

REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS POR MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS E AJUSTE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

MARCELO A. OLIVEIRA*, ROBERTO ADES*, PAULO C. PELLANDA*

**Instituto Militar de Engenharia (IME)*

Pós-Graduação em Engenharia de Defesa

Praça General Tibúrcio, 80, Urca, Rio de Janeiro, RJ, CEP 22290-270, Brasil

Emails: oliveira.marcelo@ime.eb.br, ades.roberto@eb.mil.br, pcpellanda@ieee.org

Abstract— This paper presents a technique for reducing the order of dynamic system models in which the poles and zeros of the reduced model are obtained analytically by solving a system of linear equations. Whilst poles are computed by using a generalized least square technique, zeros are determined by a frequency response fitting based on a quadratic norm error criterion. Two numerical examples appearing in related publications corroborate the effectiveness of the proposed method whose results are compared with those obtained by competing methods.

Keywords— Control systems, Model order reduction, Frequency response fitting.

Resumo— Este artigo apresenta uma técnica de redução de ordem de modelos de sistemas dinâmicos na qual os polos e zeros do modelo reduzido são obtidos analiticamente, resolvendo um sistema de equações lineares. Enquanto os polos são calculados pelo uso de uma técnica de mínimos quadrados generalizada, os zeros são determinados por um ajuste de resposta em frequência baseado em um critério de erro de norma quadrática. Dois exemplos numéricos que aparecem em publicações relacionadas corroboram a eficácia do método proposto, cujos resultados são comparados com aqueles obtidos por métodos concorrentes.

Palavras-chave— Sistemas de controle, Redução de ordem de modelos, Ajuste de resposta em frequência.

1 Introdução

Em modelagem ou identificação de sistemas, alguns modelos obtidos podem possuir ordem elevada, o que muitas vezes dificulta a aplicação de técnicas de análise ou síntese de controle. Este fato tem motivado o desenvolvimento de técnicas de redução de ordem, visando obter modelos de ordens relativamente mais baixas e que representem de forma adequada as características dinâmicas dos sistemas, de acordo com critérios estabelecidos.

Desde a década de 1960, diversas técnicas vêm sendo propostas para reduzir ou simplificar modelos de sistemas dinâmicos (Aguirre, 2007). No início, a capacidade de processamento limitada dos computadores estimulou o desenvolvimento dessas técnicas e, atualmente, a motivação está relacionada principalmente à complexidade de determinados sistemas. A redução de ordem de modelos de sistemas elétricos de potência com centenas de estados, apresentada em (Li et al., 2016), é um típico exemplo. Singh et al. (2014) citam cinco razões para a redução: possibilidade de melhor compreensão do sistema, redução da complexidade computacional, redução da complexidade do *hardware*, viabilidade de projetos de controladores e rapidez do processamento em tempo real.

Algumas técnicas clássicas foram amplamente divulgadas na literatura, como por exemplo, a aproximação de Padé (Padé, 1892), o método de retenção de polos dominantes (Davison, 1966), o método de aproximação de Routh (Hutton and Friedland, 1975), o Truncamento Balanceado (Moore, 1981) e o Truncamento Modal (Green and

Limebeer, 2012). Alguns artigos de revisão, como (Antoulas et al., 2006; Bazaz et al., 2012; Fan et al., 2015), ressaltam as características de algumas dessas técnicas e realizam análises comparativas, sendo que cada uma apresenta vantagens e desvantagens relativas, de acordo com as aplicações específicas. Em (Silva et al., 2017), cita-se que o foco de cada técnica pode variar de acordo com a aplicação, ou seja, pode ser mais interessante produzir modelos que se aproximem do comportamento do modelo original em baixas frequências ou até mesmo produzir respostas com bons resultados de aproximação para entradas do tipo degrau ou impulso.

Recentemente, técnicas de otimização têm sido utilizadas visando a obtenção de melhores resultados, de acordo com determinado critério de interesse (Ferreira et al., 2011; Hachino et al., 2015; Asadi and Abut, 2016; Sambariya and Shama, 2016; Silva et al., 2017; Alsmadi et al., 2017). Em alguns trabalhos, a aplicação dessas técnicas é feita de forma associada a algum método clássico, visando preservar determinadas características do modelo original, como a resposta ao degrau ou ao impulso, ou até mesmo reduzir ou eliminar certa característica indesejada do método clássico, como possuir fase não mínima ou não preservar a posição dos polos e zeros dominantes. Em (Vasu et al., 2012), é proposta uma técnica de redução de modelos que combina o método dos mínimos quadrados generalizados, para cálculo da posição dos polos do modelo reduzido, associado com o método de otimização denominado PSO (*Particle Swarm Optimization*), para obtenção dos zeros a partir de critérios de custos

baseados nas respostas ao degrau e ao impulso.

Neste artigo, propõe-se um método de redução de ordem analítico, em que o cálculo dos coeficientes do denominador do modelo de ordem reduzida utiliza o método dos mínimos quadrados generalizados, conforme apresentado em (Vasu et al., 2012). Entretanto, os zeros são calculados a partir dos dados de resposta em frequência do modelo de ordem cheia. A obtenção dos coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência do modelo reduzido é feita de maneira direta, pela simples resolução de um Sistema de Equações Lineares (SEL). Dois exemplos numéricos foram escolhidos na literatura para exemplificar a aplicação da técnica proposta e mostrar a sua eficácia, comparando os resultados com outros métodos existentes e analisando-os por meio da comparação dos modelos originais e reduzidos.

2 Método Proposto

Seja a função de transferência $G(s)$, de ordem n , de um sistema linear e invariante no tempo, definida por:

$$G(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}. \quad (1)$$

O problema de redução de ordem consiste em obter uma função de transferência de ordem relativamente menor e que se aproxime de (1) segundo algum determinado critério. O método proposto, idealizado para sistemas SISO (*Single-Input Single-Output*), mas podendo ser estendido para sistemas MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*), admite que a Função de Transferência (FT) racional $G^r(s)$, com ordem $r < n$, possa ser escrita como:

$$G^r(s) = \frac{N(\underline{\alpha}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0 s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_r}{s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_r}, \quad (2)$$

em que $N(\underline{\alpha}, s)$ e $D(\underline{\beta}, s)$ são polinômios em s , cujos coeficientes estão definidos nos vetores $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$.

O cálculo dos coeficientes do denominador do modelo de ordem reduzida r utiliza o método dos mínimos quadrados generalizados, conforme apresentado em (Vasu et al., 2012), cujo equacionamento é semelhante ao proposto em (Pal, 1983). Em (Aguirre, 2007) são apresentadas algumas técnicas derivadas do clássico *Método de Aproximação de Padé* (Padé, 1892), dentre elas o *Método de Padé em torno de Duas Frequências*, que possui o mesmo equacionamento, com a diferença de ser utilizado para o cálculo dos coeficientes do numerador e do denominador, ao invés de apenas dos coeficientes do denominador, como proposto em (Vasu et al., 2012) e adotado neste trabalho. O cálculo dos coeficientes do denominador inicia-se pela expansão de $G(s)$, dividindo os polinômios

do seu numerador pelo de seu denominador, a partir do coeficiente de menor grau para o de maior grau, a fim de obter os valores numéricos de c_i , denominados *coeficientes de Padé*, conforme:

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i. \quad (3)$$

Assim:

$$\begin{aligned} (\alpha_r + \alpha_{r-1} s + \dots + \alpha_1 s^{r-1} + \alpha_0 s^r) &\equiv \\ &\equiv (\beta_r + \beta_{r-1} s + \dots + \beta_1 s^{r-1} + s^r) \cdot \\ &\cdot (c_0 + c_1 s + \dots + c_r s^r + c_{r+1} s^{r+1} + \dots) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= c_0 \beta_r, \\ \alpha_{r-1} &= c_1 \beta_r + c_0 \beta_{r-1}, \\ \alpha_{r-2} &= c_2 \beta_r + c_1 \beta_{r-1} + c_0 \beta_{r-2}, \\ &\vdots \\ \alpha_1 &= c_{r-1} \beta_r + \dots + c_1 \beta_2 + c_0 \beta_1, \\ \alpha_0 &= c_r \beta_r + \dots + c_2 \beta_2 + c_1 \beta_1 + c_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Para os termos em $s^{r+1}, s^{r+2}, \dots, s^{r+p-2}$, chegam-se às seguintes $p-2$ equações:

$$\begin{aligned} -c_1 &= c_{r+1} \beta_r + \dots + c_3 \beta_2 + c_2 \beta_1, \\ -c_2 &= c_{r+2} \beta_r + \dots + c_4 \beta_2 + c_3 \beta_1, \\ &\vdots \\ -c_{p-2} &= c_{r+p-2} \beta_r + \dots + c_p \beta_2 + c_{p-1} \beta_1. \end{aligned} \quad (5)$$

De forma similar, expandindo $G(s)$ por meio da divisão direta entre os polinômios do numerador e do denominador, a partir dos termos de maior grau, calculam-se os coeficientes M_j , conhecidos como *parâmetros de Markov*, tal que:

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M_j}{s^j}. \quad (6)$$

Então:

$$\begin{aligned} (\alpha_0 s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_{r-1} s + \alpha_r) &\equiv \\ &\equiv (s^r + \beta_1 s^{r-1} + \dots + \beta_{r-1} s + \beta_r) \cdot \\ &\cdot (M_0 + M_1 s^{-1} + \dots + M_r s^{-r} + M_{r+1} s^{-(r+1)} + \dots) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= M_0, \\ \alpha_1 &= M_0 \beta_1 + M_1, \\ \alpha_2 &= M_0 \beta_2 + M_1 \beta_1 + M_2, \\ &\vdots \\ \alpha_{r-1} &= M_0 \beta_{r-1} + M_1 \beta_{r-2} + \dots + M_{r-1}, \\ \alpha_r &= M_0 \beta_r + M_1 \beta_{r-1} + \dots + M_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Para $s^{-1}, s^{-2}, \dots, s^{-u+r-1}$, chegam-se às seguintes $u - r + 1$ equações:

$$\begin{aligned} M_{r+1} &= -M_1\beta_r - \dots - M_{r-1}\beta_2 - M_r\beta_1, \\ M_{r+2} &= -M_2\beta_r - \dots - M_r\beta_2 - M_{r+1}\beta_1, \\ &\vdots \\ M_{u+1} &= -M_{u-r+1}\beta_r - \dots - M_{u-1}\beta_2 - M_u\beta_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Igualando as equações em (4) e (7), eliminam-se as variáveis α_k , $k \in \{0, 1, \dots, r\}$, chega-se a um novo conjunto de $r + 1$ equações.

Dessa forma, é possível obter um SEL, cuja solução é o vetor dos coeficientes do denominador da FT reduzida $G^r(s)$, e que pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ - \\ - \\ Q_2 \\ - \\ - \\ Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_r \\ \vdots \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ - \\ - \\ Y_2 \\ - \\ - \\ Y_3 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

com:

$$\begin{aligned} Y_1 &= [-c_{p-2} \quad \dots \quad -c_3 \quad -c_2 \quad -c_1]^T, \\ Y_2 &= [M_0 - c_0 \quad M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_r]^T, \\ Y_3 &= [M_{r+1} \quad M_{r+2} \quad M_{r+3} \quad \dots \quad M_{u+1}]^T, \end{aligned}$$

sendo Q_1 obtido a partir das $p-2$ equações em (5), Q_2 das $r+1$ equações geradas a partir de (4) e (7), e Q_3 pelas $u - r + 1$ equações em (8), perfazendo um total de $p + u$ equações.

A quantidade de linhas do SEL é variável, ou seja, deve ser maior ou igual a r e depende da quantidade de divisões de polinômios a ser definida pelo programador e varia de um modelo a ser reduzido para outro. Para essa definição, convém considerar a convergência dos valores dos coeficientes β_i e podem ser utilizados critérios de custos, conforme realizado em (Vasu et al., 2012).

Uma vez arbitrada a ordem r e calculados os coeficientes β_i do modelo reduzido, para o cálculo dos coeficientes do numerador, propõe-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{r+1}} J(\underline{\alpha}) = \min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{r+1}} \left\| G(j\omega) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\omega)}{D(j\omega)} \right\|_2, \quad (10)$$

em que: $\underline{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r]^T \in \mathbb{R}^{r+1}$.

Logo:

$$\begin{aligned} J(\underline{\alpha}) &= \left\| G(j\omega) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\omega)}{D(j\omega)} \right\|_2 = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| G(j\omega_i) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \right|^2} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} J^2(\underline{\alpha}) &= \sum_{i=1}^m \Psi(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i), \quad \text{com} \\ \Psi(j\omega_i) &= G(j\omega_i) - \frac{N(\underline{\alpha}, j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \quad \text{e} \\ \Psi^*(j\omega_i) &\equiv \Psi(-j\omega_i), \end{aligned}$$

em que $\underline{w} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]^T$ é o vetor dos m valores de frequências, convenientemente atribuídas, de acordo com a faixa de interesse.

Esse problema pode ser solucionado calculando o gradiente de $J^2(\underline{\alpha})$ em relação à variável $\underline{\alpha}$, de modo que:

$$\nabla J^2(\underline{\alpha}) = \left(\frac{\partial J^2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial \alpha_r} \right)^T = (0 \quad 0 \dots 0)^T$$

Desta forma, chega-se a um SEL com $r + 1$ equações lineares nas variáveis $\underline{\alpha}$. Para fins de implementação computacional, após algumas manipulações algébricas, este SEL pode ser reescrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned} Re \left(\sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_r R_r^* & \dots & R_1 R_r^* & R_0 R_r^* \\ R_r R_{r-1}^* & \dots & R_1 R_{r-1}^* & R_0 R_{r-1}^* \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ R_r R_0^* & \dots & R_1 R_0^* & R_0 R_0^* \end{bmatrix} \right) \cdot \\ \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{r-1} \\ \alpha_r \end{bmatrix} = Re \left(\sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} R_r G^* \\ R_{r-1} G^* \\ \vdots \\ R_0 G^* \end{bmatrix} \right), \quad (11) \end{aligned}$$

em que:

$$R_k(j\omega_i) = \frac{(j\omega_i)^k}{D(j\omega_i)}, \quad k \in \{1, \dots, r\} \quad \text{e} \\ i \in \{1, \dots, m\}.$$

A fim de simplificar a notação, o argumento $j\omega_i$ de $R_k(j\omega_i)$ e de $G(j\omega_i)$ foi omitido em (11).

Com certa regularidade, verifica-se na literatura como critério de ajuste da função de transferência reduzida, alguma característica da resposta temporal, como a resposta ao degrau. Nestes casos, considera-se importante que o erro de regime permanente seja minimizado ou reduzido para zero. Assim, a fim de melhorar o ajuste da FT de ordem reduzida, pode-se calcular o coeficiente α_r , correspondente ao termo de grau zero do numerador, como:

$$\alpha_r = \frac{a_n}{b_n} \beta_r. \quad (12)$$

Como consequência, o SEL em (11) é simplificado, com a exclusão da última linha, além da transferência da coluna que multiplica o coeficiente α_r para o lado direito da igualdade, com os sinais dos seus componentes trocados.

3 Exemplos de Aplicação

Para fins de avaliação dos modelos reduzidos, foram utilizados três índices, sendo dois deles definidos em (Vasu et al., 2012):

$$I_I = \frac{\int_0^\infty [g(t) - g_r(t)]^2 dt}{\int_0^\infty g^2(t) dt} \quad (13)$$

e

$$I_D = \frac{\int_0^\infty [y(t) - y_r(t)]^2 dt}{\int_0^\infty [y(t) - y(\infty)]^2 dt}, \quad (14)$$

em que $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ e $g_r(t)$ são, respectivamente, as respostas ao impulso dos modelos original e reduzido; $y(t)$ e $y_r(t)$ são, respectivamente, as respostas ao degrau unitário dos modelos original e reduzido; e $y(\infty)$ é o valor da saída em regime permanente para uma entrada do tipo degrau unitário.

O índice I_I definido em (13) tem como finalidade medir o erro de ajuste entre as respostas ao impulso dos modelos original e reduzido, proporcionalmente à área entre as curvas. O índice I_D definido em (14) é análogo ao anterior, mas se refere às respostas ao degrau.

O terceiro índice levou em consideração o erro de ajuste da resposta em frequência, baseado em norma quadrática, entre o modelo original $G(s)$ e o reduzido $G_r(s)$, assim definido:

$$I_F = \|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_2 \quad (15)$$

considerando apenas um conjunto com m valores de frequências $\underline{\omega} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]^T$, previamente escolhidas em uma faixa de frequência de interesse.

3.1 Exemplo 1

No primeiro exemplo de aplicação é feita a redução de uma FT de sexta para segunda ordem, cujos coeficientes do modelo de ordem cheia são apresentados na Tabela 1. A FT utilizada neste primeiro exemplo, $G_1(s)$, foi apresentada em (Araújo et al., 2008) e utilizada também em (Silva et al., 2017). Ressalta-se, neste exemplo, que a convergência dos valores dos coeficientes do denominador da FT reduzida depende do número de equações em (9). Em (Vasu et al., 2012), a quantidade de equações foi definida em função dos valores de custos, de acordo com os dois critérios (13) e (14), dentro de um número limitado de equações utilizadas para fins de comparação.

Tabela 1: Coeficientes dos polinômios de $G_1(s)$.

| Coeficientes | Numerador | Denominador |
|--------------|-----------|-------------|
| s^6 | | 1 |
| s^5 | | 13,2 |
| s^4 | 1 | 158,6 |
| s^3 | 6 | 594 |
| s^2 | 96 | 2765 |
| s^1 | 780 | 1050 |
| s^0 | 3250 | 2500 |

Para ilustrar a variação dos valores dos coeficientes e, conseqüentemente, dos critérios de validação, o valor de u em (8) permaneceu constante e igual a zero, enquanto o valor de p em (5) assumiu

os seguintes valores: 2, 10, 100 e 1000. Na tabela 2 e na Figura 1, é apresentada a variação dos valores dos coeficientes β_1 e β_2 de $G_1^r(s)$ em função da quantidade de equações. Percebe-se que, com o aumento do número de equações, os valores numéricos dos coeficientes convergem para valores específicos. Neste exemplo, a variação nos valores dos coeficientes é pouco significativa se houver aumento do número de linhas acima do apresentado.

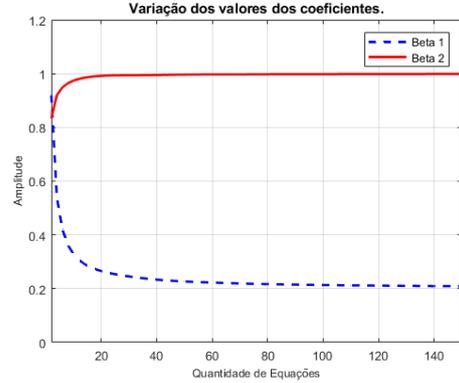


Figura 1: Variação dos valores dos coeficientes.

Considerando a convergência dos valores dos coeficientes, chega-se à seguinte FT reduzida:

$$G_1^r(s) = \frac{3,490416818 \cdot 10^{-6}s + 1,3}{s^2 + 0,2s + 1}, \quad (16)$$

Tabela 2: Coeficientes do denominador de $G_1^r(s)$.

| Equações | β_1 | β_2 |
|----------|-------------|-------------|
| 2 | 0,919315638 | 0,833804830 |
| 10 | 0,328243194 | 0,974009768 |
| 100 | 0,213529142 | 0,998072592 |
| 1000 | 0,201355295 | 0,999814527 |

Tabela 3: Avaliação dos modelos reduzidos $G_1^r(s)$.

| Método | I_I | I_D | I_F |
|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| MP-2 | 0,59483 | 0,70815 | 23,27497 |
| MP-10 | 0,12375 | 0,12622 | 27,31021 |
| MP-100 | 0,00874 | 0,00641 | 28,00395 |
| MP-1000 | 0,00432 | 0,00191 | 28,05418 |
| MP $G_1^r(s)$ | 0,00402 | 0,00161 | 28,05953 |
| Araújo | 0,02161 | 0,01772 | 569,0232 |
| Silva | 0,00327 | 0,00194 | 28,43620 |

Na tabela 3, são apresentados os resultados de avaliação dos modelos reduzidos obtidos pelo uso do método proposto (MP), com a variação do número de linhas em (9), comparativamente com os modelos reduzidos apresentados em (Araújo et al., 2008) e (Silva et al., 2017). Para o cálculo

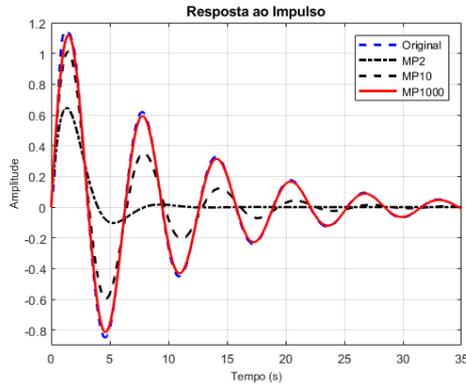


Figura 2: Resposta ao impulso do sistema original e dos modelos reduzidos MP-2, MP-10 e MP-1000.

dos indicadores I_I e I_D , foi considerado um intervalo de tempo de $150s$, e para I_F , foi utilizado um vetor com 500 valores de frequência, com espaçamento logarítmico entre 10^{-1} a $10^4 rad/s$. Os melhores resultados obtidos pelos três métodos estão em negrito e, neste caso, os resultados relativos a I_I e I_D melhoraram à medida que a quantidade de equações aumentou, além de permanecer menor que os valores obtidos pelos outros dois métodos, no critério relativo à resposta em frequência. O resultado obtido em relação à resposta temporal ao impulso pode também ser observado graficamente na Figura 2, onde é apresentada a resposta da FT original $G_1(s)$ e das FT reduzidas com diferentes números de equações (2, 10 e 1000). Percebe-se que a medida que aumenta a quantidade de equações, a resposta temporal se aproxima da resposta da FT original $G(s)$.

3.2 Exemplo 2

O segundo exemplo de aplicação trata da redução de ordem de uma FT de oitava ordem para uma de segunda ordem. Na Tabela 4, são apresentados os valores dos coeficientes do numerador e do denominador da FT original $G_2(s)$, que foi utilizada recentemente em (Asadi and Abut, 2016). Em (Vasu et al., 2012) foi feita uma análise comparativa entre diferentes abordagens, utilizando essa mesma FT. As FT reduzidas, apresentadas em (Asadi and Abut, 2016) e (Vasu et al., 2012), foram utilizadas para fins de comparação e os critérios de ajuste (13), (14) e (15) foram calculados utilizando a mesma rotina.

Aplicando o método proposto com apenas duas equações em (9), conforme feito em (Vasu et al., 2012), chega-se à FT reduzida:

$$G_2^r(s) = \frac{17,7107362881992s + 5,7147642932499}{s^2 + 7,2031774602528s + 5,7147642932499}. \quad (17)$$

Na Figura 3, é apresentado o diagrama de resposta em frequência do modelo original $G_2(s)$ e do modelo reduzido $G_2^r(s)$ e, nas Figuras 4 e 5, são ilustradas as respostas ao degrau e ao impulso.

Tabela 4: Coeficientes dos polinômios de $G_2(s)$.

| Coeficientes | Numerador | Denominador |
|--------------|-----------|-------------|
| s^8 | | 1 |
| s^7 | 18 | 36 |
| s^6 | 514 | 546 |
| s^5 | 5982 | 4536 |
| s^4 | 36380 | 22449 |
| s^3 | 122664 | 67284 |
| s^2 | 222088 | 118124 |
| s^1 | 185760 | 109584 |
| s^0 | 40320 | 40320 |

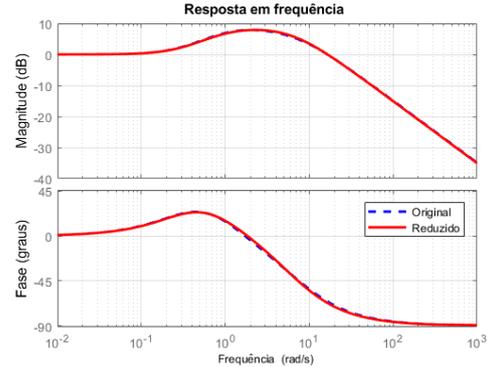


Figura 3: Diagrama de resposta em frequência do modelo original $G_2(s)$ e do reduzido $G_2^r(s)$.

Tabela 5: Avaliação dos modelos reduzidos $G_2^r(s)$.

| Método | I_I | I_D | I_F |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| MP | 0,00087 | 0,00184 | 0,36310 |
| Asad ¹ | 0,00028 | 0,00446 | 0,31061 |
| Vasu ² | 0,00119 | 0,00157 | 0,40416 |
| Para ³ | 0,00179 | 0,00070 | 0,27994 |
| Parb ⁴ | 0,04581 | 0,02508 | 1,77890 |
| Vish ⁵ | 0,00837 | 0,00958 | 0,97787 |
| Muk ⁶ | 0,08965 | 0,03882 | 13,1419 |
| JPal ⁷ | 0,73212 | 1,12670 | 9,44108 |
| Chen ⁸ | 1,10065 | 6,65226 | 86,5861 |

Fonte: ¹(Asadi and Abut, 2016), ²(Vasu et al., 2012),

³(Parmar, 2007a), ⁴(Parmar, 2007b),

⁵(Vishwakarma, 2011), ⁶(Mukherjee and Satakshi, 2005),

⁷(Pal, 1979), ⁸(Chen and Chang, 1980).

Na tabela 5, são comparados os resultados obtidos pelo método proposto com os de outros métodos. Para o cálculo de I_I e I_D , utilizou-se um intervalo de tempo de $9s$ e, para I_F , um vetor com 100 valores de frequência em escala logarítmica entre 10^{-2} e $10^3 rad/s$. Observa-se que os valores obtidos pela aplicação do método proposto são semelhantes em ordem de grandeza aos melhores resultados, estando entre os três melhores em todos os índices adotados (negrito), mesmo não se baseando diretamente na otimização de respostas temporais, como alguns dos outros métodos.

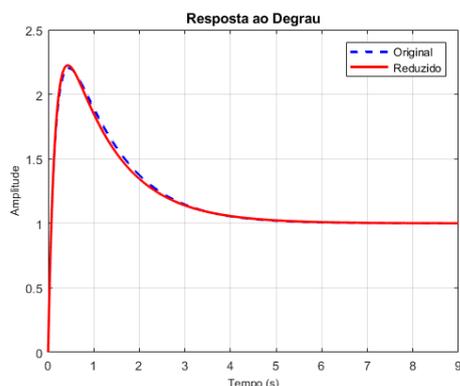


Figura 4: Resposta ao degrau do modelo original $G_2(s)$ e do reduzido $G_2^r(s)$.

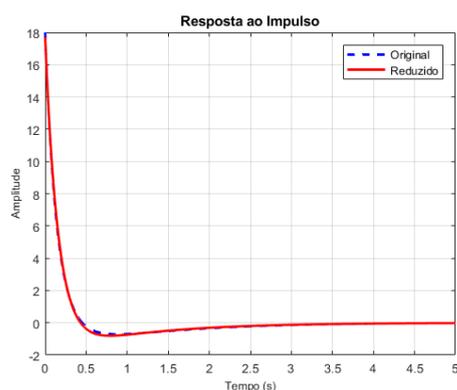


Figura 5: Resposta ao impulso do modelo original $G_2(s)$ e do reduzido $G_2^r(s)$.

Além disto, foram utilizadas apenas duas equações no SEL definido em (9), para fins de comparação em iguais condições com (Vasu et al., 2012), ou seja, neste caso não foi explorada a possibilidade de melhorar os resultados com o aumento do número de equações. Outra vantagem relativa é que a aplicação do método não requer procedimentos numéricos iterativos, sendo a solução obtida de forma analítica e rápida, pela simples resolução de um SEL.

4 Conclusões

Este trabalho introduz um método analítico de redução de ordem de modelos, que apresenta resultados compatíveis com os obtidos por outras técnicas publicadas recentemente. O ajuste dos coeficientes do polinômio do numerador do modelo reduzido obtido é baseado na resposta em frequência do modelo original, sendo realizado de maneira ótima, por minimizar o critério de ajuste convexo proposto. Outra vantagem relativa é que o método proposto independe de avaliações numéricas e iterativas das respostas temporais. O método proposto obteve resultados satisfatórios mesmo quando comparado com técnicas que utilizam métodos numéricos de otimização e adotam índices baseados em respostas temporais. A quan-

tidade de equações do SEL em (9) pode ser definida por meio de análise da convergência dos valores dos coeficientes, como apresentado no Exemplo 1, o que nem sempre ocorre, ou por avaliação de indicadores de custo, como os definidos na Seção 3.

Referências

- Aguirre, L. A. (2007). *Introdução à identificação de sistemas*, Editora UFMG, Belo Horizonte.
- Alsmadi, O., Alsmadi, A. and Gharaibeh, E. (2017). Design of reduced order models for multi-time-scale systems via firefly optimization, 14th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD).
- Antoulas, A. C., Sorensen, D. C. and Gugercin, S. (2006). A survey of model reduction methods for large-scale systems.
- Araújo, J. M., Castro, A. C. and Santos, E. T. F. (2008). Redução de ordem no domínio da frequência baseada na minimização da norma dos coeficientes polinomiais do erro, *Revista Controle & Automação* **19**(3): 235–241.
- Asadi, F. and Abut, N. (2016). A method for system order reduction based on genetic algorithm and fft, *International Journal of Advanced Research in Electrical Engineering and Technology* **5**: 6353 – 6357.
- Bazaz, M. A., un Nabi, M. and Janardhanan, S. (2012). A review of parametric model order reduction techniques, *IEEE ISPPCC*.
- Chen, T. C. and Chang, C. Y. (1980). Model reduction using the stability-equation method and the continued-fraction method, *International Journal of Control* **32**(1).
- Davison, J. E. (1966). A method for simplifying linear dynamic systems, *IEEE Transactions Automatic Control* **AC 11**(1): 93 – 101.
- Fan, G., Pan, K. and Canova, M. (2015). A comparison of model order reduction techniques for electrochemical characterization of lithium-ion batteries, 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC).
- Ferreira, A. O., Silva, O. F. and Barreiros, J. A. L. (2011). Uso de algoritmo genético para redução de ordem de modelos matemáticos, *X SBAl. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* **10**: 456 – 461.
- Green, M. and Limebeer, D. J. N. (2012). *Liknear robust control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- Hachino, T., Tanigawa, K., Takata, H., Fukushima, S. and Igarashi, Y. (2015). Frequency-weighted model reduction using firefly algorithm, *Journal of Automation and Control Engineering*. **3**(3).
- Hutton, M. F. and Friedland, B. (1975). Routh approximation for reducing order of linear time invariant systems, *IEEE Transaction on Automatic Control* **20**(3): 329 – 337.
- Li, C., Du, Z., Ni, Y. and Zhang, G. (2016). Reduced model-based coordinated design of decentralized power system controllers, *IEEE Tran. on Power Systems* **31**(3): 2172–2181.
- Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction, *IEEE Trans. Automat. Control* (26): 17–32.
- Mukherjee, S. and Satakshi, Mittal, R. C. (2005). Model order reduction using response-matching technique, *Journal of the Franklin Institute* **342**: 503 – 519.
- Padé, H. (1892). *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*, PhD thesis, l'École Normale Supérieure.
- Pal, J. (1979). Stable reduced-order pade approximants using the routh-hurwitz array, *Electronic Letters* **15**(8).
- Pal, J. (1983). Improved pade approximants using stability equation method, *Electronics Letters* **19**: 426 – 427.
- Parmar, G. (2007a). Order reduction of linear dynamic systems using stability equation method and ga, *Int. Journal of Electrical and Computer Engineering* **1**(2).
- Parmar, G. (2007b). Reduced order modelling of linear dynamic systems using particle swarm optimized eigen spectrum analysis, *Int. Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering* **1**(1).
- Sambariya, D. K. and Shama, O. (2016). Model order reduction using routh approximation and cuckoo search algorithm, *Journal of Automation and Control* **4**(1): 1 – 9.
- Silva, M. J. P., Vidal, J. F., Costa Jr, C. T. and Silva, O. F. (2017). Redução de ordem de sistemas dinâmicos utilizando inteligência computacional uma abordagem via firefly algorithm, *XIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* pp. 1089 – 1094.
- Singh, J., Chatterjee, K. and Vishwakarma, C. B. (2014). MIMO system using eigen algorithm and improved pade approximations, *SOP Trans. on Applied Math.* **1**(1): 60 – 70.
- Vasu, G., Namratha, J. N. and Murari, P. (2012). Order reduction of linear dynamic systems using improved generalise least-squares method and pso, *Int. Journal of Engineering Research and Application* **2**: 581 – 587.
- Vishwakarma, C. B. (2011). Order reduction using modified pole clustering and Pade approximations, *International Journal of Electrical and Computer Engineering* **5**(8).