

REDUÇÃO DE ORDEM DE UM MODELO DE UM VEÍCULO DE CARGA FERROVIÁRIO

ANDRÉ G. A. AMORIM*, JOSÉ L. F. SALLES*, GUILHERME F. M. DOS SANTOS**, FLÁVIO S. V. GOMES***

**Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES*

Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, Vitória – ES, 29075-910

E-MAILS: ANDRE.AMORIM@ALUNO.UFES.BR, JLEANDRO@ELE.UFES.BR

***Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES*

E-MAIL: GUILHERME.F.SANTOS@UFES.BR

****Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE*

E-MAIL: FLAVIO.SVGOMES@UFRPE.BR

Abstract— In railway industries there are many applications for systems modelling and dynamic simulations of models. Especially, in railway transportation department it is important to simulate computationally the dynamics of freight trains models in order to ensure design quality and safe operation conditions for wagons. American Association of Railroads (AAR) manual of standards and recommended practices section C – part II: “Design, Fabrication and Construction of Freight Cars” suggests the realization of safety tests and indicate the approval requirements for new models of freight cars. However, dynamical mathematical models can become very complex and involve several degrees of freedom. The main goal of this work is the simplification of this models through application of model order reduction techniques present in the literature. The techniques studied in this paper are based on the elimination of degrees of freedom by direct truncation and elimination by singular perturbation approximation. These methods use similarity transformations that produce systems realizations in a balanced form and in a modal form in order to prioritize the states that most contribute to the model response. The outputs of the complete and reduced model are compared and, additionally, the complete and reduced models are evaluated in relation to the safety requirements in some tests for field operation.

Keywords— Modelling, Model order reduction, Railway, Wagons.

Resumo— Na indústria ferroviária encontram-se diversas aplicações para modelagem de sistemas e simulação dinâmica de modelos. Em particular, no setor de transporte ferroviário é importante simular computacionalmente modelos dinâmicos de trens de carga para fins de projeto e de operação de vagões. O Manual de padrões e práticas recomendadas da AAR (*American Association of Railroads*) seção C – parte II: *Design, Fabrication, and Construction of Freight Cars* prevê a realização de testes de segurança e os respectivos requisitos de aprovação para operação de novos modelos de veículos de carga. No entanto modelos matemáticos dinâmicos de vagões podem ser bastante complexos e envolver muitos graus de liberdade. O presente trabalho tem como seu objetivo a simplificação desses modelos por meio da aplicação de técnicas de redução de ordem presentes na literatura. As técnicas estudadas neste artigo são baseadas na eliminação de graus de liberdade por meio de truncamento direto e na eliminação via perturbação singular. Estes métodos usam transformações de similaridade para obter realizações do sistema na forma balanceada e na forma modal com o intuito de priorizar os estados que mais contribuem para a resposta do modelo. As saídas dos modelos completos e reduzidos são comparadas e, além disso, os modelos completos e reduzidos são avaliados em relação aos requisitos de segurança em alguns testes para operação de campo.

Palavras-chave— Modelagem, Redução de ordem, Ferrovia, Vagões.

1 Introdução

Na engenharia moderna é fundamental a utilização de modelos. Por definição, um modelo é aquilo que serve de referência ou é dado para ser reproduzido (Ferreira, 2000). A modelagem consiste na representação dos fenômenos físicos observados no processo para uma linguagem que permita melhor interpretação ou entendimento (Ferreira, 2012). Dessa forma, a modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de construir ou implementar modelos matemáticos de sistemas reais (Aguirre, 2000). Portanto, modelos matemáticos são capazes de utilizar a linguagem matemática para extrair ou estimar as características mais relevantes de um processo desejado.

É preciso considerar que a necessidade contínua e pujante de simular o comportamento dinâmico de sistemas físicos complexos com acurácia e eficiência

tem levado a modelos cada vez maiores e complexos (Bai, 2002). Em razão disso, a aproximação de um sistema de ordem elevada por um sistema de ordem inferior é um dos grandes problemas na teoria de Sistemas (Parmar, 2007). O uso de modelos de ordem reduzida torna-se mais fácil de analisar, simular e controlar os sistemas implementados.

A redução de ordem de modelos envolve um equilíbrio entre a ordem do modelo reduzido e o grau ao qual as características da planta são refletidas pelo modelo (Moore, 1981).

Na indústria encontram-se diversas aplicações para modelagem de sistemas mecânicos em sistemas lineares. Em particular, no setor de transporte ferroviário é importante mensurar as interações dinâmicas que ocorrem entre o veículo ferroviário e a via permanente (Santos, 2015) devido à magnitude das cargas envolvidas e em razão das desastrosas consequências em caso de descarrilamento (Spiryagin, et al., 2014) (Garg & Dukkupati, 1984) (Cunha, 2011). Modelos de veículos ferroviários

podem se tornar bastante complexos (Correia, 2013) visto que envolvem uma grande quantidade de graus de liberdade e uma vasta gama de fatores que influenciam no movimento do veículo.

O Manual de padrões e práticas recomendadas da *Association of American Railroads* (AAR) seção C (*Association of American Railroads*, 2007) propõe a realização de testes de segurança e os respectivos requisitos de aprovação para operação de novos modelos de veículos de carga. Portanto, o presente trabalho tem como objetivo a simulação computacional dos testes sugeridos pela norma AAR tanto para um modelo completo quanto para modelos de ordem reduzida, comparando-os à luz dos parâmetros de segurança indicados pelo manual.

Na Seção II é feita uma breve revisão das técnicas de redução de ordem de modelos presentes na literatura, especialmente daquelas aplicadas ao modelo em questão. A Seção III descreve o modelo matemático de um vagão de carga. Na Seção IV apresentam-se os resultados obtidos por meio de simulação computacional do modelo completo comparado aos métodos de redução de ordem definidos e discute-se a eficácia de cada técnica. As considerações finais são apresentadas na Seção V.

2 Redução de Ordem de Modelos

Existem inúmeras técnicas de redução de ordem de modelos lineares presentes na literatura. Originalmente, a redução de ordem de modelos foi desenvolvida na área de teoria de sistemas e controle, a qual estuda propriedades de sistemas dinâmicos (Schilders, 2008). O resultado esperado a partir da aplicação das técnicas é a redução da complexidade dos modelos aliada à preservação da relação entre entradas e saídas tanto quanto possível. (Gawronski, 2004).

Em geral essas técnicas são desenvolvidas de maneira semelhante no tratamento de sistemas no espaço de estados. Num estágio inicial é feita uma transformação linear no sistema para uma determinada base de projeção que evidencie algum parâmetro desejado (Villemagne & Skelton, 1987), tais como autovalores e fatores de controlabilidade e observabilidade, por exemplo. Em seguida é preciso empregar de algum critério de seleção dos graus de liberdade a serem eliminados. E finalmente, adota-se algum método de eliminação de graus de liberdade.

O presente trabalho seleciona quatro combinações de parâmetros que definem quatro técnicas de redução de ordem distintas, as quais são elencadas na Tabela I a seguir (Schilders, 2008) (Villemagne & Skelton, 1987) (Maciel, 2015).

Tabela 1. Técnicas de Redução de Ordem Aplicadas

#	Base de Projeção	Critério de seleção	Método de Eliminação
I	Forma balanceada	Normas Hankel	Truncamento
II	Forma balanceada	Normas Hankel	Perturbação Singular
III	Forma Modal	Controlabilidade e Observabilidade	Truncamento
IV	Forma Modal	Controlabilidade e Observabilidade	Perturbação Singular

2.1 Base de Projeção

É conhecido que na teoria de sistemas lineares existe a possibilidade de realização de um mesmo sistema no espaço de estados em diferentes bases de projeção a partir de transformações de similaridade (Chen, 1995), conforme a equação (1).

$$\bar{A} = Q^{-1}A Q \quad (1)$$

Onde \bar{A} é a matriz de estados na nova base definida por Q , A é a matriz de estado e Q é a matriz de transformação linear responsável pela projeção.

Determinadas realizações dos sistemas evidenciam características particulares que podem auxiliar o processo de redução de ordem (Villemagne & Skelton, 1987).

No caso da realização balanceada a transformação linear a ser executada no sistema deve ser feita de modo que o gramiano de controlabilidade se torne igual ao gramiano de observabilidade (Antoulas & Sorensen, 2001). Essa característica peculiar permite inferir o quanto cada estado é influenciado pela entrada e o quanto esse estado influencia na saída do modelo por meio dos valores singulares Hankel. Portanto esta é boa candidata para operação de técnicas de redução de ordem visto que é desejável diminuir a complexidade do modelo e manter as relações de entrada e saída.

Já a forma modal é capaz de ressaltar os autovalores do sistema na diagonal principal da matriz A no espaço de estados. Desse modo, a matriz de estados na forma modal é bloco diagonal, cujos autovalores ficam dispostos em blocos 2×2 no caso de autovalores complexos ou 1×1 nos autovalores reais. Tais blocos diagonais são ordenados de forma crescente baseados na magnitude dos autovalores. (Mathworks, 2006). Referindo-se a sistemas mecânicos os autovalores representam as frequências naturais do sistema e os autovetores denotam os modos de vibração do sistema (Rao, 2008). Para fins de redução de ordem, entende-se que os autovalores mais dominantes do sistema devem ser preservados, tornando assim essa base de projeção adequada para aplicação de técnicas de redução de ordem.

2.2 Critério de Seleção

Na teoria de controle, autovalores definem a estabilidade de um sistema, enquanto que os valores singulares Hankel definem a “energia” de cada estado no sistema. Mantendo estados de maior energia, preserva-se a maior parte das características em termos de estabilidade, frequência e resposta temporal (Boyd, 1994). Os valores singulares Hankel são definidos na realização balanceada, pois o gramiano de controlabilidade e o gramiano de observabilidade se igualam ambos em forma diagonal, sendo essa diagonal os valores singulares Hankel (Chen, 1995).

Para a forma modal não se pode utilizar propriamente os valores singulares Hankel como critério de seleção, visto que este é inerente à forma balanceada. No entanto, como as normas Hankel de um sistema dinâmico indicam o quanto este sistema é controlável e observável, pode-se estabelecer um critério que selecione os modos de vibrar menos controláveis e observáveis para serem eliminados (Maciel, 2015).

2.3 Método de Eliminação

Nesse trabalho utilizam-se dois critérios de eliminação, a saber: truncamento direto e eliminação por perturbação singular (EPS).

Dado o sistema no espaço de estados, é possível separá-lo em duas partes, sendo que a primeira contém os estados mais relevantes e a segunda parte os estados considerados menos importantes, conforme o sistema de equações (2). No truncamento direto os estados considerados menos relevantes são simplesmente eliminados do modelo (Schilders, 2008).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (2)$$

$$y = [C_1 \quad C_2] x + D u$$

Já o método de eliminação por perturbação singular se dá de uma forma mais complexa. As derivadas dos estados menos relevantes são consideradas nulas, tornando-se um sistema linearmente dependente que pode ser reduzido a um sistema linearmente independente combinando-se os estados. Sendo assim o modelo de ordem reduzido é descrito pelo sistema de equações (3) (Obinata & Anderson, 2001).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \\ B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} + \quad (3)$$

$$y = [C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}] x + [D - C_2 A_{22}^{-1} B_2] u$$

3 Modelo do Veículo de Carga

O modelo da dinâmica de um veículo de carga é genericamente definido por uma combinação de um conjunto de massas, molas e amortecedores, regidos pela segunda lei de Newton apresentada na forma da equação (4) para um grau de liberdade.

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \quad (4)$$

Onde m é a massa do bloco, c é a constante de amortecimento, k é a constante da mola e F é a força resultante aplicada no sistema. O modelo em questão adota a excitação pela base como modo de excitação do sistema, exemplificado para um grau de liberdade na figura 2. Sendo assim, a partir de irregularidades presentes no trilho são modeladas as forças atuantes como entradas do sistema, gerando os movimentos do vagão, conforme a equação (5).

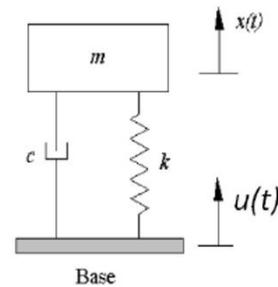


Figura 1 - Sistema massa mola de um grau de liberdade com excitação pela base

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = c \dot{u}(t) + k u(t) \quad (5)$$

Onde $u(t)$ é a trajetória descrita pela base e $\dot{u}(t)$ sua derivada. Para descrever as equações que regem o movimento e a dinâmica do veículo é utilizado o esquema das figuras 3, 4 e 5.

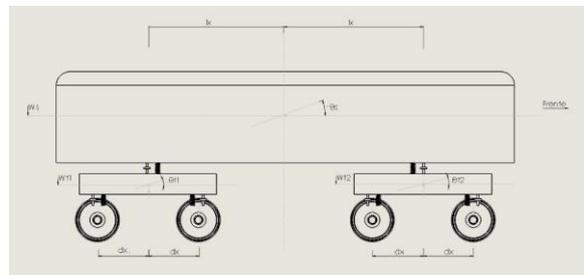


Figura 2 - Vista lateral do vagão

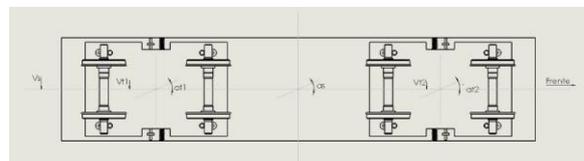


Figura 3 - Vista superior do vagão

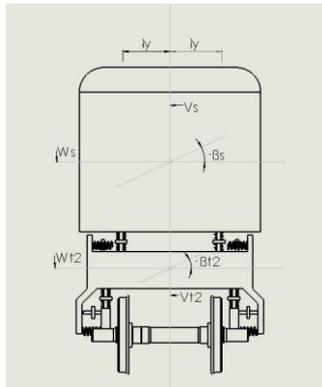


Figura 4 - Vista frontal do vagão

Nota-se que o modelo do vagão é composto por 3 corpos rígidos principais: caixa, truque dianteiro e truque traseiro. Cada um desses corpos conta com 5 graus de liberdade, ou seja, o movimento geral de cada corpo rígido é composto pela superposição dessas 5 variáveis. Portanto, o modelo adotado para o veículo ferroviário simulado conta com 15 graus de liberdade detalhados na Tabela 2 a seguir

Tabela 2. Nomenclatura dos graus de liberdade

Variável	Grau de liberdade
w_s	Deslocamento vertical da caixa
v_s	Deslocamento lateral da caixa
θ_s	Ângulo de <i>pitch</i> da caixa
β_s	Ângulo de <i>roll</i> da caixa
α_s	Ângulo de <i>yaw</i> da caixa
w_{t1}	Deslocamento vertical do truque traseiro
v_{t1}	Deslocamento lateral do truque traseiro
θ_{t1}	Ângulo de <i>pitch</i> do truque traseiro
β_{t1}	Ângulo de <i>roll</i> do truque traseiro
α_{t1}	Ângulo de <i>yaw</i> do truque traseiro
w_{t2}	Deslocamento vertical do truque dianteiro
v_{t2}	Deslocamento lateral do truque dianteiro
θ_{t2}	Ângulo de <i>pitch</i> do truque dianteiro
β_{t2}	Ângulo de <i>roll</i> do truque dianteiro
α_{t2}	Ângulo de <i>yaw</i> do truque dianteiro

Tendo em vista que o sistema possui 15 graus de liberdade, a segunda lei de Newton assume a forma matricial, conforme a equação (6), onde n é o número de graus de liberdade.

$$[M]_{nxn} \{\ddot{x}(t)\}_{nx1} + [C]_{nxn} \{\dot{x}(t)\}_{nx1} + [K]_{nxn} \{x(t)\}_{nx1} = \{F(t)\}_{nx1} \quad (6)$$

Para realização das simulações e implementações das técnicas de redução de ordem o modelo é convertido da forma matricial para o espaço de estados.

Para o modelo do veículo de carga, os valores singulares Hankel são apresentados na figura 6 a seguir.

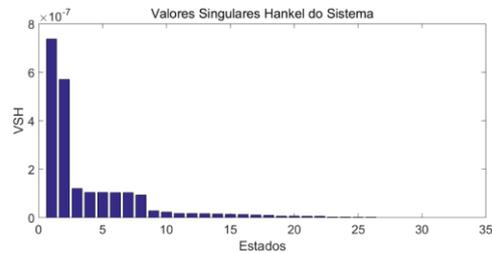


Figura 6 - Valores singulares Hankel do modelo do veículo de carga

Nota-se que os estados mais relevantes se encontram na primeira metade dos estados. Dessa forma, adota-se a eliminação a partir do 16º estado para efeitos de simplificação de modelos.

4 Resultados e Discussão

O vagão mais utilizado no transporte de minério de ferro é do tipo gôndola, com descarga em virador de vagões. Atualmente, existem vagões do tipo gôndola projetados para até 150 toneladas brutas de carga, isto é 37,5 toneladas por eixo, denominados GDU (Santos, 2015). Os dados mecânicos do vagão GDU adotados para as simulações como massas, inércias, rigidezes, amortecimentos e distâncias foram retirados de uma caracterização modal real de um vagão GDU (Urban & Joy, 2011).

A fim de garantir a segurança operacional de veículos de carga, o manual de padrões e práticas recomendadas da AAR seção C (Association of American Railroads, 2007) propõe a realização de simulações que avaliam situações críticas na dinâmica de vagões e estabelece limites para determinados parâmetros. Tais limites de segurança são fundamentais para operação de veículos de carga nas ferrovias a fim de evitar ocorrências ferroviárias ou até mesmo descarrilamentos. A norma define diferentes padrões de irregularidades nos trilhos para que os vagões sejam testados. Cada perfil configura um teste diferente e avalia o desempenho específico dos principais modos de vibração do sistema. O presente trabalho avalia os modelos completo e reduzidos do vagão para o teste de *pitch* e *bounce*.

Para o teste de *pitch* e *bounce* avalia-se especialmente o mínimo percentual de carga vertical e a máxima capacidade dinâmica da suspensão principal. O percentual de carga vertical é dado pela razão da força exercida no trilho por uma roda sobre a força estática em cada roda, que é o peso total do vagão dividido pelas 8 rodas. O valor mínimo definido

como limite pela norma é de 10% da carga estática. Já a capacidade dinâmica da suspensão principal é definida pela divisão da medida do deslocamento de uma mola que liga a caixa ao truque em relação ao comprimento nominal da mola. Seu limite é de 95% da capacidade total da mola.

O teste de *pitch* e *bounce* da norma define um modelo de irregularidade do trilho com determinado comprimento de onda e determinada amplitude iguais para ambos os trilhos, direito e esquerdo, de acordo com a figura 7 (Association of American Railroads, 2007). Após o ciclo de irregularidades a pista retoma a forma idealmente plana.

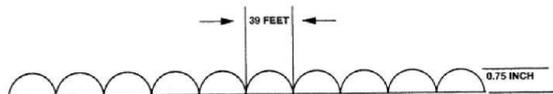


Figura 7 - Perfil de irregularidade dos trilhos

Tendo em vista a comparação entre os modelos completo e reduzidos, arbitrou-se simular a passagem do vagão a uma velocidade tangencial constante de 40 km/h sobre o perfil mencionado acima. Portanto, seguem na figuras 8, 9, 10, 11 e 12 as respostas de cada modelo, isto é, o movimento de cada grau de liberdade para o sistema completo e os modelos reduzidos. Unidades em metros, para as variáveis lineares, e em radianos, para as variáveis angulares.

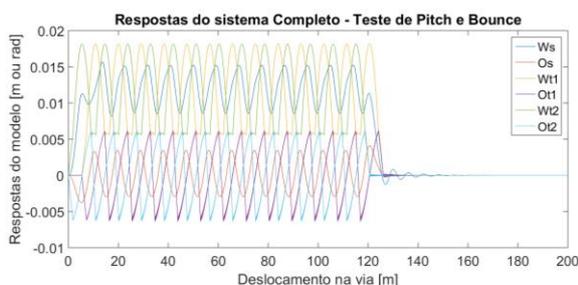


Figura 8 - Respostas do sistema completo

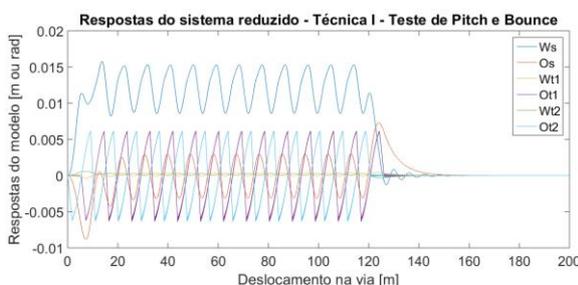


Figura 9 - Respostas do modelo reduzido pela técnica I

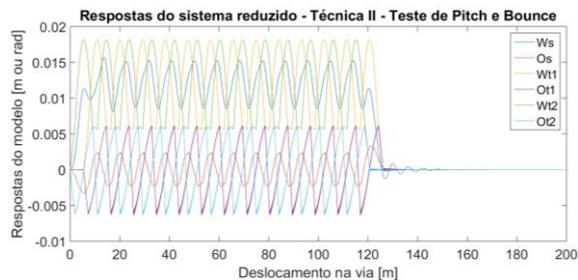


Figura 10 - Respostas do modelo reduzido pela técnica II

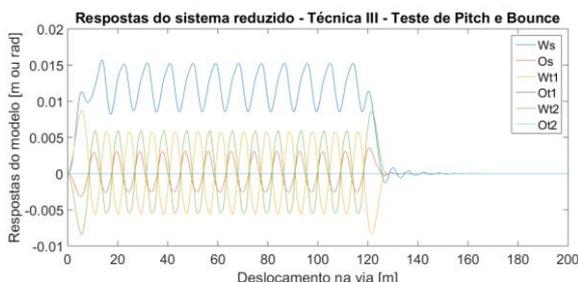


Figura 5 - Respostas do modelo reduzido pela técnica III

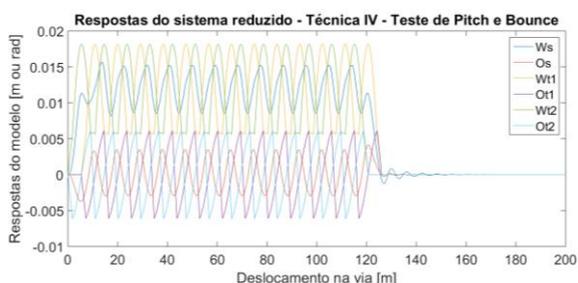


Figura 12 - Respostas do modelo reduzido pela técnica IV

Nota-se que mesmo simplificando os modelos com metade da complexidade do modelo completo ainda obtém-se boas respostas em algumas técnicas de redução de ordem. Como era esperado, as técnicas que eliminam por truncamento tem maiores dificuldades para representar o modelo completo enquanto as técnicas que eliminam por perturbação singular captam melhor o comportamento transiente do sistema, uma vez que a eliminação de estados por perturbação singular, por definição, leva em conta aspectos da parte rápida do sistema, enquanto o truncamento despreza completamente essa parcela (Maciel, 2015). Ainda assim as técnicas I e III conseguem reproduzir satisfatoriamente o comportamento de alguns graus de liberdade, especialmente aqueles cujas frequências naturais são mais baixas.

Para mensurar a assertividade das técnicas de redução de ordem aplicadas de maneira quantitativa exibe-se a seguir na figura 13 o resultado do somatório do erro quadrático entre os graus de liberdade do modelo completo e os graus de liberdade de cada modelo reduzido, conforme a equação (7).

$$e = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{(y_i - y_{red_i})^2} \quad (7)$$

Na equação (7), e é o erro, y_i são as saídas dos i -ésimos graus de liberdade do modelo completo e y_{red_i} são as saídas dos i -ésimos graus de liberdade dos modelos de ordem reduzida.



Figura 13 - Somatório do erro quadrático entre modelo completo e reduzidos

A norma também estabelece que a avaliação dos critérios deve ser realizada para diferentes velocidades tangenciais do veículo (Association of American Railroads, 2007). Portanto, são feitas diversas simulações a velocidade constante para capturar os valores críticos para cada critério. Assim, obtém-se os gráficos apresentados nas figuras 14 e 15 a seguir.

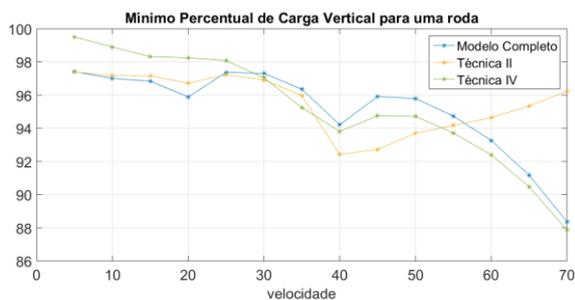


Figura 14 - Mínimo Percentual de Carga Vertical para uma roda

Simulando para diversas velocidades, é perceptível que as técnicas que produzem melhor resultado para o mínimo percentual de carga vertical são as técnicas II e IV. Em relação ao modelo completo, a técnica II tem melhores resultados para menores velocidades e a técnica IV apresenta resultados mais precisos em velocidades mais altas.

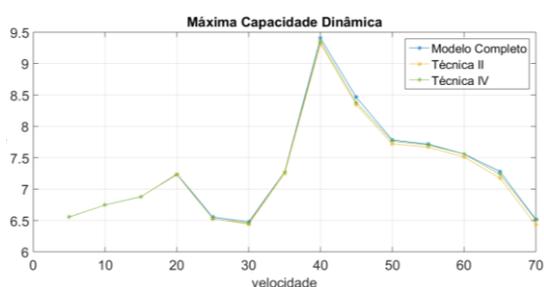


Figura 15 - Máxima capacidade dinâmica de uma mola da suspensão primária

Já para a máxima capacidade dinâmica, novamente as técnicas II e IV apresentam melhores resultados, sendo que ambas tem melhor performance em baixas velocidades. As técnicas I e III não conseguem reproduzir o comportamento do modelo para ambos critérios da norma AAR com fidelidade com o nível de simplificação adotado nas técnicas de redução de ordem, visto que as principais variáveis para o cálculo dos critérios são altamente afetadas durante o processo de redução de ordem. Portanto, nem foram incluídas nos resultados gráficos apresentados.

5 Conclusão

Tomando por base o que foi apresentado, pode-se afirmar que é possível fazer uma análise de segurança operacional para o teste de *pitch* e *bounce* da norma AAR com um modelo simplificado, sendo este reduzido à metade de sua complexidade original. Notavelmente, os melhores resultados são obtidos pelas técnicas que se utilizam da eliminação por perturbação singular. Porém, esta requer maior quantidade de cálculos matriciais do que o método de truncamento. Assim, um modelo simplificado com menos estados truncados pode ser tão simples computacionalmente quanto um modelo simplificado com mais estados eliminados por perturbação singular em determinadas condições.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro concedido.

Referências Bibliográficas

- Aguirre, L. A., 2000. Introdução à Identificação de Sistemas. Belo Horizonte: UFMG.
- Antoulas, A. C. & Sorensen, D. C., 2001. A survey of model reduction methods for large-scale systems. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, pp. 1103 - 1104.
- Association of American Railroads, 2007. Manual of Standards and Recommended Practices - Section C - Part II - Design, Fabrication, and Construction of Freight Cars, Washington : The Association of American Railroads.
- Bai, Z., 2002. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. Applied Numerical Mathematics, pp. 9-44.
- Boyd, S., 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Chen, C.-T., 1995. Linear System Theory and Design. 3rd ed. s.l.:Oxford University Press.
- Correia, N. F. O., 2013. Vibrações Induzidas por Tráfego na Via e na Envoltiva de Linhas Ferroviárias: Modelação Numérica 3D e

- Validação Experimental, s.l.: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Cunha, P. G., 2011. Análise Dinâmica de Pontes Ferroviárias: Uma Metodologia Simplificada, São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .
- Ferreira, A. B. d. H., 2000. Mini-Aurélio - O Minidicionário da Língua Portuguesa. 4a ed. s.l.:Nova Fronteira.
- Ferreira, A. d. O., 2012. Redução de Ordem de Modelos Matemáticos Lineares Usando Algoritmos Genéticos, Belém: Universidade Federal do Pará .
- Garg, V. K. & Dukkipati, R. V., 1984. Dynamics of Railway Vehicle Systems. Toronto: Academic Press.
- Gawronski, W. K., 2004. Dynamics and control of structures: a modal approach. s.l.:Springer Science & Business Media.
- Maciel, G. P. R., 2015. Métodos para Redução de Graus de Liberdade em Sistemas Dinâmicos Lineares, São Paulo : Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .
- Mathworks, 2006. Modal form realization and projection, s.l.: Mathworks.
- Moore, B. C., 1981. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. IEEE Transactions on Automatic Control, February, p. 26.
- Obinata, G. & Anderson, B., 2001. Model Reduction for Control Design. s.l.:Springer.
- Parmar, G., 2007. Order Reduction of Linear Dynamic Systems using Stability Equation Method and GA. International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering, pp. 1-7.
- Rao, S., 2008. Vibrações Mecânicas. 4th ed. s.l.:Pearson Prentice Hall.
- Santos, G. F. M. d., 2015. Análise de Segurança de um Veículo Ferroviário de Carga em Tangente Considerando a Excitação Periódica da Via Permanente, São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .
- Schilders, W., 2008. Model Order Reduction - Theory, Research and Applications. s.l.:Springer .
- Spiryagin, M., Cole, C. & Sun, Y. Q., 2014. Design and Simularion of Rail Vehicles. New York: CRC PReSS.
- Urban, C. & Joy, R., 2011. GDU Wagon Characterization Test, s.l.: Transportation Technology Center Inc.
- Villemagne, C. d. & Skelton, R. E., 1987. Model Reductions Using a Projection Formulation. IEEE, pp. 1-6.