Controle sem Modelo com Estimador Algébrico Ultra-local Aplicado a um Pêndulo Invertido Rotacional

Bruno A. Angélico * **Mateus M. Brugnolli** ** **Gabriel P. das Neves** ***

* *Depto. de Eng. de Telecom. e Controle, Escola Politécnica da USP (e-mail: angelico@usp.br).*
** *Depto. de Eng. de Telecom. e Controle, Escola Politécnica da USP (e-mail: mateus_mmb@usp.br)*
*** *Insper São Paulo e Escola Politécnica da USP (e-mail: gabriel.pereira.neves@alumni.usp.br)*

Abstract: This paper explores the application of a model-free control technique to a rotational inverted pendulum. The control law incorporates an algebraic estimator for estimating the system dynamics within a short time window (ultra-local) and includes a term to enforce the desired closed-loop dynamics. Due to the underactuation of the system, a modification to the control law was implemented to stabilize the arm's position, since the original control law is of the input-output type. Experimental results demonstrate the successful application of this technique to unstable systems, such as the inverted pendulum.

Resumo: Este artigo explora a aplicação de uma técnica de controle sem modelo em um pêndulo invertido rotacional. A lei de controle incorpora um estimador algébrico para estimar a dinâmica do sistema dentro de uma janela de tempo curta (ultra-local) e inclui um termo para impor a dinâmica desejada em malha fechada. Devido à subatuação do sistema, uma modificação na lei de controle foi implementada para estabilizar a posição do braço, uma vez que a lei de controle original é do tipo entrada-saída. Resultados experimentais demonstram a aplicação bem-sucedida dessa técnica a sistemas instáveis, como o pêndulo invertido.

Keywords: Practical application, model-free control, algebraic estimators, ultra-local model, rotary inverted pendulum.

Palavras-chaves: Aplicação prática, controle sem modelo, estimadores algébricos, modelo ultra-local, pêndulo invertido rotacional.

1. INTRODUÇÃO

Técnicas de controle não baseadas em modelos têm ganhado destaque, principalmente em virtude dos avanços recentes nas técnicas de aprendizado de máquina (ML, do inglês *Machine Learning*) (Brunton e Kutz, 2019; Dean et al., 2020). A abordagem via ML é promissora, principalmente quando o sistema a ser controlado é uma rede complexa, na qual a modelagem e, consequentemente, o controle baseado em modelo, não são viáveis. O maior desafio dessa técnica é a fase de aprendizado, que é basicamente uma identificação de sistema em tempo real orientada por dados, o que pode demandar muito tempo para aprender o processo.

Dentre as técnicas de controle sem modelo mais utilizadas incluem: o *Iterative Learning Control* (ILC), proposto inicialmente em Arimoto et al. (1984), é usado nos casos em que há uma tarefa repetitiva, e o algoritmo aprende a otimizar essas técnicas (Jeong e Choi, 2002; Ahn et al., 2007; Longman, 2000; Bristow et al., 2006; Leissner et al., 2019); o *Model Free Adaptive Control* (MFAC), que é uma abordagem de controle sem modelo para sistemas de tempo discreto (Hou e Jin, 2014) e consiste em estabelecer um modelo de linearização dinâmica em vários pontos de operação, considerando apenas dados de entrada e saída (Bu et al., 2018; Li et al., 2019; Hou e Jin, 2011; Hou e Xiong, 2019); e o *Extremum Seekin Control*, que consiste em explorar o domínio de uma função convexa por meio de um sinal de perturbação, utilizando processamento de sinais relativamente simples (Krstić e Wang, 2000).

O esquema considerado neste trabalho difere significativamente dos anteriormente mencionados e é também bastante simples. Ele se baseia na estimativa algébrica dos parâmetros de uma dinâmica ultra-local, ou seja, em uma janela de tempo curta. Para sistemas de ordens relativamente baixas, essa técnica é muito conveniente, inclusive para sistemas com dinâmicas rápidas, nos quais o processo de aprendizado por ML não é aplicável. Além disso, o algoritmo pode ser facilmente implementado em hardwares digitais de baixo custo, devido à sua baixa complexidade computacional. Basicamente, ele requer apenas a integral numérica de duas funções dentro de uma janela de tempo com N amostras.

As primeiras ideias de estimadores algébricos foram apresentadas em Fliess e Sira-Ramírez (2003), onde foram utilizados para fornecer uma identificação rápida e precisa de parâmetros de sistemas lineares. Para enfrentar possíveis

problemas de inversão de matrizes mal condicionadas que poderiam levar a uma estimação simultânea imprecisa, em Zehetner et al. (2007) foi proposto o projeto de estimadores individuais. Uma referência mais recente e completa sobre estimadores algébricos pode ser encontrada em Mboup et al. (2009), que fornece detalhes sobre a estimativa da duração da janela deslizante.

O controle *model-free* via modelo ultra-local e estimação algébrica foi primeiramente introduzido em Fliess e Join (2008, 2009). Essa abordagem foi concebida como uma espécie de simplificação da linearização de realimentação entrada-saída, na qual o modelo não-linear completo não é necessário, mas apenas uma representação simples da dinâmica do sistema durante uma janela de tempo curta (ultra-local). Após o cancelamento dessa dinâmica simplificada, impõe-se a dinâmica desejada ao sistema em malha fechada. Uma revisão completa dessa técnica, que inclui exemplos de aplicação, está disponível em Fliess e Join (2013).

Existem poucos trabalhos na literatura que tratam desse tipo de controlador em aplicações práticas. Por exemplo, em Chand et al. (2016), é apresentada uma aplicação em robótica, e em Moraes e da Silva (2015), o esquema é aplicado à levitação magnética. Em Wang e Wang (2020), o esquema é combinado com um controlador preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Controller*) e aplicado ao rastreamento de trajetória de um veículo. Em Polack et al. (2019), tem-se uma aplicação automotiva interessante em frenagem eletrônica e controle de velocidade. Existem alguns outros trabalhos considerando controladores com modelo ultra-local, mas não baseados em estimadores algébricos, como em Rodriguez-Fortun et al. (2013); Chekakta et al. (2019). Mais recentemente, das Neves e Angélico (2022), aplica a técnica em dois sistemas mecatrônicos, Zhang et al. (2022) considera o esquema no controle de conversores Boost CA/CC , Carvalho et al. (2024) utiliza para controlar a pressão em um motor de injeção direta, e Scherer et al. (2024) controla um sistema placa-e-bola com atuação eletromagnética.

Neste artigo, essa técnica de controle sem modelo é aplicada a um pêndulo invertido rotacional construído para ser utilizado no curso PTC3471 - Práticas de Projeto de Sistemas de Controle, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Este experimento foi recentemente incorporado como uma atividade complementar do curso. Uma modificação na lei de controle entrada-saída foi efetuada para adicionar a realimentação dos estados do braço do pêndulo. Assim, além de equilibrar a haste do pêndulo, o braço segue uma trajetória preestabelecida. Resultados são apresentados para comprovar a validade da técnica.

2. O PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

O pêndulo invertido rotacional, ou pêndulo de Furuta, proposto em 1992 por Katsuhisa Furuta e pesquisadores associados a ele no *Tokyo Institute of Technology*, consiste em um braço atuado que rotaciona no plano horizontal com um pêndulo acoplado em uma de suas extremidades (Furuta et al., 1992).

Neste artigo utilizou-se um dos pêndulos de Furuta construídos para uso na disciplina PTC3471 - Práticas de Projeto de Sistemas de Controle, que está apresentado na Figura 1. Ele é equipado com uma placa de processamento Teensy 3.2 que contém um microcontrolador ARM Cortex M4. O atuador é um motor de corrente contínua (CC) de 12V com uma caixa de redução de 18,75:1. Há um *encoder* incremental com resolução efetiva de 300 pulsos por revolução (ppr) por canal acoplado ao eixo do motor, e outro com resolução efetiva de 600 ppr por canal acoplado à haste do pêndulo. Utilizando o X4 *encoding*, a resolução de tais *encoders* é multiplicada por 4. O motor CC é alimentado por uma fonte de 12V e uma ponte-H, modelo VNH5019.

A estrutura do equipamento é feita em MDF. O braço do pêndulo é confeccionado com trilho DIN de alumínio e a haste do pêndulo com uma barra cilíndrica de alumínio com diâmetro de 6 mm.

Figura 1. Pêndulo de Furuta considerado no experimento. Dez unidades idênticas foram construídas para utilização no curso PTC3471.

Considere o diagrama esquemático da Figura 2. As variáveis do braço e o do pêndulo são referenciadas com índices 0 e 1, respectivamente. Os parâmetros do sistema são descritos na Tabela 1. A variável τ representa o torque do motor CC, que é positivo no sentido anti-horário.

Tabela 1. Parâmetros do pêndulo

	Parâmetro	Valor
m_0	Massa do braço [kg]	0,100
m_1	Massa do pêndulo [kg]	0,03
ℓ_0	Comprimento do braço [m]	0,15
ℓ_1	Comprimento do pêndulo [m]	0,25
r	Distância eixo-base até pêndulo [m]	0,14
d	Dist. eixo-base até o c.m.* do braço [m]	0,09
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]	9,81
K_t	Constante de torque do motor [Nm/A]	0,118
K_e	Constante de velocidade do motor [V/(rad/s)]	0,118
R_m	Resistência de armadura do motor [Ω]	3,6

* centro de massa

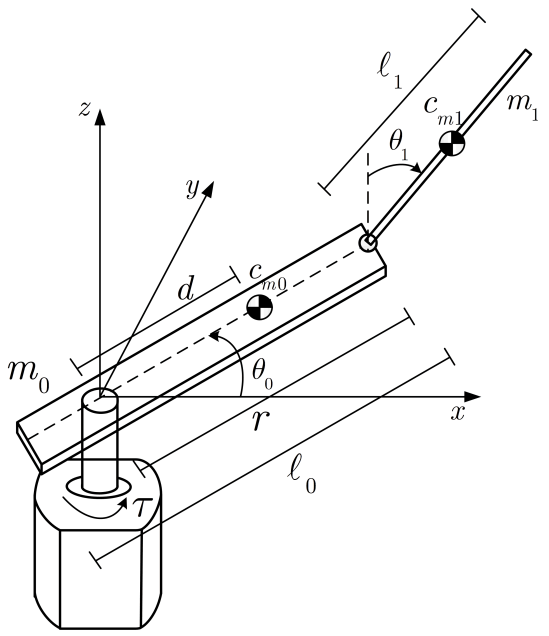

Figura 2. Diagrama do pêndulo de Furuta.
Fonte: Adaptado de Angélico et al. (2019).

3. CONTROLE *MODEL-FREE* COM MODELO ULTRA-LOCAL E ESTIMADOR ALGÉBRICO

Esta abordagem de controle sem modelo é baseada em uma aproximação ultra-local (Fliess e Join, 2008). Considere que, em uma curta janela de tempo, um sistema dinâmico possa ser representado por

$$y^{(\nu)} = \phi + \alpha\, u, \tag{1}$$

sendo que $y^{(\nu)}$ representa a ν-ésima derivada temporal de y e u o sinal de entrada. Tal modelo é denominado de dinâmica ultra-local.

Neste modelo, ϕ representa a parte não conhecida da planta (a ser estimada), incluindo perturbações. O valor de α, também desconhecido *a priori*, deve ser escolhido tal que $\alpha\, u$ seja da mesma ordem de grandeza de $y^{(\nu)}$.

Assumindo então que se tenha uma escolha inicial (não necessariamente precisa) de α, dada por $\hat{\alpha}$, um estimador algébrico é considerado para se obter $\hat{\phi}$, que é uma estimativa do parâmetro ϕ. A vantagem desse estimador é que ele é relativamente rápido, o que é desejável em aplicações de controle.

Com $\hat{\alpha}$ e $\hat{\phi}$, a dinâmica ultra-local pode ser cancelada, e a dinâmica desejada pode ser imposta, conforme a lei (2). As variáveis com subscrito $_d$ se referem às variáveis desejadas.

$$u = \frac{-\hat{\phi} + y_d^{(\nu)} - (\text{dinâmica desejada para } e)}{\hat{\alpha}}, \tag{2}$$

em que y_d é a entrada de referência (*set-point*), tal que $e = y - y_d$.

Considerando, por exemplo, uma dinâmica ultra-local de primeira ordem, dada por

$$\dot{y} = \phi + \alpha\, u, \tag{3}$$

e um controlador tipo proporcional, verifica-se que

$$u = \frac{-\hat{\phi} + \dot{y}_d - K_P e}{\hat{\alpha}}, \tag{4}$$

com K_P sendo o ganho proporcional.

Por outro lado, com dinâmica ultra-local de segunda ordem, dada por

$$\ddot{y} = \phi + \alpha\, u, \tag{5}$$

pode-se ter, por exemplo, um controlador proporcional-derivativo (PD), tal que

$$u = \frac{-\hat{\phi} + \ddot{y}_d - K_P e - K_D \dot{e}}{\hat{\alpha}}, \tag{6}$$

ou mesmo um proporcional-integral-derivativo (PID), como

$$u = \frac{-\hat{\phi} + \ddot{y}_d - K_P e - K_I \int e - K_D \dot{e}}{\hat{\alpha}}, \tag{7}$$

sendo K_D e K_I as constantes das parcelas derivativa e integrativa. A Figura 3 apresenta o diagrama de blocos com um controlador do tipo PID.

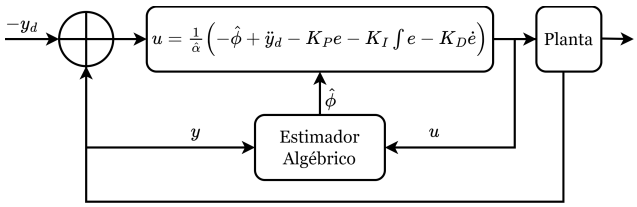

Figura 3. Diagrama de blocos do controle MFC-AE-UL
Fonte: adaptado de das Neves e Angélico (2022)

3.1 Estimador algébrico para modelo de primeira ordem

Em seguida, detalha-se o procedimento para obtenção do parâmetro $\hat{\phi}$ para o caso de um modelo ultra-local de primeira ordem. Ao aplicar a transformada de Laplace na Equação (3), verifica-se que:

$$sY(s) - y(0) = \frac{\phi}{s} + \alpha U(s). \tag{8}$$

A condição inicial $y(0)$ pode ser cancelada ao aplicar (d/ds) na equação anterior, ou seja,

$$Y(s) + s\frac{d}{ds}Y(s) = -s^{-2}\phi + \alpha\frac{d}{ds}U(s). \tag{9}$$

Para que apareça um termo integral em todos os termos, amenizando os ruídos de medidas, multiplica-se o resultado por $1/s^2$. Assim:

$$\frac{1}{s^2}Y(s) + \frac{1}{s}\frac{d}{ds}Y(s) = -\phi\frac{1}{s^4} + \alpha\frac{1}{s^2}\frac{d}{ds}U(s). \tag{10}$$

Considere as seguintes relações:

$$\frac{c}{s^\alpha},\ \alpha \geq 1,\ c \in \mathbb{C} \leftrightarrow c\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{s^\alpha}\frac{d^n}{ds^n}Y(s) \leftrightarrow \frac{(-1)^n}{(\alpha-1)!}\int_0^\infty (t-\lambda)^{\alpha-1}\lambda^n y(\lambda)\,d\lambda. \quad (12)$$

Ao aplicá-las em (10) e resolver para ϕ, verifica-se que:

$$\phi = -\frac{6}{t^3}\int_0^t (t-2\lambda)y(\lambda)\,d\lambda - \frac{6\alpha}{t^3}\int_0^t (t\lambda-\lambda^2)u(\lambda)\,d\lambda. \quad (13)$$

Com o valor de $\hat{\alpha}$, a medida de y e o sinal u, chega-se ao valor estimado $\hat{\phi}$ em uma janela de integração T, i.e.:

$$\hat{\phi} = -\frac{6}{T^3}\int_0^T (T-2\lambda)y(\lambda)\,d\lambda - \frac{6\hat{\alpha}}{T^3}\int_0^T (T\lambda-\lambda^2)u(\lambda)\,d\lambda. \quad (14)$$

Contudo, para a implementação em hardware digital, deve-se ter uma aproximação discreta para as integrais em (13). Ao considerar a regra trapezoidal na janela $T = NT_s$, sendo T_s o período de amostragem e $a = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = b$, tem-se que:

$$\int_a^b f_{mf}(t)dt \approx \frac{T_s}{2}(f_{mf}(t_0) + 2f_{mf}(t_1) + 2f_{mf}(t_2) + \dots + 2f_{mf}(t_{N-1}) + f_{mf}(t_N)). \quad (15)$$

A Equação (14) pode ser aproximada como

$$\hat{\phi} \approx \frac{6}{T^3}\sum_{k=0}^{N} a_k\left\{T-2kT_s\right\}y[k] - \frac{6\hat{\alpha}}{T^3}\sum_{k=0}^{N} a_k\left\{(T\,kT_s-(kT_s)^2)\right\}u[k], \quad (16)$$

em que

$$a_k = \begin{cases} T_s/2, & k=0 \text{ e } k=N \\ T_s, & k=0,\,\dots,\,N-1 \end{cases}.$$

A Equação (16) pode ser facilmente implementada em hardware digital. O valor de $\hat{\phi}$ é atualizado a cada N amostras, ou seja, $T = NT_s$ segundos. Quanto menor a janela de estimação, mais rápida é a adaptação do modelo ultra-local, mas menor é a imunidade a ruídos de medida. As condições iniciais são redefinidas no início de uma nova janela de duração T.

3.2 Estimador algébrico para modelo de segunda ordem

Considere que um sistema possa ser aproximado ultra localmente conforme a Equação (5). No domínio de Laplace, ela pode ser reescrita como

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = \frac{\phi}{s} + \alpha U(s). \quad (17)$$

Após derivar em relação à variável s, o termo $\dot{y}(0)$ é eliminado, o que resulta em

$$2sY(s) + s^2\frac{d}{ds}Y(s) - y(0) = -\frac{1}{s^2}\phi + \alpha\frac{d}{ds}U(s). \quad (18)$$

Ao derivar mais uma vez em relação a s, elimina-se também o termo $y(0)$ e chega-se em

$$2Y(s) + 4s\frac{d}{ds}Y(s) + s^2\frac{d^2}{ds^2}Y(s) = \frac{2\phi}{s^3} + \alpha\frac{d^2}{ds^2}U(s). \quad (19)$$

Para que apareçam apenas termos integrais, multiplica-se a Equação (19) por $1/s^3$, tal que

$$\frac{2Y(s)}{s^3} + \frac{4}{s^2}\frac{d}{ds}Y(s) + \frac{1}{s}\frac{d^2}{ds^2}Y(s) = \frac{2\phi}{s^6} + \frac{\alpha}{s^3}\frac{d^2}{ds^2}U(s). \quad (20)$$

Novamente, ao considerar as relações (11) e (12), o valor de ϕ pode ser calculado como:

$$\phi = \frac{60}{t^5}\int_0^t (t^2-6t\lambda+6\lambda^2)y(\lambda)d\lambda - \frac{30\alpha}{t^5}\int_0^t (t-\lambda)^2\lambda^2 u(\lambda)d\lambda. \quad (21)$$

Note que a Equação (21) pode ser aproximadamente calculada considerando uma janela de duração T, tal que

$$\hat{\phi} = \frac{60}{T^5}\int_0^T (T^2-6T\lambda+6\lambda^2)y(\lambda)d\lambda - \frac{30\hat{\alpha}}{T^5}\int_0^T (T-\lambda)^2\lambda^2 u(\lambda)d\lambda. \quad (22)$$

Ao considerar aqui também a aproximação trapezoidal, verifica-se que

$$\hat{\phi} = \frac{60}{T^5}\sum_{k=0}^{N} a_k\left\{T^2-6TkT_s+6(kT_s)^2\right\}y[k] - \frac{30\hat{\alpha}}{T^5}\sum_{k=0}^{N} a_k\left\{(T-kT_s)^2(kT_s)^2\right\}u[k], \quad (23)$$

$$a_k = \begin{cases} T_s/2, & k=0 \text{ e } k=N \\ T_s, & k=0,\,\dots,\,N-1 \end{cases}.$$

4. APLICAÇÃO NO PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL

Para o pêndulo de Furuta, devido à subatuação, a lei de controle foi adaptada para incluir uma realimentação dos estados do braço do pêndulo, além dos estados da haste, tal como

$$u = \frac{-\hat{\phi} - K_{P1}\theta_1 - K_{D1}\dot{\theta}_1 + K_{P2}(\theta_0-\theta_{0\text{ref}}) + K_{D2}\dot{\theta}_0}{\hat{\alpha}}. \quad (24)$$

Isso foi realizado com o objetivo não apenas de estabilizar o ângulo da haste, mas também de manter o braço próximo de sua posição inicial. Adicionalmente, considerou-se uma ação integral no erro de posição do braço para fazer ele seguir uma trajetória tipo degrau filtrada, com erro nulo em regime permanente. A seguinte lei de controle foi considerada:

$$u = \frac{1}{\hat{\alpha}}\Big(-\hat{\phi} - K_{P1}\theta_1 - K_{D1}\dot{\theta}_1 + K_{P2}(\theta_0-\theta_{0\text{ref}}) + K_{D2}\dot{\theta}_0 + K_{I2}\int_0^T (\theta_0-\theta_{0\text{ref}})\,dt\Big). \quad (25)$$

```
Tau = n*Ts;
if (n==0 || n==N){ //n==0 executa só na 1a. entrada
   I_1=I_1+(T*T)*th1_f;
   //I_2=I_2+0.0;
  }
else{
  I_1=I_1+2.0*(T*T-6.0*T*Tau+6.0*Tau*Tau)*th1_f;
  I_2=I_2+2.0*(T-Tau)*(T-Tau)*Tau*Tau*u;
  }
 if (n==N){
   I_1=I_1*Ts/2.0;
   I_2=I_2*Ts/2.0;
   Phi=60.0/(T*T*T*T*T)*I_1-30.0/(T*T*T*T*T)*Alpha*I_2;
   n=0; I_1=(T*T)*th1_f; I_2 = 0.0;
  }
u=(-Phi-Kp1*th1_f-Kd1*dth1_f+Kp2*(th0_f-ref_f)+...
   Kd2*dth0_f +Ki2*v)/Alpha;
v=v+(th0_f-ref_f); //integrador discreto
n=n+1;
```

Quadro 1: Fragmento do código embarcado que sintetiza a lei de controle.

Para amenizar o efeito de descontinuidades na trajetória, considerou-se um filtro passa-baixas com constante de tempo igual a 0,5 s. A lei de controle foi embarcada no microcontrolador considerando os parâmetros apresentados na Tabela 2 e a linguagem C++ do Arm Keil Studio [1]. O trecho do algoritmo embarcado referente ao estimador algébrico é simples, como apresentado no Quadro 1.

Os parâmetros K_{Pi} e K_{Di}, com $i \in [1; 2]$, são apresentados na Tabela 2. Inicialmente, sem a realimentação dos estados do braço, K_{P1} e K_{D1} foram escolhidos para que, no plano-s, os polos de malha fechada relativos à dinâmica do pêndulo ficassem alocados em $[-30; -5]$, ou seja, $K_{P1} = 150$ e $K_{D1} = 35$. Com a adição dos estados do braço na lei de controle, os valores foram levemente ajustados para se obter um melhor desempenho. O valor de α foi selecionado de forma arbitrária, de forma que sua magnitude fosse aproximadamente compatível com o valor real da planta. [2].

Tabela 2. Parâmetros do controlador.

Parâmetro	Valor
T_s	2 ms
N	50 amostras
$T = NT_s$	100 ms
α	180
K_{P1}	150
K_{D1}	40
K_{P2}	20
K_{D2}	10
K_{I2}	0,01

O resultado obtido é apresentado na Figura 4. Observe que o ângulo do pêndulo apresenta oscilação máxima de $\sim 3°$ em regime estacionário (0,05 rad) e que o braço segue a referência de forma satisfatória. Mesmo para amplitudes elevadas de referência, o sobressinal máximo foi $\sim 23\%$ e o tempo de assentamento $\sim 4,5$ segundos, para degrau positivo de 90°, e $\sim 9,0$ segundos, para degrau negativo de 180° no ângulo do braço.

[1] https://studio.keil.arm.com/

[2] Se um modelo linear do sistema estiver disponível, a escolha de α pode ser guiada pelo valor da matriz de entrada da representação em espaço de estados

Importante notar que durante todo o experimento, o ângulo do pêndulo θ_1 manteve-se próximo da origem, garantindo a estabilidade do sistema.

O sinal de controle é apresentado na Figura 5. Há um ruído no processo decorrente dos *encoders* e das não linearidades do protótipo mecânico, tais como folga de engrenagem e zona-morta devida ao atrito seco.

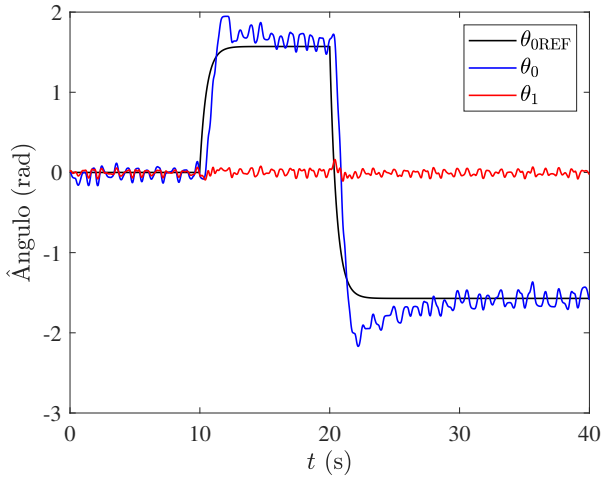

Figura 4. Ângulo do braço e ângulo do pêndulo.

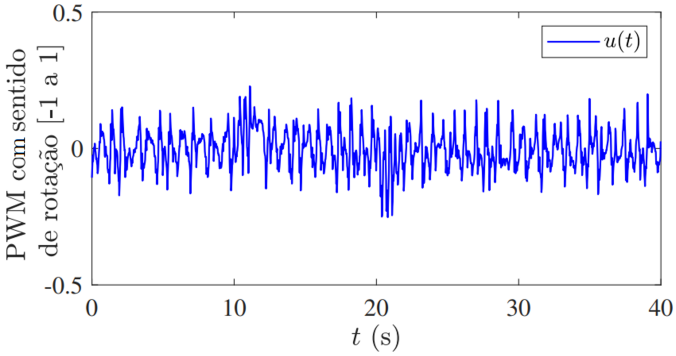

Figura 5. Esforço de controle $[-1, 1]$.

5. CONCLUSÃO

O artigo aborda uma técnica simples de controle aplicada a um pêndulo de Furuta. Essa técnica não requer treinamento prévio e pode ser aplicada a sistemas instáveis com dinâmica relativamente rápida, como um pêndulo invertido. No entanto, como desvantagem, é necessário escolher um valor inicial para o parâmetro α, embora o sistema seja tolerante a erros nessa escolha. Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se explorar a possibilidade de estimar o valor de α utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados recursivos, em conjunto com o estimador algébrico de ϕ, bem como utilizar outras aproximações para a integral discreta.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Fundo Patrimonial Amigos da Poli pelos recursos financeiros concedidos ao projeto "Modernização e Virtualização dos Laboratórios de Controle", Edital 2022.1, e à CAPES, Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

Ahn, H.S., Chen, Y., e Moore, K.L. (2007). Iterative learning control: Brief survey and categorization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 37(6), 1099–1121.

Angélico, B.A., Brugnolli, M.M., e das Neves, G.P. (2019). Digital h∞ robust control of mechanical system with implicit observer. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 1171–1176. doi:10.1109/CDC40024.2019.9029321.

Arimoto, S., Kawamura, S., e Miyazaki, F. (1984). Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1(2), 123–140. doi:10.1002/rob.4620010203.

Bristow, D., Tharayil, M., e Alleyne, A. (2006). A survey of iterative learning control. *IEEE Control Systems Magazine*, 26(3), 96–114.

Brunton, S. e Kutz, J. (2019). *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1 edition. doi:10.1017/9781108380690.

Bu, X., Qiao, Y., Hou, Z., e Yang, J. (2018). Model free adaptive control for a class of nonlinear systems using quantized information. *Asian Journal of Control*, 20(2), 962–968. doi:10.1002/asjc.1610.

Carvalho, A.D., Pereira, B.S., Angélico, B.A., Laganá, A.A.M., e Justo, J.F. (2024). Model-free control applied to a direct injection system: Experimental validation. *Fuel*, 358, 130071. doi:10.1016/j.fuel.2023.130071.

Chand, A.N., Kawanishi, M., e Narikiyo, T. (2016). Nonlinear model-free control of flapping wing flying robot using iPID. In *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2930–2937.

Chekakta, Z., Zerikat, M., Bouzid, Y., e Abderrahim, M. (2019). Model-free control applied for position control of quadrotor using ros. In *2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, 1260–1265.

das Neves, G.P. e Angélico, B.A. (2022). Model-free control of mechatronic systems based on algebraic estimation. *Asian Journal of Control*, 24(4), 1575–1584. doi:10.1002/asjc.2596.

Dean, S., Mania, H., Matni, N., Recht, B., e Tu, S. (2020). On the sample complexity of the linear quadratic regulator. *Foundations of Computational Mathematics*, 20(4), 633–679.

Fliess, M. e Join, C. (2008). Intelligent PID controllers. In *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 326–331.

Fliess, M. e Join, C. (2009). Model-free control and intelligent pid controllers: Towards a possible trivialization of nonlinear control? *IFAC Proceedings Volumes*, 42(10), 1531 – 1550. doi:10.3182/20090706-3-FR-2004.00256. 15th IFAC Symposium on System Identification.

Fliess, M. e Join, C. (2013). Model-free control. *International Journal of Control*, 86(12), 2228–2252. doi:10.1080/00207179.2013.810345.

Fliess, M. e Sira-Ramírez, H. (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM: COCV*, 9, 151–168. doi:10.1051/cocv:2003008.

Furuta, K., Yamakita, M., e Kobayashi, S. (1992). Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 206(4), 263–269.

Hou, Z. e Jin, S. (2011). Data-driven model-free adaptive control for a class of mimo nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(12), 2173–2188.

Hou, Z. e Jin, S. (2014). *Model Free Adaptive Control: Theory and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 1 edition. doi:10.1201/b15752.

Hou, Z. e Xiong, S. (2019). On model-free adaptive control and its stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(11), 4555–4569.

Jeong, G.M. e Choi, C.H. (2002). Iterative learning control with advanced output data. *Asian Journal of Control*, 4(1), 30–37. doi:10.1111/j.1934-6093.2002.tb00330.x.

Krstić, M. e Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36(4), 595–601. doi:10.1016/S0005-1098(99)00183-1.

Leissner, P., Gunnarsson, S., e Norrlöf, M. (2019). Some controllability aspects for iterative learning control. *Asian Journal of Control*, 21(3), 1057–1063. doi:10.1002/asjc.1790.

Li, H., Wang, Y., e Pang, M. (2019). Disturbance compensation based model-free adaptive tracking control for nonlinear systems with unknown disturbance. *Asian Journal of Control*. doi:10.1002/asjc.2230.

Longman, R.W. (2000). Iterative learning control and repetitive control for engineering practice. *International Journal of Control*, 73(10), 930–954. doi:10.1080/002071700405905.

Mboup, M., Join, C., e Fliess, M. (2009). Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, 50(4), 439–467. doi:10.1007/s11075-008-9236-1.

Moraes, M.S. e da Silva, P.S.P. (2015). Model-free control of magnetic levitation systems through algebraic derivative estimation. In *2015 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering*. doi:10.20906/CPS/COB-2015-1134.

Polack, P., Delprat, S., e d'Andréa Novel, B. (2019). Brake and velocity model-free control on an actual vehicle. *Control Engineering Practice*, 92, 104072. doi:10.1016/j.conengprac.2019.06.011.

Rodriguez-Fortun, J.M., Rotella, F., Alfonso, J., Carrillo, F.J., e Orús, J. (2013). Model-free control of a 3-dof piezoelectric nanopositioning platform. In *2013 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 342–347.

Scherer, P., Othmane, A., e Rudolph, J. (2024). Model-free control of a magnetically supported plate. *Control Engineering Practice*, 148, 105950. doi:10.1016/j.conengprac.2024.105950.

Wang, Z. e Wang, J. (2020). Ultra-local model predictive control: A model-free approach and its application on automated vehicle trajectory tracking. *Control Engineering Practice*, 101, 104482.

Zehetner, J., Reger, J., e Horn, M. (2007). A derivative estimation toolbox based on algebraic methods - theory and practice. In *2007 IEEE International Conference on Control Applications*, 331–336.

Zhang, H., Li, H., Mao, J., Pan, C., e Luan, Z. (2022). Model-free control of single-phase boost ac/dc converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 37(10), 11828–11838. doi:10.1109/TPEL.2022.3176937.