Alocação regional de polos usando realimentação estática da saída ⋆

Flávio A. Faria *, **Ruam C. N. Pazini** *, **Dante J. S. Oncoy** *, **Hugo F. Yamanaka** *, **Rodrigo Cardim** *, **Marcelo C. M. Teixeira** *, **Vilma A. Oliveira** **.

* *Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira (e-mail: {flavio.faria,ruam.carlos,dante.solis-oncoy,hugo.yamanaka,rodrigo.cardim,marcelo.minhoto}@unesp.br).*
** *Universidade de São Paulo (USP), Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos (e-mail: voliveira@usp.br).*

Abstract: This work proposes a static output feedback design for the $\mathcal{D}$-stabilization of uncertain linear systems. The control design aims to ensure $\mathcal{D}$-stabilization of the controlled system within a circular region, guaranteeing a predefined decay rate for the dynamic response of the system. Using a matrix decomposition from the literature, the solution to the output feedback $\mathcal{D}$-stabilization problem is obtained from the state feedback solution. The efficiency of the proposed method is illustrated through a numerical example.

Resumo: Neste trabalho é proposto um projeto de realimentação estática da saída para a $\mathcal{D}$-estabilização de sistemas lineares incertos. O projeto de controle visa garantir a $\mathcal{D}$-estabilização do sistema controlado em uma região circular que assegura uma taxa de decaimento pré-definida para a resposta dinâmica do sistema. Utilizando uma decomposição matricial presente na literatura, a solução do problema de $\mathcal{D}$-estabilização por realimentação da saída é obtida a partir da solução por realimentação de estado. A eficiência da estratégia proposta é ilustrada através de um exemplo numérico.

Keywords: Polytopic uncertainties; $\mathcal{D}$-stability; Robust Control; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Palavras-chaves: Incertezas politópicas; $\mathcal{D}$-estabilidade; Controle Robusto; Desigualdades matriciais lineares (LMIs).

1. INTRODUÇÃO

Existem projetos de controle em que apenas a estabilidade assintótica do sistema não é suficiente para garantir um comportamento dinâmico adequado. Neste tipo de problema torna-se necessário incluir restrições de desempenho no projeto do controlador. Uma maneira eficiente de incluir restrições de desempenho é através da alocação de polos do sistema controlado.

Na literatura, existem resultados eficientes para assegurar a alocação de polos de sistemas lineares, sendo que um resultado muito usado é a fórmula de Ackerman (Ogata, 2010; Abdelaziz and Valášek, 2004). A fórmula de Ackerman é fácil de ser utilizada e permite alocar os polos do sistema linear em pontos específicos do plano complexo. Porém, essa fórmula não pode ser aplicada em sistemas sujeitos à incertezas paramétricas utilizando, um projeto de matriz de ganho fixo. Nesses casos, a estratégia mais usada consiste em definir previamente uma região de interesse no plano complexo e, em seguida, obter um resultado que assegure a alocação nessa região. O procedimento é comumente referenciado como alocação regional de polos (Haddad and Bernstein, 1992).

Em geral, a alocação regional de polos é desenvolvida considerando a $\mathcal{D}$-estabilidade de matrizes (Furuta and Kim, 1987). Chilali and Gahinet (1996) provaram que determinadas regiões convexas do plano complexo podem ser representadas por desigualdades matriciais lineares (LMIs, na sigla em inglês), conhecidas na literatura como regiões LMIs (Chilali and Gahinet, 1996; Peaucelle et al., 2000). Regiões LMI permitem incluir restrições de desempenho no controlador e são facilmente estendidas para o controle de sistemas lineares incertos (Peaucelle et al., 2000; Faria et al., 2009; Zhou et al., 2005). No entanto, as LMIs apresentadas por (Chilali and Gahinet, 1996; Peaucelle et al., 2000) envolvem o produto de Kronecker, que é uma operação algébrica avançada, tornando o resultado pouco acessível para o ensino na graduação. Uma maneira de reduzir a complexidade das LMIs consiste em usar regiões circulares. Tais regiões possuem uma representação algébrica simples e a desigualdade matricial envolve apenas o produto entre matrizes.

Em Leite et al. (2002), os autores apresentam uma região circular que limita a região de alocação dos polos ao mesmo tempo que garante uma taxa de decaimento pré-definida

⋆ Os autores agradecem à FAPESP (Processos: 2014/50851-0, 2023/01279-0, 2023/05700-2) e ao CNPq (Processos: 311959/2021-0, 308581/2022-9, 131242/2023-7) pelo apoio financeiro.

para o sistema controlado. Limitar a região de alocação pode facilitar a implementação prática do controlador. Em geral, quanto maior é o módulo do polo, maior é a norma da matriz de ganho necessária para a alocação. Na prática, o controlador está sujeito à saturação o que dificulta a sua implementação prática.

A alocação regional de polos usando realimentação estática da saída é um tema pouco explorado na literatura e ainda oferece margem para contribuições. Por exemplo, em Veselý et al. (2011) é apresentado um projeto de realimentação estática da saída usando o Lema da eliminação. O resultado é de difícil reprodução e exige a aplicação de um método de linearização para resolver numericamente as desigualdades propostas. Em Sahoo et al. (2019) é apresentado uma decomposição matricial que permite obter o ganho da realimentação estática da saída a partir de LMIs do projeto de realimentação de estado. O resultado garante a alocação de polos de sistemas lineares incertos em regiões específicas do plano complexo. Em Behrouz et al. (2019) é apresentado um método de dilatação de LMIs para a $\mathcal{D}$-estabilização de sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída. O método apresentado permite desacoplar o ganho do controlador da matriz usada na função de Lyapunov. Finalmente, em Sereni et al. (2019) é apresentado um método em dois passos para o projeto da realimentação estática da saída. Para usar o método, no primeiro passo, é necessário realizar um projeto de realimentação de estado. No segundo passo usa-se o ganho de realimentação de estado para obter o ganho da realimentação estática da saída a partir da solução de LMIs.

Neste trabalho é proposto um projeto de realimentação estática da saída para garantir a alocação regional de polos de um sistema linear incerto. O método proposto, explora a decomposição matricial apresentada por Gopmandal and Ghosh (2021), que permite obter uma matriz de ganho para a realimentação estática da saída a partir de LMIs desenvolvidas para o projeto da realimentação de estado. A principal vantagem é que não há necessidade de desenvolver novas LMIs para obter a matriz de ganho da realimentação estática da saída. Por outro lado, a decomposição matricial apresentada em Gopmandal and Ghosh (2021) depende de uma matriz de ajuste. Uma escolha inadequada para essa matriz pode resultar em problemas numéricos, gerando uma matriz de ganho com valores elevados. Para contornar esse problema, foi utilizado a estratégia apresentada em Palacios-Quiñonero et al. (2014) para obter um valor adequado para a matriz de ajuste. Essa estratégia consiste em resolver as LMIs em dois passos. Primeiro, resolve-se a LMI para o projeto da realimentação de estado, em seguida, utiliza-se a matriz encontrada para a função de Lyapunov como valor inicial para a matriz de ajuste e, finalmente, resolve-se a LMI para o projeto da realimentação estática da saída.

A escolha de uma região circular para a alocação de polos facilita a inclusão do projeto de realimentação estática da saída no ensino de teoria de controle aos alunos de graduação, contribuindo para o seu engajamento e para oferecer uma formação atualizada em controle de sistemas. A eficiência do método proposto é ilustrada na solução de um exemplo numérico.

1.1 Notações

O símbolo $\mathbb{K}_s$ é usado para descrever o conjunto de números naturais $\{1,2,\cdots,s\}$ e o símbolo $\star$ denota o elemento transposto em uma matrix simétrica. A transposta de uma matriz é denotada por $\mathbf{M}'$ e $He(\mathbf{M}) = \mathbf{M} + \mathbf{M}'$. A desigualdade matricial $\mathbf{M} \prec 0$ ($\mathbf{M} \succ 0$) significa que $\mathbf{M}$ é simétrica definida negativa (positiva) e $\mathbf{I}_s$ representa uma matriz identidade de dimensão s. A matriz $\mathbf{C}^\dagger$ representa a pseudo inversa de Moore–Penrose de $\mathbf{C}$.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a família de sistemas lineares incertos descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Big(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \Big) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída do sistema, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ matrizes constantes conhecidas, N o número de vértices matriciais e α_i constantes desconhecidas satisfazendo

$$\forall\, i \in \mathbb{K}_N,\ \ \alpha_i \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1. \tag{2}$$

O projeto de controle consiste em encontrar uma matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ tal que, ao realimentar o sistema (1) com a entrada

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t), \tag{3}$$

todos os polos do sistema controlado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Big(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{C} \Big) \mathbf{x}(t) \tag{4}$$

estejam confinados na região circular da Figura 1.

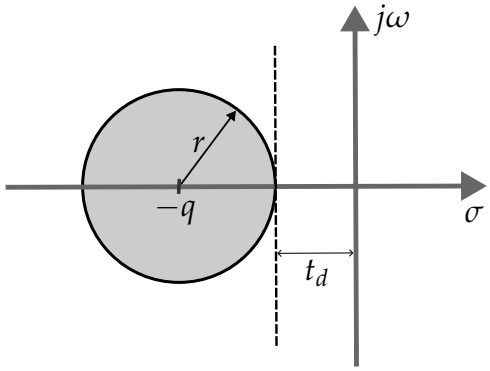

Figura 1. Região circular $S(t_d,r)$ no plano complexo s.

A região denotada $S(t_d,r)$ tem raio r e centro $(-q,0)$, sendo $q = t_d + r$, e foi construída para garantir que o sistema (4) tenha taxa de decaimento maior ou igual a t_d.

Para garantir a alocação regional de pólos do sistema (4) na região $S(t_d,r)$, em Leite et al. (2002) é apresentado o seguinte resultado para realimentação de estado.

Lema 1. Dados números reais positivos t_d e r. Se existirem matrizes simétricas $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ satisfazendo as desigualdades (5) e (6), então todos os polos do sistema

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{K}_x\Big)\mathbf{x}(t)$ estão confinados na região $S(t_d,r)$.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \succ \mathbf{0}, \tag{5}$$

$$-\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) + \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{K}_x + q\mathbf{I}_{n_x}\Big) \times \left(\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})}{r^2}\right)\Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{K}_x + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' \prec \mathbf{0}. \tag{6}$$

em que $i \in \mathbb{K}_N$, $q = t_d + r$, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{B}_i$ e $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{P}_i$.

Prova. Veja a desigualdade (10) em Leite et al. (2002) para mais detalhes.

Observação 1. O Lema 1 é usado como base teórica para o resultado principal deste trabalho.

Do ponto de vista de controle, a região $S(t_d,r)$ é mais eficiente que a região imposta pela condição de taxa de decaimento padrão (Boyd et al., 1994; Faria et al., 2023), pois também assegura um limitante inferior para os polos do sistema controlado. Em geral, quanto maior é o módulo do polo, maior é o esforço de controle (norma do ganho) necessário para garantir a alocação, logo a região $S(t_d,r)$ evita que o ganho do controlador assuma valores elevados. O Lema 1 é voltado para o projeto da realimentação de estado e não pode ser usado para tratar da realimentação de saída, que não é imediata. Na próxima seção é proposto um método para obter a matriz de ganho da realimentação da saída considerando as desigualdades (5) e (6) como base teórica para a modelagem. O método é simples e pode ser adaptado para regiões LMI mais complexas (Chilali and Gahinet, 1996; Peaucelle et al., 2000).

3. RESULTADO PRINCIPAL

Em projetos de controle baseados em LMIs o ganho da realimentação de estado tem uma estrutura do tipo

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1} \tag{7}$$

sendo $\mathbf{K}_x \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e as matrizes $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{G}$ são obtidas a partir da solução numérica das LMIs. Como o objetivo deste trabalho é obter uma matriz de ganho para a realimentação estática da saída, então a igualdade (7) é alterada para

$$\mathbf{K}\mathbf{C} = \mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1} \tag{8}$$

em que $\mathbf{K}$ é o ganho usado no sistema (4). A presença da matriz $\mathbf{C}$ em (8) insere uma complicação a mais para a obtenção do ganho $\mathbf{K}$. Por exemplo, poderia-se propor uma solução pós-multiplicando ambos os lados de (8) por $\mathbf{C}^{\dagger}$, obtendo a expressão

$$\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}^{\dagger}. \tag{9}$$

Porém, o ganho obtido com (9) nem sempre estabiliza o sistema (4). O principal motivo é que ao resolver as desigualdades (5) e (6), supõe-se que todas as variáveis de estado estão disponíveis para a realimentação, logo a matriz $\mathbf{K}_x$ possui estrutura completa. A substituição de $\mathbf{K}_x$ por $\mathbf{K}\mathbf{C}$ em (8) gera uma redução de elementos no ganho do controlador que não estava prevista na solução do Lema 1. Logo, um desafio que surge é, como encontrar uma matriz de ganho estabilizante $\mathbf{K}$ que satisfaz o Lema 1. Para solucionar esse problema, em Gopmandal and Ghosh (2021), é proposto o seguinte resultado.

Lema 2. Seja $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x - n_y}$ uma matriz conhecida tal que $\mathbf{C}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ e defina

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{C}^{\dagger} + \mathbf{Q}\mathbf{L} \\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}' \\ \mathbf{R}' \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_R \mathbf{R}' \end{cases} \tag{10}$$

em que $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$ uma matriz de ajuste, $\mathbf{Y}_R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $\mathbf{G}_{11} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_x - n_y}$, $\mathbf{G}_{12} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$ e $\mathbf{G}_{22} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ variáveis matriciais. Se $\mathbf{G}$ é não singular, então $\mathbf{G}_{22}$ também é não singular e uma solução para (8) é dada por $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R \mathbf{G}_{22}^{-1}$.

Prova. Veja a prova do Teorema 1 de Gopmandal and Ghosh (2021).

O Lema 2 explora propriedades estruturais da matriz $\mathbf{C}$ para obter uma solução para (8), o que permite estender facilmente projetos de realimentação de estado para o projeto da realimentação estática da saída. Considerando o Lema 2, a seguir é proposto um método para encontrar uma matriz de ganho $\mathbf{K}$ que assegura a alocação dos polos do sistema (4) na região $S(t_d,r)$.

Teorema 3. Dados números reais positivos t_d e r, uma matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x - n_y}$, tal que $\mathbf{C}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, e uma matriz $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$. Se existirem matrizes $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{Y}_R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $\mathbf{G}_{11} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_x - n_y}$, $\mathbf{G}_{12} \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$, $\mathbf{G}_{22} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ satisfazendo as desigualdades (11) e (12), então o ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R \mathbf{G}_{22}^{-1}$ garante que todos os polos do sistema (4) pertencem à região $S(t_d,r)$.

$$\mathbf{P}_i \succ \mathbf{0}, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_i\mathbf{Y} + q\mathbf{G} \\ \star & r\Big(\mathbf{P}_i - \mathbf{G} - \mathbf{G}'\Big) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \tag{12}$$

$\forall\, i \in \mathbb{K}_N$, $q = t_d + r$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{Y}$ obtidas usando (10).

Prova. Multiplicando as LMIs (11) e (12) por α_i e somando todos os termos chega-se em

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \succ \mathbf{0}, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{G} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{Y} + q\mathbf{G} \\ \star & r\Big(\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{G} - \mathbf{G}'\Big) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \tag{14}$$

Pela factibilidade da LMI (14), segue que

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{G} - \mathbf{G}' \prec \mathbf{0}.$$

A factibilidade de (13) garante que

$$-\mathbf{G} - \mathbf{G}' \prec \mathbf{0}.$$

Logo, a matriz $\mathbf{G}$ é não singular e pelo Lema 2, $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R \mathbf{G}_{22}^{-1}$ é uma solução para a igualdade (8). De (8) tem-se que $\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{G} = \mathbf{Y}$, logo (14) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) & \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{K}\mathbf{C} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\mathbf{G} \\ \star & r\Big(\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{G} - \mathbf{G}'\Big) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \tag{15}$$

Pré multiplicando (15) por $\Big[\mathbf{I}_{n_x} \quad \frac{1}{r}\big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{K}\mathbf{C} + q\mathbf{I}_{n_x}\big)\Big]$ e pós multiplicando pela transposta dessa matriz, obtém-se a desigualdade

$$
\begin{aligned}
&- r\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) + \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\left(\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})}{r}\right) \\
&\times \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' + \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} \\
&+ q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\left(\frac{\mathbf{G}'}{r}\right)\Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' + \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \\
&+ \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\left(\frac{\mathbf{G}}{r}\right)\Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' \\
&- \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\left(\frac{\mathbf{G}+\mathbf{G}'}{r}\right)\Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \\
&+ \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' \prec \mathbf{0}. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Simplificando (16) chega-se em

$$
\begin{aligned}
&- r\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) + \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\left(\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})}{r}\right) \\
&\times \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' \prec \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

que é equivalente à

$$
\begin{aligned}
&- \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) + \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)\left(\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})}{r^2}\right) \\
&\times \Big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{KC} + q\mathbf{I}_{n_x}\Big)' \prec \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Lema 1 a matriz de ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R\mathbf{G}_{22}^{-1}$ garante que todos os polos do sistema (4) pertencem à região $S(t_d,r)$.

Observação 2. O Teorema 3 é uma adaptação do Lema 2 de Leite et al. (2002) para o projeto da realimentação estática da saída. A contribuição foi utilizar a decomposição matricial do Lema 2 para obter uma solução para a igualdade (8).

Observação 3. A decomposição matricial do Lema 2 depende das matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{Q}$, a matriz $\mathbf{Q}$ está diretamente relacionada com a estrutura da matriz $\mathbf{C}$ então, apesar de não ser única, preserva uma estrutura nos elementos nulos. Por outro lado, a matriz de ajuste $\mathbf{L}$ é de livre escolha e dependendo do valor usado, pode gerar problemas numéricos ou infactibilidade na solução da LMI (12). Um valor adequado para a matriz $\mathbf{L}$ pode ser obtido usando diferentes métodos, por exemplo, pode-se usar métodos heurísticos (Gopmandal and Ghosh, 2021), otimização evolutiva (Gonçalves et al., 2024) ou métodos sistemáticos (Palacios-Quiñonero et al., 2014). Devido à facilidade de uso, neste trabalho, a matriz $\mathbf{L}$ foi obtida empregando o método apresentado em Palacios-Quiñonero et al. (2014). O procedimento é detalhado a seguir.

- Primeiro resolve-se o Teorema 3 para o projeto da realimentação de estado, isto é, considera-se $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{n_x}$. Então, utiliza-se uma das matrizes $\mathbf{P}_i$, para obter um valor inicial para a matriz $\mathbf{L}$ com a fórmula:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}^{\dagger}\mathbf{P}_i\mathbf{C}'\Big(\mathbf{C}\mathbf{P}_i\mathbf{C}'\Big)^{-1}. \qquad (17)$$

- Em seguida, resolve-se novamente o Teorema 3 considerando a matriz $\mathbf{C}$ da saída do sistema e a matriz $\mathbf{L}$ obtida em (17). Se a matriz de ganho $\mathbf{K}$ encontrada está adequada ao projeto de controle, encerra-se o processo, caso contrário, continua-se testando a fórmula (17) para todos os índices $i \in \mathbb{K}_N$.

O procedimento descrito acima contribui para obter a matriz de ganho da realimentação estática da saída, reduzindo possíveis erros numéricos na solução das LMIs. Em Palacios-Quiñonero et al. (2014), o procedimento foi desenvolvido considerando uma matriz fixa $\mathbf{P}$ enquanto o Teorema 3 fornece várias matrizes $\mathbf{P}_i$ e uma matriz de folga $\mathbf{G}$. Como a matriz $\mathbf{G}$ é não singular, a princípio, também pode ser utilizada na fórmula (17), isto é,

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}^{\dagger}\mathbf{G}\mathbf{C}'\Big(\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}'\Big)^{-1}.$$

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere um sistema de suspensão ativa de bancada, cujo diagrama é exibido na Figura 2.

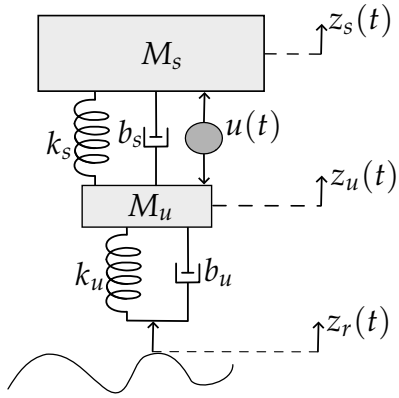

Figura 2. Sistema de suspensão Ativa.

O modelo consiste de duas massas conectadas por um sistema de suspensão ativa. A massa M_u, representa o conjunto roda mais pneu e o amortecimento é causado pela composição da borracha e a calibração do pneu. Essa estrutura é representada por um modelo massa mola amortecedor, sendo k_u a constante de elasticidade da mola e b_u o coeficiente de amortecimento. O sistema de suspensão ativa entre o pneu e o chassi do carro inclui a adição de um motor elétrico que permite alterar o coeficiente de amortecimento da suspensão de acordo com as irregularidades da estrada. O parâmetro M_s representa a massa do veículo mais passageiros e bagagens, k_s é o coeficiente de elasticidade e b_s o coeficiente de amortecimento. A entrada de controle (3) é capaz de alterar o coeficiente de amortecimento b_s de acordo com o tipo de irregularidade na estrada, representado por $z_r(t)$ no diagrama.

O diagrama da Figura 2 pode ser representado pelo seguinte modelo matemático (Apkarian and Abdossalami, 2013):

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) = &\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\dfrac{k_s}{M_s} & -\dfrac{b_s}{M_s} & 0 & \dfrac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_s}{M_u} & \dfrac{b_s}{M_u} & -\dfrac{k_u}{M_u} & -\dfrac{(b_s+b_u)}{M_u} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{M_u} \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{19}$$

sendo $\mathbf{x}(t) = [z_s(t) - z_u(t) \;\; \dot{z}_s(t) \;\; z_u(t) - z_r(t) \;\; \dot{z}_u(t)]'$. A simulação do sistema foi realizada considerando os parâmetros da Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros do sistema de suspensão ativa Sereni et al. (2019)

Parâmetro	Valor
M_s	$[1{,}455 \;\; 2{,}45]$ kg
M_u	1 kg
k_s	900N/m
k_u	2500N/m
b_s	7,5N s/m
b_u	5N s/m

A massa M_s pode variar de acordo com o número de passageiros e quantidade de bagagem. No modelo de bancada essa variação foi considerada como $1{,}455 \leq M_s \leq 2{,}45$. Como o parâmetro M_s é incerto, então (18) pode ser representado pelo sistema politópico (1) com os seguinte vértices matriciais:

- Vértice 1 - $M_s = 1{,}455$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618{,}56 & -5{,}15 & 0 & 5{,}15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7{,}5 & -2500 & -12{,}5 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}69 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 2 - $M_s = 2{,}45$.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367{,}35 & -3{,}06 & 0 & 3{,}06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7{,}5 & -2500 & -12{,}5 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}41 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O Teorema 3 foi resolvido considerando os parâmetros $t_d = 0{,}1$ e $r = 460$. É importante destacar que a matriz $\mathbf{L}$ tem grande influência na solução numérica encontrada pelas LMIs. Para os valores de t_d e r usados na simulação, o Teorema 3 é infactível considerando $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Então, para obter uma solução, primeiro o Teorema 3 foi resolvido para o caso $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{n_x}$ e $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, que é equivalente a um projeto de realimentação de estado, e foram encontradas as seguintes matrizes

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 38{,}2549 & -18{,}9253 & -0{,}0062 & 0{,}1648 \\ -18{,}9253 & 69{,}0103 & 1{,}0797 & -1{,}9995 \\ -0{,}0062 & 1{,}0797 & 0{,}0471 & -0{,}5720 \\ 0{,}1648 & -1{,}9995 & -0{,}5720 & 79{,}8129 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathbf{K}_x = 10^3 \, [0{,}7818 \;\; -0{,}2317 \;\; 6{,}6644 \;\; 0{,}2274]. \tag{21}$$

Em seguida, considerando

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e utilizando (17) obteve-se a matriz

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}^{\dagger}\mathbf{P}_1\mathbf{C}'\left(\mathbf{C}\mathbf{P}_i\mathbf{C}'\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0154 & 0{,}0068 \\ 0{,}2744 & 0{,}0048 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Então, usando a matriz (22), o Teorema 3 foi resolvido novamente considerando a matriz de saída $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e foram obtidas as seguintes soluções

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} 44{,}2106 & 53{,}4605 \\ 3{,}5969 & 190{,}9416 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_R = 10^4 \, [-1{,}1200 \;\; -0{,}2112].$$

Como $\mathbf{K} = \mathbf{Y}_R\mathbf{G}_{22}^{-1}$, então o ganho da realimentação estática de saída encontrado foi

$$\mathbf{K} = [-258{,}3201 \;\; 61{,}2632]. \tag{23}$$

Com essa estrutura, o Teorema 3 se torna um método em dois passos, então para efeito de comparação também foi resolvido o Teorema 2 de Sereni et al. (2019). O Teorema 2 de Sereni et al. (2019) apresenta um conjunto de desigualdades matriciais bilineares (BMIs, na sigla em inglês) para encontrar a matriz de ganho da realimentação estática da saída. Considerando que BMIs são difíceis de serem resolvidas numericamente, então Sereni et al. (2019) propõe linearizar as desigualdades usando uma matriz de ganho de realimentação de estado como parâmetro de ajuste. Observe que o primeiro passo para obter a matriz (22) foi justamente projetar a matriz de ganho de realimentação de estado (7). Logo, pode-se utilizar a matriz $\mathbf{K}_x$, dada em (21), para resolver o Teorema 2 de Sereni et al. (2019). Seguindo esse procedimento foi encontrada a seguinte solução para a realimentação estática da saída

$$\mathbf{K}_s = [-246{,}8388 \;\; 190{,}2032]. \tag{24}$$

Para ilustrar a eficiência do Teorema 3, a localização dos polos dos vértices matriciais 1 e 2, realimentados com a entrada (3) e matrizes de ganho $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}_s$ dados em (23) e (24), respectivamente, são exibidos na Figura 3. A Figura 4 apenas exibe um zoom na região de fronteira do círculo de raio $r = 460$ e centro $q = -460{,}1$. Pelas Figuras 3 e 4, observa-se que todos os polos do sistema controlado estão confinados na região de interesse.

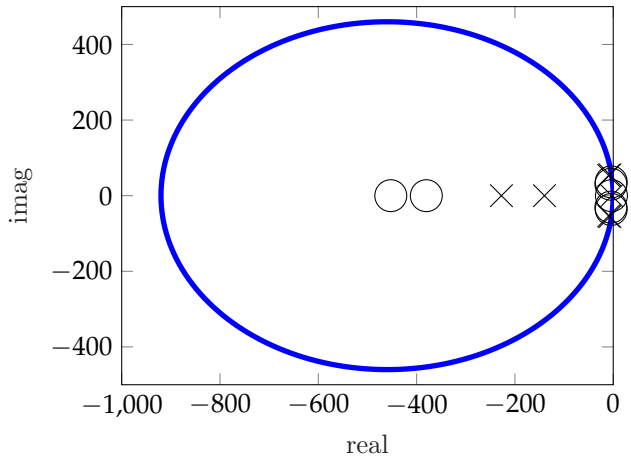

Figura 3. Localização dos pólos dos vértices matriciais considerando as matrizes de ganho (23) (×) e (24) (○).

A Figura 5 exibe a saída do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = [0 \;\; 0 \;\; 0{,}04 \;\; 0]'$ e a Figura 6 exibe o comportamento dinâmico da entrada de controle.

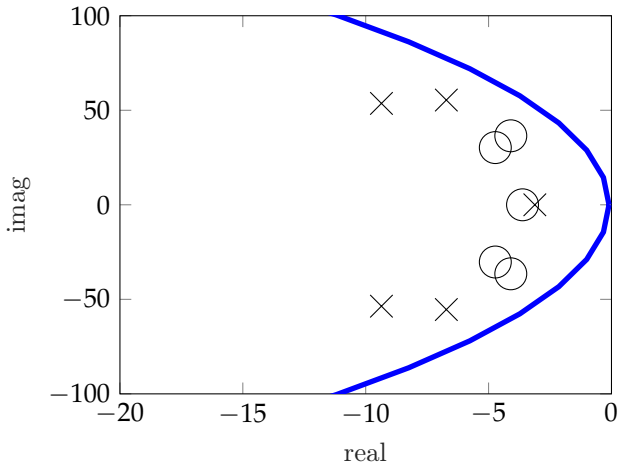

Figura 4. Zoom na região de fronteira do círculo de raio $r = 460$ e centro $q = -460{,}1$.

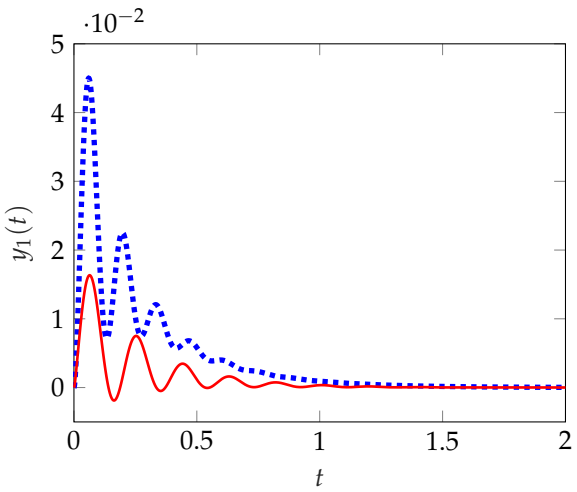

Figura 5. Comportamento dinâmico da saída $y_1(t)$ do sistema controlado com (23) (linha pontilhada) e (24) (linha contínua).

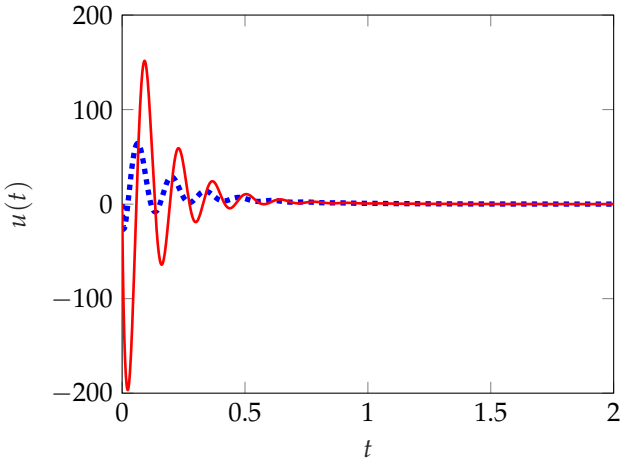

Figura 6. Comportamento dinâmico da entrada de controle (3) com (23) (linha pontilhada) e (24) (linha contínua).

Pela Figura 5, o comportamento dinâmico da saída do sistema controlado com (23) teve oscilações com maiores valores de pico, ou seja, com menor conforto que o obtido com o ganho (24). Por outro lado, a Figura 6 ilustra que a matriz de ganho $\mathbf{K}$ gerou um menor esforço de controle em relação à matriz de ganho (24). É importante ressaltar que uma comparação entre o Teorema 3 e o Teorema 2 do trabalho Sereni et al. (2019) não é simples já que são resultados baseados em dois passos, e que ambos são sensíveis aos valores iniciais usados nas matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{K}_x$, respectivamente. A principal vantagem do Teorema 3 em relação ao método comparado é que não é necessário desenvolver um novo conjunto de LMIs para o projeto da realimentação da saída. As LMIs permanecem as mesmas do projeto de realimentação de estado, o que muda é a estrutura das variáveis matriciais $\mathbf{G}$ e $\mathbf{Y}$.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposto um método para a $\mathcal{D}$-estabilização de sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída. Para a $\mathcal{D}$-estabilização foi escolhida uma região circular que assegura uma taxa de decaimento pré-especificada para o sistema controlado. As LMIs foram obtidas estendendo um resultado de realimentação de estado para a realimentação estática da saída através de uma decomposição matricial que explora propriedades estruturais da matriz de saída do sistema. Trabalhos futuros consistem em estender o resultado proposto para a $\mathcal{D}$-estabilização de sistemas fuzzy TS usando controladores PDC.

REFERÊNCIAS

Abdelaziz, T.H.S. and Valášek, M. (2004). Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. IEE Proceedings - Control Theory and Applications, 151(4), 377–385. doi:10.1049/ip-cta:20040660.

Apkarian, J. and Abdossalami, A. (2013). Laboratory Guide - Active Suspension Experiment for MATLAB /Simulink Users.

Behrouz, H., Mohammadzaman, I., and Mohammadi, A. (2019). Robust static output feedback design with pole placement constraints for linear systems with polytopic uncertainties. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 1–11. doi:10.1177/0142331218823857.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Volume 15 of Studies in Applied Mathematics. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 2nd edition. Http://www.stanford.edu/∼boyd/lmibook/.

Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3), 358–367. doi:10.1109/9.486637.

Faria, F.A., Assunção, E., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., and da Silva, N.A.P. (2009). Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. International Journal of Control, 82(1), 1–12. doi:10.1080/00207170801942188.

Faria, F.A., Menezes, L.C.C., Oncoy, D.J.S., Cardim, R., Assunção, E., and Teixeira, M.C.M. (2023). Controle

chaveado de sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída. In Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 1–6. Manaus, AM.

Furuta, K. and Kim, S.B. (1987). Pole assignment in a specified disk. IEEE Transactions on Automatic Control, 32(5), 423–427. doi:10.1109/TAC.1987.1104624.

Gonçalves, E.N., Oliveira, P.R.A.L., and da Silva Júnior, J.H. (2024). $\mathcal{H}_\infty$ robust control of discrete-time systems based on new linear matrix inequality formulations and evolutionary optimization. Optimal Control Applications and Methods, 45(3), 1045–1063. doi:10.1002/oca.3087.

Gopmandal, F. and Ghosh, A. (2021). A hybrid search based synthesis of static output feedback controllers for uncertain systems with application to multivariable PID control. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 31(12), 6069–6090. doi:10.1002/rnc.5581.

Haddad, W.M. and Bernstein, D.S. (1992). Controller design with regional pole constraints. IEEE Transactions on Automatic Control, 37(1), 54–69. doi:10.1109/9.109638.

Leite, V., Montagner, V., and Peres, P. (2002). Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, volume 2, 1864–1869. doi:10.1109/CDC.2002.1184796.

Ogata, K. (2010). Engenharia de controle moderno. Pearson Universidades, New York, 5 edition.

Palacios-Quiñonero, F., Rubió-Massegú, J., Rossell, J.M., and Karimi, H.R. (2014). Feasibility issues in static output-feedback controller design with application to structural vibration control. Journal of the Franklin Institute, 351(1), 139–155.

Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O., and Bernussou, J. (2000). A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty. Systems & Control Letters, 40(1), 21–30. doi:10.1016/S0167-6911(99)00119-X.

Sahoo, P.R., Goyal, J.K., Ghosh, S., and Naskar, A.K. (2019). New results on restricted static output feedback controller design with regional pole placement. IET Control Theory & Applications, 13(8), 1095–1104. doi:10.1049/iet-cta.2018.6138.

Sereni, B., Assunção, E., and Teixeira, M.C.M. (2019). Robust $\mathcal{D}$-stabilisation of uncertain systems via static output feedback. In Proceedings of the 14° Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 931–937. doi:10.17648/sbai-2019-111258.

Veselý, V., Rosinová, D., and Kučera, V. (2011). Robust static output feedback controller LMI based design via elimination. Journal of the Franklin Institute, 348(9), 2468–2479. doi:10.1016/j.jfranklin.2011.04.020.

Zhou, W., Su, H., and Chu, J. (2005). LMI condition of quadratic $\mathcal{D}$-stability for a class of uncertain linear systems. ACTA Automatica Sinica, 31(3), 379–384.