mechanics* **187**: 438–448.

Jung, Y. and Enqvist, M. (2013). Estimating models of inverse systems, *52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 52, IEEE, Florence, pp. 7143–7148.

Kovalets, I. V., Efthimiou, G. C., Andronopoulos, S., Venetsanos, A. G., Argyropoulos, C. D. and Kakosimos, K. E. (2018). Inverse identification of unknown finite-duration air pollutant release from a point source in urban environment, *Atmospheric Environment* **181**: 82–96.

Lightbody, G. and Irwin, G. W. (1997). Nonlinear control structures based on embedded neural system models, *IEEE Transactions on Neural Networks* **4**(3): 553–567.

Lughofer, E. (2011). *Evolving Fuzzy Systems*, Vol. 27, Springer, Verlag.

Moor, B. D. (2010). *DaISy (Database for the Identification of Systems)*, STADIUS, Department of Electrical Engineering (ESAT), Faculty of Engineering, KU Leuven, Leuven. **URL:** *http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/*

Mu, C., Liang, H. and Sun, C. (2008). Inverse system identification of nonlinear systems using least square support vector machine based on fcm clustering, *2008 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*, pp. 921–926.

Phan, M., Juang, J.-N. and Longman, R. W. (1991). ON MARKOV PARAMETERS IN SYSTEM IDENTIFICATION, *NASA Technical Memorandum* (104156).

Qin, Y. and Jia, R. (2018). Adpative hysteresis compensation of piezoelectric actuator using direct inverse modelling approach, *IET Micro & Nano Letters* **13**(2): 180–183.

Sousa, J. M. C. and Kaymak, U. (2002). *Fuzzy Decision Making in Modeling and Control*, Vol. 27, World Scientific, New Jersey. World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems.

Wang, J. and Cisse, B. M. (2017). A generalized voltage control algorithm for smooth transition operation of microgrids, *in* W.-P. Cao and J. Yang (eds), *Development and Integration of Microgrids*, InTech, Rijeka, chapter 4. **URL:** *http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.69402*

Wang, L.-X. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice-Hall International, Upper Saddle River.

Wu, C. Y., Tsai, J. S. H., Guo, S. M., Shieh, L. S., Canelon, J. I., Ebrahimzadeh, F. and Wang, L. (2015). A novel on-line observer kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic system, *Journal of the Franklin Institute* **352**: 1119–1151.