Reconstrução de Distribuições de Probabilidade na Solução de Fluxo de Potência Probabilístico via Técnica *Unscented Transform*

Rafael S. Mesquita * **Alex J. C. Coelho** * **Fernando A. Assis** *
Rodolfo A. R. Moura * **Marco Aurélio O. Schroeder** *
Armando M. Leite da Silva ** **André Milhorance** **

* *Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), MG*
** *Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), RJ*
(rafael.s.mesquita@gmail.com, alexjuniordacunhacoelho@gmail.com, fernandoassis@ufsj.edu.br, moura@ufsj.edu.br, schroeder@ufsj.edu.br, am.leitedasilva@gmail.com, milhorance@ele.puc-rio.br)

Abstract: The power systems planning and operation face increasing challenges due to uncertainties associated with generation and consumption. In this context, this work explores the assessment of uncertainties using probabilistic power flow, applying the unscented transform (UT) technique. The UT can significantly reduce computational burden compared to traditional numerical methods, however, its inability to provide accurately probability distribution functions (*pdfs*) for random variables may be a limitation to its application. Therefore, complementary *pdf* reconstruction strategies become necessary. This study performs a comparison among different *pdf* reconstruction approaches via the method of moments: Cornish-Fisher expansion, Johnson system, and Pearson system. The results are compared with the solution via Monte Carlo simulation, in order to evaluate application limits and effectiveness in the approaches.

Resumo: O planejamento e a operação de sistemas de potência enfrentam desafios crescentes devido às incertezas associadas à geração e ao consumo. Neste contexto, este trabalho explora a avaliação de incertezas por meio da ferramenta de fluxo de potência probabilístico, com aplicação da técnica *unscented transform* (UT). A UT pode reduzir significativamente o esforço computacional em comparação com métodos numéricos tradicionais, no entanto, sua incapacidade de fornecer de forma precisa funções de distribuição de probabilidade (*fdps*) para variáveis aleatórias de interesse pode ser um limitante à sua aplicação. Assim, estratégias complementares de reconstrução de *fdps* tornam-se necessárias. Este estudo realiza a comparação entre diferentes abordagens de reconstrução de *fdps* via método dos momentos: expansão de Cornish-Fisher, sistema Johnson e sistema Pearson. Os resultados são comparados com a solução via simulação Monte Carlo, a fim de avaliar limites de aplicação e eficácia nas abordagens.

Keywords: Probabilistic power flow; probability distribution; Monte Carlo simulation; unscented transform.

Palavras-chaves: Distribuição de probabilidade; fluxo de potência probabilístico; simulação Monte Carlo; *unscented transform.*

1. INTRODUÇÃO

O impacto de incertezas no planejamento e na operação de sistemas elétricos de potência vem se tornando cada vez mais relevante devido a fatores como a utilização mais expressiva de fontes de energia renováveis intermitentes e a evolução acelerada de novas tecnologias de consumo. Desta forma, se torna indispensável a aplicação de ferramentas de avaliação que viabilizam a representação destas incertezas no estado de operação do sistema, como o fluxo de potência probabilístico (FPP).

Na solução do problema de FPP, diferentes métodos podem ser aplicados, sendo classificados, basicamente, em: numéricos, analíticos, por aproximação e híbridos. Os métodos numéricos, com destaque para a simulação Monte Carlo (SMC) (Leite da Silva and Milhorance, 2019), apresentam como vantagem a alta acurácia nos resultados, porém, sob alto custo em tempo de execução computacional a depender das características do problema. Os analíticos, como o método de convolução e o método dos cumulantes (Usaola, 2009), possibilitam uma grande redução no tempo de execução, no entanto, exigem uma série de simplificações do problema original, afetando a exatidão dos resultados e restringindo sua aplicabilidade. Já os métodos por aproximação, como o método de estimativa pontual (PEM) (Li et al., 2015) e a *unscented transform* (UT) (Oke et al., 2011), reduzem consideravelmente o tempo de execução em relação aos métodos numéricos, mantendo boa exatidão dos momentos estatísticos estimados. No entanto, devido ao número reduzido de amostras utilizado, não são capazes de reproduzir de maneira adequada as distribuições de probabilidade, necessitando portanto de algum método complementar para realizar estas estimativas. Os métodos híbridos, por sua vez, consistem na combinação de

duas ou mais abordagens distintas, possibilitando suprimir deficiências e potencializar vantagens individuais (Martins et al., 2024). Uma revisão crítica sobre a aplicação de diferentes métodos de solução do FPP é apresentada por Prusty and Jena (2017).

Neste trabalho é abordada a utilização da técnica UT para solução do FPP (Julier et al., 1995). A aplicação da UT consiste na discretização das distribuições de probabilidade contínuas das variáveis aleatórias (VAs) de entrada do problema, substituindo-as por distribuições discretas mais simples. Assim, a UT permite reduzir consideravelmente a quantidade necessária de estados simulados em relação aos métodos numéricos tradicionais, como a SMC. Porém, os resultados produzidos pela UT não contemplam de forma fidedigna as funções de distribuição de probabilidade (*fdps*), impossibilitando, por exemplo, a avaliação da superação de limites operativos da rede. Frente a isso, se faz necessária a implementação complementar de técnicas que permitam a reconstrução aproximada da *fdp*.

Trabalhos anteriores já se dedicaram à aplicação da UT em conjunto com técnicas complementares de reconstrução de *fdps*. Oke et al. (2011), por exemplo, utilizam a UT na solução do FPP para um sistema de distribuição com fonte de geração eólica, realizando a reconstrução da *fdp* por meio da expansão de Cornish-Fisher (CF). Lennerhag and Bollen (2022) também fazem uso desta combinação, UT e CF, para calcular a distorção harmônica no ponto de conexão de um parque eólico sob diferentes influências de incertezas. Peng et al. (2024) propõem um método modificado da UT para FPP, efetuando a reconstrução das *fdps* por meio do método da máxima entropia.

Muito embora diversos trabalhos tenham se dedicado a aplicar a UT em conjunto com técnicas de reconstrução de *fdps*, nenhum se dedicou a comparar criticamente o desempenho de diferentes estratégias, sendo esta a principal contribuição deste trabalho. No estudo comparativo proposto, é aplicada a UT baseada em quadratura gaussiana (Oke et al., 2011), combinada com três diferentes abordagens de reconstrução de *fdps* via método dos momentos (MM): CF, sistema Johnson (SJ) e sistema Pearson (SP). A fim de identificar limites de aplicação dessas abordagens e o desempenho da UT na solução do FPP em cada caso, são utilizados como *benchmark* resultados obtidos com aplicação da técnica de SMC.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta as metodologias de aplicação da UT e SMC na solução do FPP; a Seção 3 se dedica a apresentar as estratégias de reconstrução de *fdp*; a Seção 4 traz resultados e análises para um sistema teste com diferentes cenários; e a Seção 5 apresenta as conclusões gerais do trabalho.

2. FLUXO DE POTÊNCIA PROBABILÍSTICO

Desde a sua formulação original, proposta inicialmente por Borkowska (1974), diversas abordagens distintas do estudo de FPP foram investigadas. A Figura 1 apresenta um fluxograma que exemplifica, de forma generalizada, o processo de solução do FPP.

Basicamente, a primeira etapa consiste em modelar matematicamente os comportamentos aleatórios das grandezas

Figura 1. Fluxograma básico de solução do FPP.

de entrada, causados, por exemplo, pela variabilidade da geração de energia e flutuação da demanda. Em seguida, é aplicada a técnica de avaliação escolhida (SMC, UT, PEM, dentre outras). Por fim, é feita a análise das VAs das grandezas de saída, como magnitude e ângulo de tensão nas barras e fluxo de potência nos circuitos.

A técnica escolhida na segunda etapa, destacada em laranja na Figura 1, define a forma como são amostrados os diferentes estados operativos do sistema, os quais são avaliados na forma de fluxo de potência determinístico (FPD). A avaliação por meio de FPD permite representar o comportamento do sistema frente a cada amostra. A escolha da técnica de avaliação define também a forma como são calculadas as estimativas de momentos estatísticos e de distribuições de probabilidade das grandezas de interesse.

2.1 FPP via SMC

Na aplicação da técnica SMC para solução do FPP, quando se tem por objetivo estimar momentos estatísticos e obter as *fdps* de variáveis de saída interesse, basicamente deve-se amostrar um conjunto de estados operativos do sistema a partir das distribuições das VAs de entrada, de acordo com a modelagem das incertezas. Em seguida, cada amostra deve ser avaliada por meio de um FPD, a fim de verificar o estado da rede para cada caso. As estimativas dos momentos estatísticos, bem como a obtenção das distribuições de probabilidade das variáveis de interesse, podem ser obtidas a partir do conhecimento desses estados (Leite da Silva and Milhorance, 2019).

Neste trabalho, os resultados de FPP obtidos via SMC são considerados como *benchmark* para validação da UT, quando combinada com as diferentes estratégias de reconstrução de *fdps*. Destaca-se, que é necessário garantir a convergência dos momentos até a ordem de interesse, o que pode requerer mais estados de simulação que critérios de convergência tradicionalmente aplicados.

2.2 FPP via UT

O emprego da UT, que consiste na discretização das distribuições de probabilidade contínuas das variáveis de entrada, é feita a partir de um conjunto de pesos e pontos sigma, definidos de modo a conservar as características estocásticas originais do problema (Julier et al., 1995). As distribuições discretas obtidas devem possuir, aproximadamente, os mesmos momentos estatísticos, sendo que o conjunto precisa então obedecer aos seguintes axiomas:

$$E\left(X^n\right) = \int_a^b x^n f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{p} w_i S_i^n \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} w_i = 1 \tag{2}$$

onde n representa o n-ésimo momento da variável X que se deseja avaliar, w_i e S_i são, respectivamente, o i-ésimo peso

e ponto sigma associados à variável X, e p é o tamanho do conjunto de pesos e pontos sigma considerados para X.

O primeiro passo de aplicação da UT consiste, dessa forma, em definir o conjunto de pesos e pontos sigma que representam a modelagem das incertezas das grandezas de entrada. Diversos métodos de obtenção foram investigados, sendo, neste trabalho, utilizado o de quadratura gaussiana, por possibilitar boas aproximações para momentos de alta ordem. Neste método, é necessário gerar polinômios ortogonais, o que é realizado pelo procedimento de Stieltjes, como descrito em detalhes por Oke et al. (2011).

Considerando N_{VA} variáveis de entrada estatisticamente independentes e a definição de p pesos e pontos sigma para cada variável, o número total de estados operativos (amostras) a serem avaliados via FPD, determinado pela combinação dos pontos das VAs de entrada, é dado por (3). Os pesos são obtidos pelo produto de cada peso individual.

$$N_t = \prod_{i=1}^{N_{VA}} p \tag{3}$$

Geralmente, o número de amostras N_t é bem menor que o número de amostras necessárias para convergência da técnica de SMC, sendo esta a razão do ganho de desempenho computacional observado com a aplicação da técnica UT. Contudo, conforme proposta de análise deste trabalho, com a UT torna-se ainda necessário utilizar técnicas de reconstrução da *fdp* quando se tem também por objetivo obter as distribuições das variáveis de saída.

No presente trabalho, são estimados e analisados os quatro primeiros momentos estatísticos padronizados: média ($\hat{\mu}$), variância ($\hat{\sigma}^2$), assimetria ($\hat{\gamma}$) e curtose ($\hat{\kappa}$), os quais são utilizados nas abordagens de reconstrução de *fdp* avaliadas. As equações utilizadas para o cálculo desses momentos utilizando amostras provenientes da UT são descritas por Lennerhag and Bollen (2022).

3. TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO DE *FDP*

As técnicas mais comumente empregadas para reconstrução de *fdps* a partir de amostras são o método da máxima verossimilhança, método da máxima entropia, MM e estimativa baseada em Kernel. As três primeiras técnicas são conhecidas como estimações paramétricas, pois partem de uma função parametrizável, cujos valores dos parâmetros devem ser calculados de forma a se obter o melhor ajuste para a distribuição. Em oposto, a estimativa baseada em Kernel é conhecida como estimação não paramétrica, não asssumindo nenhum conjunto de parâmetros para a *fdp* a ser estimada.

As estimativas baseadas nos métodos da máxima verossimilhança e da máxima entropia e na estimativa baseada em Kernel são calculadas diretamente a partir de todas as amostras, enquanto o MM utiliza as amostras de forma indireta, por meio dos momentos estatísticos do conjunto. Como a UT é uma técnica que apresenta um conjunto de amostras reduzido, que é ponderado por pesos, optou-se por implementar o MM neste trabalho, uma vez que a UT é uma excelente ferramenta na estimação destas medidas estatísticas.

Na aplicação do MM, parte-se de uma *fdp* parametrizável que, em geral, apresenta quatro parâmetros (a_1, a_2, a_3 e a_4) e iguala-se os quatro momentos estimados ($\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\kappa}$) a partir do conjunto de amostras às equações que definem os quatro primeiros momentos da *fdp*:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = g_1(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \hat{\sigma}^2 = g_2(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \hat{\gamma} = g_3(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \\ \hat{\kappa} = g_4(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \end{cases} \tag{4}$$

onde as funções g_1, g_2, g_3 e g_4 definem expressões matemáticas para o cálculo dos quatro primeiros momentos estatísticos da distribuição parametrizável utilizada como base no MM e x é a variável independente das funções.

O sistema de equações (4) é solucionado para os parâmetros a_1, a_2, a_3 e a_4 e, por fim, a *fdp* pode ser reconstruída a partir dessas estimativas. Destaca-se, que apesar da *fdp* de uma variável aleatória não ser descrita em sua totalidade por um número finito de momentos, os quatro primeiros momentos estatísticos são importantes informações que dizem respeito quanto ao seu formato característico (Dang and Xu, 2019).

Três diferentes abordagens de reconstrução de *fdps* a partir do MM são consideradas neste trabalho: expansão de CF, SJ e SP. Para aplicação dessas abordagens, é necessária uma avaliação cuidadosa de seus respectivos planos de assimetria-curtose, que são representações gráficas dos valores de assimetria e curtose que uma determinada *fdp* pode assumir. As subseções a seguir detalham as particularidades de cada uma delas.

3.1 Expansão de Cornish-Fisher

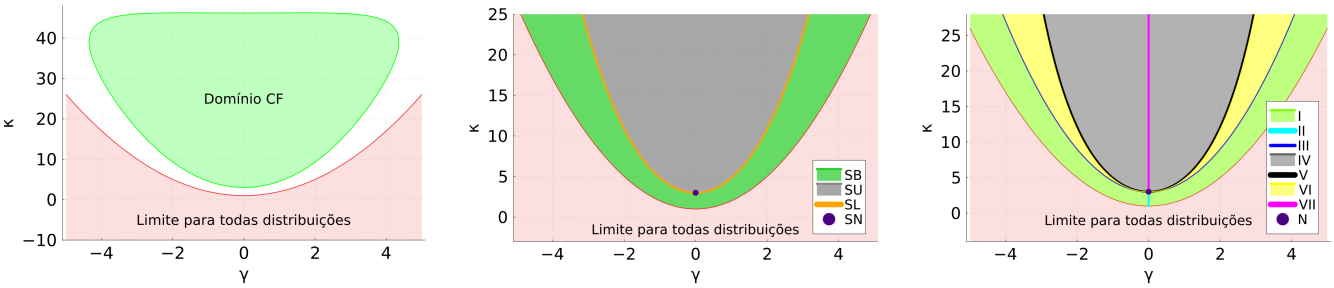
A expansão de CF é uma abordagem de reconstrução de distribuição de probabilidade baseada na expansão de séries polinomiais, com base nos polinômios de Hermite (Maillard, 2018). Essa classe de polinômios é ortogonal à *fdp* de uma distribuição do tipo normal. Portanto, o método parte desse tipo de distribuição e adiciona termos que distorcem o seu formato característico. Estes termos são os momentos estatísticos da variável aleatória cuja *fdp* (ou função densidade acumulada - *fda*) deseja-se estimar.

Seja X uma variável aleatória cujos quatro primeiros momentos, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\gamma}_x$ e $\hat{\kappa}_x$ são estimados utilizando a UT. A partir da CF, a função quantil de X, representada por $x(q)$, pode ser estimada de acordo com:

$$\begin{aligned} x(q) = \hat{\mu}_x + \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2}}{\sigma_{CF}} \Bigg\{ & \Phi^{-1}(q) + \frac{1}{6}\left[\left(\Phi^{-1}(q)\right)^2 - 1\right]\gamma_{CF} \\ & + \frac{1}{24}\left[\left(\Phi^{-1}(q)\right)^3 - 3\Phi^{-1}(q)\right](\kappa_{CF} - 3) \\ & - \frac{1}{36}\left[2\left(\Phi^{-1}(q)\right)^3 - 5\Phi^{-1}(q)\right]\gamma_{CF}^2 \Bigg\} \end{aligned} \tag{5}$$

onde: $\Phi^{-1}(q)$ é a função quantil da distribuição Normal padrão; $q \in [0, 1]$ são os quantis a se aproximar; σ_{CF}, γ_{CF} e κ_{CF} são, respectivamente, o desvio padrão, a assimetria e a curtose da CF.

Os parâmetros γ_{CF} e κ_{CF} estão relacionados com $\hat{\gamma}_x$ e $\hat{\kappa}_x$ por meio de equações não lineares, sendo, portanto, obtidos neste trabalho via método de Newton-Raphson. Os valores de γ_{CF} e κ_{CF} são então utilizados posteriormente para calcular σ_{CF}. As equações que relacionam esses parâmetros são apresentadas por Maillard (2018).



(a) (b) (c)

Figura 2. Planos de assimetria-curtose: (a) CF; (b) SJ; e (c) SP.

Apesar da CF apresentar grande flexibilidade ao reconstruir uma variada gama de distribuições de probabilidade, uma das suas limitações está relacionada ao seu domínio de validade. Este domínio restringe o intervalo de valores de assimetria e curtose que o método consegue aproximar garantindo a monotonicidade da função reconstruída. O domíno de validade da CF é apresentado no plano de assimetria-curtose representado pela Figura 2(a).

Ao fim do processo de estimação dos parâmetros, a *fda* de X é obtida invertendo-se $x(q)$, ou seja, $F(x) = x^{-1}(q)$. Já a *fdp* é estimada derivando-se numericamente $F(x)$, dada a inexistência de uma fórmula analítica para expressá-la.

3.2 Sistema Johnson

O SJ consiste numa família de distribuições que, por meio de transformações específicas, pode ser reduzido para uma VA normal padrão (Johnson, 1949). Este sistema consiste em quatro componentes, cada um apresentando uma transformação diferente e cobrindo regiões distintas do plano de assimetria-curtose.

Para compreensão, seja Z uma VA que segue uma distribuição normal padrão. Pode-se definir uma segunda variável aleatória Y tal que (6) seja satisfeita.

$$Z = \alpha + \delta f(Y) \tag{6}$$

onde Y tem uma distribuição dependente dos parâmetros α e δ e da função f. Dois parâmetros adicionais, de posição e escala, podem ser introduzidos de acordo com:

$$Y = \frac{(X - \xi)}{\lambda} \tag{7}$$

Em (7), X é a VA geral do SJ e tem uma *fdp* dependente dos parâmetros ξ, λ, δ e α, além da função f. Segundo Johnson (1949), quatro diferentes famílias de distribuição resultam de diferentes escolhas para a função f, sendo:

(1) S_N - Sistema Normal: é o caso mais simples e surge quando $\alpha = 0$, $\delta = 1$ e $f(Y) = Y$;
(2) S_L - Sistema Lognormal: é obtido quando $f(Y) = \ln(Y)$. Neste caso $X > \xi$;
(3) S_U - Sistema Ilimitado: resulta de $f(y) = \sinh^{-1}(Y)$. Neste sistema $-\infty < X < \infty$;
(4) S_B - Sistema Limitado: surge quando $f(Y) = \ln[Y/(1-Y)]$. Neste caso $\xi < X < \xi + \lambda$.

O uso do SJ para aproximar distribuições de probabilidade é muito útil dado que, em conjunto, os quatro subsistemas (S_N, S_L, S_U e S_B) cobrem todos os valores possíveis do plano de assimetria-curtose, visto na Figura 2(b).

A estimação dos parâmetros ξ, λ, δ e α utilizando o MM é relativamente fácil de ser implementada computacionalmente para as distribuições S_N, S_L e S_U (Karian and Dudewicz, 2011). Contudo, estimar os parâmetros do S_B é uma tarefa árdua em termos de complexidade devido à natureza das equações envolvidas. Neste sentido, diversos pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento de tabelas que relacionam os momentos estimados da variável que se deseja aproximar com os parâmetros da distribuição S_B. Devido à sua característica peculiar, a distribuição S_B é implementada neste trabalho por meio do uso da tabela apresentada por Karian and Dudewicz (2011), que é uma das tabelas mais completas já publicadas na literatura.

É notório ressaltar que os valores tabelados são capazes de cobrir uma região extensa de pares de assimetria-curtose do referido subsistema, resultando na possibilidade de aproximação de vários formatos de distribuições de probabilidade. Além disso, para pontos não tabelados que estejam no interior dos limites da tabela, pode ser aplicado o método de interpolação linear.

3.3 Sistema Pearson

O SP é conhecido como o primeiro sistema de distribuições de probabilidade proposto na literatura (Pearson, 1895). De forma similar ao SJ, também é capaz de aproximar quaisquer valores possíveis de assimetria e curtose, porém, é baseado na solução de uma equação diferencial ordinária (EDO), a qual fornece diferentes soluções a depender das condições iniciais. A EDO proposta por Pearson (1895) é representada por:

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dx} = -\frac{a + x}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2} \tag{8}$$

em que a, c_0, c_1 e c_2 são parâmetros a determinar, cujas expressões matemáticas que os relacionam com os momentos estimados são apresentadas em (9), (10) e (11).

$$a = c_1 = \frac{\hat{\gamma}_x(\hat{\kappa}_x + 3)}{(10\hat{\kappa}_x - 12\hat{\gamma}_x^2 - 18)}\hat{\sigma}_x \tag{9}$$

$$c_0 = \frac{(4\hat{\kappa}_x - 3\hat{\gamma}_x^2)}{(10\hat{\kappa}_x - 12\hat{\gamma}_x^2 - 18)}\hat{\sigma}_x^2 \tag{10}$$

$$c_2 = \frac{(2\hat{\kappa}_x - 3\hat{\gamma}_x^2 - 6)}{(10\hat{\kappa}_x - 12\hat{\gamma}_x^2 - 18)} \tag{11}$$

A solução da EDO depende dos valores dos coeficientes a, c_0, c_1 e c_2, e, consequentemente, dos momentos $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\gamma}_x$ e $\hat{\kappa}_x$ estimados. Além disso, as distribuições propostas

por Pearson são normalizadas, logo, é possível ajustá-las para que tenham a mesma média $\hat{\mu}_x$ da variável de interesse. A referida normalização se dá por meio da inserção de uma constante de normalização em cada uma das *fdps* que são solução do SP. Segundo Yang et al. (2019), existem 7 *fdps* que são soluções do SP. Adicionalmente, a distribuição Normal também é uma solução, porém não recebe uma nomenclatura especial por se tratar de um ponto de convergência de todas as outras distribuições.

A Figura 2(c) apresenta o plano de assimetria-curtose do SP, com destaque para o domínio de validade de cada uma das distribuições de probabilidade que compõem este sistema. Dentre todas distribuições, incluindo a normal (N), as mais importantes são as dos tipos I, IV e VI, visto que cobrem uma região, ou área, de valores possíveis de assimetria-curtose. As demais distribuições são chamadas distribuições de transição e contemplam apenas uma curva de valores possíveis de assimetria-curtose.

Neste trabalho, a aplicação do MM para estimar os parâmetros das distribuições do SP é conduzida por meio do uso do pacote computacional "PearsonDS" (Becker et al., 2023), um algoritmo elaborado em linguagem de programação R que utiliza rotinas de otimização para ajuste da distribuição de probabilidade em função dos momentos.

4. ESTUDOS DE CASO

Para avaliar a aplicação da UT na análise de FPP em conjunto com as diferentes abordagens de reconstrução de *fdps* (MM combinado com CF, SJ e SP), foram realizados estudos de caso com o *IEEE 6-Bus System*, representado na Figura 3, cujos dados foram adaptados em relação à aplicação feita por Oke (2013). As incertezas das variáveis de entrada foram modeladas por:

- Geração Eólica: representada na Barra 2 por uma distribuição lognormal (Garcia et al., 1998);
- Cargas: representadas nas Barras 3, 5 e 6 por meio de distribuição normal (Prusty and Jena, 2017).

Foram considerados dois cenários distintos de avaliação: no Cenário 1, toda a geração da Barra 2 é dada pelo parque eólico; no Cenário 2, a geração eólica representa 40% da capacidade instalada na Barra 2, sendo o restante da geração convencional, no entanto, apresenta uma variabilidade maior em relação ao Cenário 1. Nos dois cenários, as médias das distribuições para geração e carga foram consideradas iguais aos valores determinísticos originais do sistema. A Tabela 1 apresenta a relação completa da modelagem de incertezas consideradas neste trabalho, incluindo os valores médios (μ) e os coeficientes de variação (CV).

As grandezas de interesse na avaliação do FPP são as magnitudes de tensão nas barras de carga (V_3, V_4, V_5 e V_6) e os fluxos de potência nos circuitos (S_{14}, S_{16}, S_{23}, S_{25}, S_{34}, S_{46} e S_{56}). Para essas grandezas, são estimados os momentos estatísticos até a 4ª ordem (i.e., $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\kappa}$), e as *fdas*, obtidas a partir das *fdps* reconstruídas.

Na aplicação da UT, cada VA de entrada foi discretizada por meio de 5 conjuntos de pesos e pontos sigma (i.e., $p = 5$), valor este definido empiricamente. Ressalta-se que a acurácia dos resultados pode ser aprimorada aumentando o valor desse parâmetro. Após a combinação de todos os

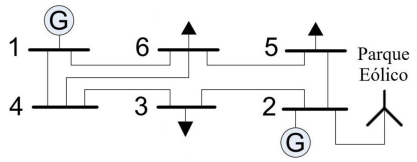


Figura 3. Sistema Teste - *IEEE 6-Bus System.*

Tabela 1. Dados de modelagem das incertezas.

Barra	Incerteza	Distribuição	μ [pu]	Cenário 1		Cenário 2	
				%	CV	%	CV
2	Geração	Lognormal	0,45	100	0,10	40	0,35
3	Carga	Normal	0,55	100	0,25	100	0,25
5	Carga	Normal	0,30	100	0,25	100	0,25
6	Carga	Normal	0,60	100	0,25	100	0,25

pontos sigma de todas as $N_{VA} = 4$ variáveis de entrada, conforme metodologia adotada, a configuração final resulta em um conjunto de $N_t = 625$ pesos e pontos sigma. Ou seja, com a aplicação da UT para solução do FPP é necessário avaliar por meio de FPD um total de 625 estados operativos (amostras) do sistema.

Para a aplicação da técnica SMC, utilizada como *benchmark*, foi adotado como critério de convergência um limite de 0,1% para o coeficiente da variância amostral, valor este definido por meio de estudo de sensibilidade, a fim de garantir uma boa precisão dos momentos estatísticos até a 4ª ordem. O máximo desvio absoluto verificado para as *fdas* obtidas via UT e SMC é utilizado para avaliar o desempenho das estratégias de reconstrução de *fdps*.

4.1 Análise dos Momentos Estatísticos

Os desvios percentuais dos momentos estatísticos estimados via UT em relação àqueles estimados via SMC para os dois cenários avaliados são apresentados na Tabela 2. Na aplicação da SMC, para convergência do processo de avaliação, foram amostrados nos Cenários 1 e 2, respectivamente, 184.654 e 244.653 estados operativos do sistema. Vale lembrar que na aplicação da técnica UT é necessário avaliar apenas $N_t = 625$ estados em cada cenário, evidenciando os benefícios de seu emprego.

A partir dos resultados da Tabela 2, verifica-se que para a média ($\hat{\mu}$) todos os desvios em módulo são inferiores a 0,15%, para a variância ($\hat{\sigma}^2$) menores que 1,5% e para a curtose ($\hat{\kappa}$) esses valores são inferiores a 4,0%. Já para a assimetria ($\hat{\gamma}$), o maior valor de desvio foi de 11,52% na estimativa do fluxo de potência S_{56} no Cenário 1. No entanto, em média, esse desvio foi inferior a 3,0% em todos os casos. Estes resultados demonstram, portanto, a potencialidade da UT na estimativa dos quatro primeiros momentos padronizados utilizando um número reduzido de amostras em comparação à SMC.

4.2 Análise das fdps e fdas

A partir dos momentos estatísticos estimados via UT, podem então ser empregados o MM e as abordagens de reconstrução de *fdps* (i.e., expansão de CF, SJ e SP). Os planos de assimetria-curtose das VAs estimadas em cada caso para os Cenários 1 e 2 são apresentados, respectivamente, nas Figuras 4 e 5.

Tabela 2. Desvios percentuais dos momentos estatísticos em relação à SMC.

Momento	VA	Desvio [%] Cen. 1	Desvio [%] Cen. 2	VA	Desvio [%] Cen. 1	Desvio [%] Cen. 2
$\hat{\mu}$	V_3	-0,003	-0,003	S_{23}	0,007	-0,034
$\hat{\sigma}^2$		0,158	0,132		0,288	-0,050
$\hat{\gamma}$		-2,155	-1,759		6,841	-2,444
$\hat{\kappa}$		-1,321	-0,818		-0,674	-0,940
$\hat{\mu}$	V_4	-0,003	-0,003	S_{25}	-0,030	-0,043
$\hat{\sigma}^2$		0,195	0,168		0,501	-0,040
$\hat{\gamma}$		-2,157	-1,772		3,135	-0,669
$\hat{\kappa}$		-1,297	-0,817		0,276	0,281
$\hat{\mu}$	V_5	0,004	0,005	S_{34}	0,094	0,088
$\hat{\sigma}^2$		-0,150	-0,330		-0,001	-0,067
$\hat{\gamma}$		-1,542	-0,287		-2,893	-2,897
$\hat{\kappa}$		-0,518	0,456		-0,780	-0,564
$\hat{\mu}$	V_6	0,001	0,000	S_{46}	-0,072	-0,056
$\hat{\sigma}^2$		0,112	0,048		-0,254	-0,260
$\hat{\gamma}$		-1,301	-0,614		1,685	1,997
$\hat{\kappa}$		-1,420	-0,935		-0,042	0,171
$\hat{\mu}$	S_{14}	0,037	0,048	S_{56}	-0,081	-0,148
$\hat{\sigma}^2$		0,347	0,236		1,456	0,530
$\hat{\gamma}$		-2,665	-3,099		-11,520	-4,555
$\hat{\kappa}$		-0,508	-0,243		-0,445	-3,682
$\hat{\mu}$	S_{16}	0,008	0,034			
$\hat{\sigma}^2$		0,406	0,308			
$\hat{\gamma}$		-3,516	-5,084			
$\hat{\kappa}$		-0,329	-0,140			

Nos planos de assimetria-curtose, são definidas as regiões dos domínios de validade para a expansão de CF, sendo que apenas as *fdps* das VAs localizadas acima da curva CF podem ser obtidas por meio dessa abordagem. Verifica-se, portanto, que para o Cenário 1, as VAs S_{14}, S_{34} e S_{46} estão fora do domínio de validade da expansão de CF. Com o Cenário 2, apenas a VA S_{34} permanece fora desse domínio.

Para a abordagem SJ, nos planos das Figuras 4 e 5, as VAs localizadas acima da curva SJ devem ser representadas pela família de distribuições do tipo S_U e aquelas localizadas abaixo dessa curva pelo tipo S_B. Verifica-se que das 11 VAs avaliadas, 8 são do tipo S_U e 2 do tipo S_B nos dois cenários analisados, e apenas a VA S_{14} pertence a diferentes famílias de distribuição para estes cenários, sendo do tipo S_B no Cenário 1 e do tipo S_U no Cenário 2.

Por fim, em relação à abordagem SP, duas curvas estão presentes nos planos de assimetria-curtorse: SP-1 e SP-2. Essas curvas delimitam os tipos das distribuições para as VAs de interesse com a aplicação dentre os 8 tipos possíveis para essa abordagem (tipos de I a VII e N). Para os resultados obtidos, as VAs localizadas acima da curva SP-2 são do Tipo IV; entre as curvas SP-2 e SP-1 são do Tipo VI; e abaixo da curva SP-1 as VAs apresentam distribuição do Tipo I. No Cenário 1, 7 VAs foram definidas como do Tipo IV, 3 do Tipo I e 1 do Tipo VI. No Cenário 2, por sua vez, 9 VAs foram definidas como do Tipo IV, 1 do Tipo I e 1 do Tipo VI.

A avaliação de desempenho em relação à reconstrução das distribuições de probabilidade pode ser realizada a partir dos valores de máximos desvios absolutos observados entre as *fdas* obtidas via UT combinada com o MM e as *fdas* empíricas resultantes da aplicação do método de SMC. Os valores desses desvios obtidos para os Cenários 1 e 2 podem ser observados, respectivamente, nas Figuras 6 e

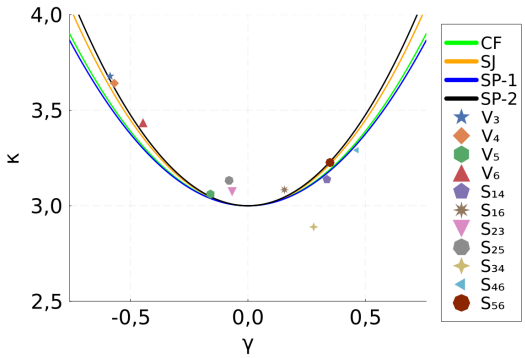


Figura 4. Pares de assimetria-curtose - Cenário 1.

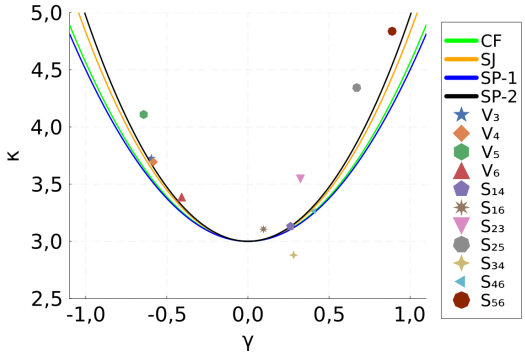


Figura 5. Pares de assimetria-curtose - Cenário 2.

7. Verifica-se que para a abordagem CF não há valores de desvio para S_{34} e S_{46} no Cenário 1 e para a S_{14} nos dois cenários, uma vez que para essa abordagem as *fdps* dessas VAs não puderam ser obtidas, por estarem fora dos limites de validade. Para as demais abordagens, todas as VAs tiveram suas *fdps* reconstruídas, consequentemente, permitindo a obtenção das *fdps*. De forma geral, verifica-se que a maioria dos valores de máximo desvio absoluto entre as *fdps* são inferiores a 0,006, o que corresponde a 0,6% em termos de probabilidade acumulada.

Observa-se, ainda, que os quatro maiores valores de máximo desvio absoluto observados para o Cenário 1 são obtidos a partir do SJ, no entanto, ainda assim, o maior valor é inferior a 0,02, ou 2% em termos de probabilidade acumulada. Para o Cenário 2, todos os desvios máximos são inferiores a 0,012, ou 1,2%. É interessante verificar, principalmente para o Cenário 1 (Figura 6), que os máximos desvios absolutos promovidos pela expansão de CF e pelo SP são muito similares. Além disso, verifica-se que em média as estimativas das tensões apresentaram menores valores de máximos desvios que as estimativas para os fluxos de potência nos circuitos.

Comparando-se os máximos desvios absolutos das *fdps* (Figuras 6 e 7) com os desvios percentuais dos momentos estatísticos (Tabela 2), nota-se que a VA S_{56} apresentou, em média, os maiores valores para as duas medidas de desvio. Nas Figuras 8 e 9 são apresentadas as *fdps* dessa variável para os Cenários 1 e 2, respectivamente, sendo possível verificar que as maiores divergências entre as *fdps* obtidas via UT e SMC acontecem na proximidade da cauda inferior.

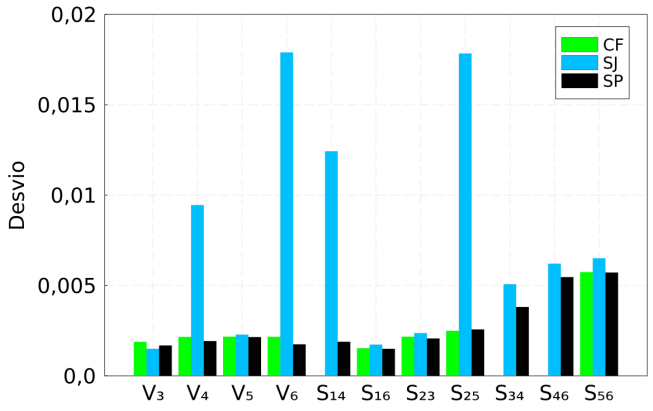


Figura 6. Desvios máximos absolutos - Cenário 1.

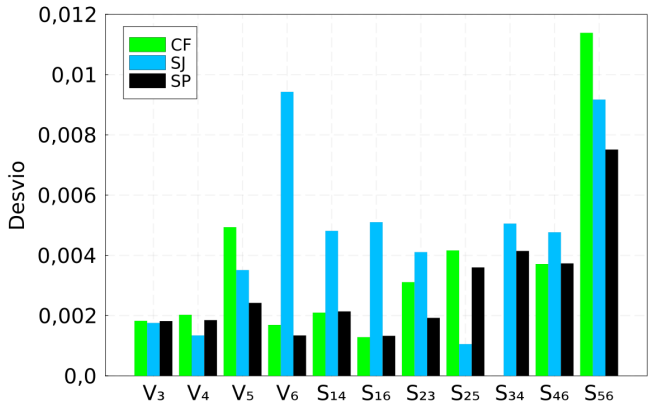


Figura 7. Desvios máximos absolutos - Cenário 2.

Por fim, pode-se dizer que a abordagem SP permitiu obter as *fdas* com menores valores de máximos desvios em relação à SMC. É notório ressaltar, no entanto, que os máximos desvios absolutos são estimativas pontuais e, portanto, traduzem o pior caso para cada uma das *fdas*. Em uma análise global de desvios entre as *fdas*, pode-se afirmar que a boa qualidade da aproximação das distribuições promovida pela aplicação da UT combinada com o MM é ainda mais expressiva.

4.3 Análise de Tempo Computacional

Em termos de tempo computacional, foram gastos aproximadamente 3,6 minutos na aplicação da SMC para avaliação do Cenário 1 e 5,5 minutos para o Cenário 2. Já com a aplicação da técnica UT, considerando a abordagem de reconstrução SP, que apresentou melhor exatidão, aproximadamente 18,2 segundos foram gastos tanto para o Cenário 1 quanto para o Cenário 2, considerando as fases de geração dos estados operativos (pontos sigma), de análises de adequação e de reconstrução das distribuições de probabilidade. Portanto, *speed-ups* aproximados de 11,9 e 18,1 foram verificados para avaliação dos Cenários 1 e 2, respectivamente. Vale comentar que as rotinas de avaliação foram implementadas em Matlab, e para realização dos testes, foi utilizado um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ, CPU 2.80GHz e 32GB de RAM.

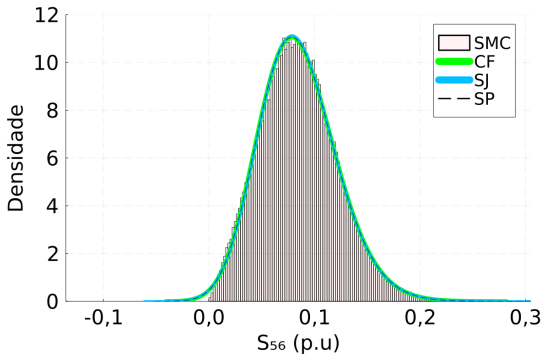


Figura 8. *fdp* obtida para S_{56} - Cenário 1.

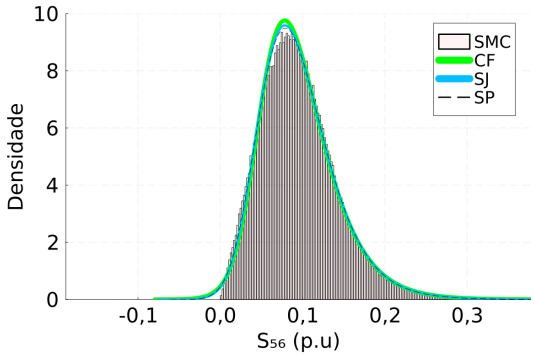


Figura 9. *fdp* obtida para S_{56} - Cenário 2.

5. CONCLUSÃO

Foi realizada neste trabalho uma avaliação crítica em relação à reconstrução de funções densidades de probabilidade na solução do problema de fluxo de potência probabilístico, com aplicação da técnica *unscented transform* (UT) combinada com o método dos momentos e três diferentes abordagens de reconstrução: expansão de Cornish-Fisher (CF), sistema Johnson (SJ) e sistema Pearson (SP). A partir dos resultados obtidos, foi possível constatar que a UT produziu boas estimativas de momentos estatísticos de até 4ª ordem para variáveis de interesse do problema, com uma quantidade de estados avaliados inferior em comparação com o método de simulação Monte Carlo (SMC).

Além disso, bons desempenhos foram verificados na reconstrução das funções distribuição de probabilidade e acumuladas, com destaque para a abordagem com SP, que apresentou a menor média de desvios em relação às funções empíricas obtidas via SMC. A abordagem com a expansão de CF, embora também tenha apresentado baixos desvios absolutos, não foi capaz de realizar a reconstrução para todos os casos avaliados, o que demonstra a limitação de sua aplicabilidade e evidencia a importância de considerar os domínios de validade de cada ferramenta.

É importante destacar que estudos mais aprofundados, considerando sistemas de maiores dimensões, com diferentes tipos de distribuição de probabilidade para variáveis de entrada do problema de fluxo de potência probabilístico, estão sendo realizados como continuidade deste trabalho. Estes estudos consideram uma avaliação criteriosa de cada variável estimada para o problema, com enfoque nas caudas das distribuições.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi apoiada em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sob o Auxílio 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), sob os Auxílios 404068/2020-0 e 402923/2021-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), sob o auxílio APQ-03609-17, Instituto Nacional de Energia Elétrica (INERGE) e Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ).

REFERÊNCIAS

Becker, M., Klößner, S., and Heinrich, J. (2023). *PearsonDS: Pearson Distribution System*. CRAN.

Borkowska, B. (1974). Probabilistic load flow. *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, (3), 752–759.

Dang, C. and Xu, J. (2019). Novel algorithm for reconstruction of a distribution by fitting its first-four statistical moments. *Applied Mathematical Modelling*, 71, 505–524.

Garcia, A., Torres, J., Prieto, E., and De Francisco, A. (1998). Fitting wind speed distributions: a case study. *Solar energy*, 62(2), 139–144.

Johnson, N.L. (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36(1/2), 149–176.

Julier, S.J., Uhlmann, J.K., and Durrant-Whyte, H.F. (1995). A new approach for filtering nonlinear systems. In *1995 American Control Conference-ACC'95*, volume 3, 1628–1632. IEEE.

Karian, Z.A. and Dudewicz, E.J. (2011). *Handbook of Fitting Statistical Distributions with R*. CRC Press Taylor & Francis Group.

Leite da Silva, A.M. and Milhorance, A. (2019). Risk assessment in probabilistic load flow via Monte Carlo simulation and cross-entropy method. *IEEE Trans. Power Syst.*, 34(2), 1193–1202.

Lennerhag, O. and Bollen, M.H. (2022). Managing uncertainties in wind farm harmonic studies using unscented transform. In *2022 20th International Conference on Harmonics & Quality of Power (ICHQP)*, 1–6. IEEE.

Li, X., Zhang, X., Wu, L., Lu, P., and Zhang, S. (2015). Transmission line overload risk assessment for power systems with wind and load-power generation correlation. *IEEE Trans. Smart Grid*, 6(3), 1233–1242.

Maillard, D. (2018). Computing the Cornish Fisher expansion moments using Hermite polynomials: A note. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3187286.

Martins, A.S.C., Araujo, L.R., and Penido, D.R.R. (2024). An active multiphase probabilistic power flow based on a clustering approach. *Electric Power Syst. Res.*, 230, 110264.

Oke, O.A., Thomas, D.W., Asher, G.M., and de Menezes, L.R. (2011). Probabilistic load flow for distribution systems with wind production using unscented transform method. In *ISGT 2011*, 1–7. IEEE.

Oke, O.A. (2013). *Enhanced Unscented Transform Method for Probabilistic Load Flow Studies*. Ph.d. thesis, University of Notthingham.

Pearson, K. (1895). X. Contributions to the mathematical theory of evolution.—II. Skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)*, 186, 343–414.

Peng, S., Zuo, J., Xu, W., Tang, J., Monti, A., Xie, K., Ponci, F., and Li, W. (2024). Fractional moments based adaptive scaled unscented transformation for probabilistic power flow of AC-DC hybrid grids. *IEEE Trans. Power Syst.*, 1–12.

Prusty, B.R. and Jena, D. (2017). A critical review on probabilistic load flow studies in uncertainty constrained power systems with photovoltaic generation and a new approach. *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 69, 1286–1302.

Usaola, J. (2009). Probabilistic load flow with wind production uncertainty using cumulants and Cornish–Fisher expansion. *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, 31, 474–481.

Yang, Q., An, X., and Pan, W. (2019). Computing and graphing probability values of pearson distributions: a SAS/IML macro. *Source Code Biol. Med.*, 14(6).