

# UM NOVO MÉTODO *RINGDOWN VECTOR FITTING* BASEADO EM VARIÁVEIS INSTRUMENTAIS PARA ESTIMAÇÃO DE MODOS OSCILATÓRIOS EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

RICARDO SCHUMACHER\*, GUSTAVO H. C. OLIVEIRA\*, RÔMAN KUIAVA\*

*\*Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Paraná, Brasil*

Emails: schumacher.ric@gmail.com, gustavo@eletrica.ufpr.br, kuiava@eletrica.ufpr.br

**Abstract**— Estimating oscillations in power systems by means of ringdown transient events plays an important role to infer about the stability of such systems. In this context, it has been recently proposed a novel time-domain Vector Fitting estimating approach, denoted by Ringdown Time-Domain Vector Fitting (RTD-VF), which is capable of presenting more precise modal estimates in comparison with several techniques traditionally used. Based on Instrumental Variables (IV), this paper aims to extend such a standard RTD-VF method recently proposed, resulting in the IV-RTD-VF algorithm. For many cases, differently from standard RTD-VF, the IV version guarantees that modal estimates obtained after algorithm convergence represent a local optimum (or even the global minimum) of the objective function used as estimation criterion. As a direct consequence, modal estimates even more precise can be obtained. The numerical results presented in this paper validate the proposed IV-RTD-VF technique.

**Keywords**— Sistemas de Potência, Estimação de Oscilações via Eventos *Ringdown*, *Vector Fitting*, Variáveis Instrumentais.

**Resumo**— A estimação de oscilações em sistemas elétricos de potência a partir de eventos transitórios do tipo *ringdown* desempenha um papel fundamental para inferir sobre a estabilidade destes sistemas. Neste contexto, recentemente foi proposta uma nova abordagem de estimação *Vector Fitting* no domínio do tempo, denominada *Ringdown Time-Domain Vector Fitting* (RTD-VF), que se mostra capaz de apresentar estimativas modais mais precisas em comparação com diversas técnicas tradicionalmente utilizadas. Baseando-se em variáveis instrumentais (ou IV, do inglês, *instrumental variables*), o presente artigo tem por objetivo estender tal método RTD-VF padrão recentemente proposto, o que resulta no algoritmo IV-RTD-VF. Para diversos casos, diferentemente do método RTD-VF padrão, a versão IV garante que as estimativas modais obtidas após a convergência do algoritmo representam um ótimo local (ou o próprio mínimo global) da função objetivo usada como critério de estimação. Como consequência direta, estimativas modais ainda mais precisas podem ser obtidas. Os resultados numéricos apresentados neste artigo validam a técnica IV-RTD-VF proposta.

**Palavras-chave**— Power Systems, Estimation of Oscillations via Ringdown Events, Vector Fitting, Instrumental Variables.

## 1 Introdução

A estimação de dinâmicas (modos) oscilatórias desempenha um papel fundamental para inferir sobre a estabilidade de sistemas de potência interconectados, especialmente quando estes operam próximos ao seus limites (Kundur, 1994). Neste contexto, quando um evento transitório (também chamado de evento “*ringdown*”) ocorre (devido a um distúrbio ou a uma falta), informações sobre tais dinâmicas são induzidas em sinais como, por exemplo, de potência e de frequência do sistema.

No âmbito de eventos *ringdown*, diversos métodos de estimação de modos oscilatórios existem. Métodos como, por exemplo, Prony (Hauer et al., 1990) e Matrix Pencil (Crow and Singh, 2005), consideram raízes de polinômios característicos (ou matrizes características) como sendo estimativas modais. Apesar de vastamente utilizados, estes métodos exigem uma grande quantidade de cálculos devido a decomposições em valores singulares. Como se sabe, tamanha quantidade de cálculos pode levar esses métodos a apresentarem problemas de condicionamento numérico ou estimativas modais imprecisas (Glickman

et al., 2007; Hauer et al., 1990; Hwang and Liu, 2017).

Buscando superar as limitações apresentadas por esses métodos, Schumacher et al. (2018) recentemente propuseram uma nova técnica iterativa *Vector Fitting* (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016) no domínio do tempo para a estimação de modos oscilatórios de eventos *ringdown*. O método foi denominado *Ringdown Time-Domain Vector Fitting* (RTD-VF) e se mostra capaz de apresentar estimativas modais mais precisas em comparação com diversas técnicas tradicionalmente utilizadas.

Baseando-se em variáveis instrumentais (ou IV, do inglês, *instrumental variables*), o presente artigo tem por objetivo estender o método RTD-VF padrão proposto em (Schumacher et al., 2018), o que resulta no algoritmo IV-RTD-VF. Para diversos casos, diferentemente do método RTD-VF padrão, a versão IV garante que as estimativas modais obtidas após a convergência do algoritmo representam um ótimo local (ou o próprio mínimo global) da função objetivo usada como critério de estimação. Como consequência direta, esti-

mativas modais mais precisas podem ser obtidas. Mostra-se ainda que esta importante propriedade de otimalidade local do algoritmo pode ser atingida ainda que o ruído que corrompe os dados de estimação seja colorido.

O artigo encontra-se organizado conforme segue. Na Seção 2, define-se o problema de modelagem de sinais transitórios em sistemas de potência. Nesta seção, o método RTD-VF padrão é também apresentado sob a ótica da função objetivo usada como critério de estimação. Na Seção 3, o método RTD-VF da Seção 2 é estendido para o contexto IV, ou seja, o método IV-RTD-VF é proposto. Na Seção 4, dois estudos de caso são usados para validar a técnica IV-RTD-VF. Um desses exemplos considera a estimação de modos oscilatórios de um sinal teste corrompido por ruído colorido, enquanto o outro considera dados reais extraídos do sistema elétrico Brasileiro durante a reconexão da Usina Hidrelétrica de Itaipu.

## 2 RTD-VF sob a ótica da Função Objetivo

Em sistemas de potência, pode-se definir que um sinal transitório  $y(t)$  se inicia em um tempo  $t = 0s$ . Para  $t \geq 0$ , é possível então modelar  $y(t)$  por meio de um sinal-modelo  $\bar{y}(t)$  que possui um valor constante  $h_{dc}$  (nível DC),  $M_{osc}$  modos oscilatórios e  $M - M_{osc}$  modos puramente exponenciais (onde  $M$  denota o número total de modos):

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & h_{dc} + \sum_{l=1}^{M_{osc}} A_l e^{\sigma_l t} \cos(\omega_l t + \varphi_l) \\ & + \sum_{l=M_{osc}+1}^M A_l e^{\sigma_l t}; \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $A_l$ ,  $\sigma_l$ ,  $\omega_l$  e  $\varphi_l$  são, respectivamente, a amplitude, a atenuação, a frequência (em rad/s) e a fase correspondentes ao  $l$ -ésimo modo. Define-se ainda  $\lambda_l = \sigma_l + j\omega_l$  para modos oscilatórios (ou seja, para  $l = 1, \dots, M_{osc}$ ), e  $\lambda_l = \sigma_l$  para modos puramente exponenciais (ou seja, para  $l = M_{osc} + 1, \dots, M$ ).

A partir da função impulso unitário  $\delta(t)$ , reescreve-se (1) conforme abaixo:

$$\bar{y}(t) = h_{dc} + \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{\rho - p_i} \delta(t), \quad (2)$$

onde

$$p_i = \begin{cases} \lambda_{\frac{i+1}{2}} & , \quad i = 1, 3, \dots, 2M_{osc} - 1 \\ (p_{i-1})^* & , \quad i = 2, 4, \dots, 2M_{osc} \\ \lambda_{i-M_{osc}} & , \quad i = 2M_{osc} + 1, 2M_{osc} + 2, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

$$r_i = \begin{cases} \frac{1}{2} A_{\frac{i+1}{2}} e^{j\varphi_{\frac{i+1}{2}}} & , \quad i = 1, 3, \dots, 2M_{osc} - 1 \\ (r_{i-1})^* & , \quad i = 2, 4, \dots, 2M_{osc} \\ A_{i-M_{osc}} & , \quad i = 2M_{osc} + 1, 2M_{osc} + 2, \dots, N \end{cases} \quad (4)$$

com  $N = M + M_{osc}$ , e onde  $(\cdot)^*$  denota o operador conjugado. É importante observar que, por meio de (3) e (4), os parâmetros modais em (1) encontram-se diretamente relacionados com os resíduos  $\{r_i\}$  e polos  $\{p_i\}$  das frações parciais em (2). Ressalta-se ainda que  $\rho$  denota o operador de diferenciação que faz qualquer produto  $G(\rho)x(t)$  (sendo  $G$  e  $x$  funções genéricas) satisfazer

$$G(\rho)x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)X(s)\} \quad (5)$$

sendo  $X(s)$  a transformada de Laplace de  $x(t)$ , enquanto  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  denota a transformada inversa de Laplace.

Assim, com base num conjunto de  $K$  amostras  $\{y(kT)\}$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$ , onde  $T$  denota o intervalo de amostragem, é possível modelar o sinal transitório  $y(t)$  a partir do sinal-modelo  $\bar{y}(t)$  em (2) estimando-se seus parâmetros  $h_{dc}$ ,  $r_i$  e  $p_i$ , por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\gamma} \sum_{k=0}^{K-1} (y(kT) - \bar{y}(kT))^2 \\ & = \arg \min_{\gamma} \sum_{k=0}^{K-1} \left( y(kT) - \left( h_{dc} + \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{\rho - p_i} \delta(kT) \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $\gamma$  é o vetor de parâmetros

$$\gamma = [ h_{dc} \quad r_1 \quad \dots \quad r_N \quad p_1 \quad \dots \quad p_N ]^T, \quad (7)$$

sendo  $(\cdot)^T$  o operador transposto.

Estimar  $\gamma$  via (6) constitui um problema de otimização não-linear nos parâmetros, uma vez que os polos  $\{p_i\}$  aparecem no denominador do sinal-modelo  $\bar{y}(kT)$ .

Abordagens VF de fato estimam um conjunto  $\{p_i\}$  por meio estruturas sinal-modelo alternativas. Seja  $\{\bar{p}_i\}$  um conjunto pré-especificado de polos e definindo-se as duas seguintes funções de transferência auxiliares

$$\frac{B(\rho)}{\hat{F}(\rho)} = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\rho - \bar{p}_i}, \quad (8)$$

$$\frac{F(\rho)}{\hat{F}(\rho)} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\rho - \bar{p}_i}, \quad (9)$$

a seguinte estrutura sinal-modelo alternativa pode ser construída:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= h_{\text{dc}} + \frac{B(\rho)}{F(\rho)}\delta(t) \\ &= h_{\text{dc}} + \frac{\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\rho - \bar{p}_i}}{1 + \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\rho - \bar{p}_i}}\delta(t)\end{aligned}\quad (10)$$

Definindo-se então o vetor de parâmetros

$$\theta = [h_{\text{dc}} \quad c_1 \quad \cdots \quad c_N \quad d_1 \quad \cdots \quad d_N]^T \quad (11)$$

a seguinte função objetivo alternativa pode ser definida:

$$J(\theta) = \sum_{k=0}^{K-1} e^2(kT) \quad (12)$$

onde  $e(kT)$  representa o sinal de erro

$$e(kT) = y(kT) - \hat{y}(kT) \quad (13)$$

que, baseando-se em (10), pode ser reescrito conforme segue

$$e(kT) = \frac{F(\rho)}{F(\rho)}y(kT) - \left( h_{\text{dc}} + \frac{B(\rho)}{F(\rho)}\delta(kT) \right). \quad (14)$$

Realiza-se então a aproximação  $e(kT) \approx \tilde{e}(kT)$ , onde

$$\begin{aligned}\tilde{e}(kT) &= \frac{F(\rho)}{\hat{F}(\rho)}y(kT) - \left( h_{\text{dc}} + \frac{B(\rho)}{\hat{F}(\rho)}\delta(kT) \right) \\ &= \left( 1 + \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{\rho - \bar{p}_i} \right) y(kT) \\ &\quad - \left( h_{\text{dc}} + \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\rho - \bar{p}_i} \delta(kT) \right)\end{aligned}\quad (15)$$

ou, ainda, equivalentemente,

$$\tilde{e}(kT) = y(kT) - \mathbf{m}^T(kT)\theta \quad (16)$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(kT) &= \left[ 1 \quad \tilde{\mathbf{u}}^T(kT) \quad -\tilde{\mathbf{y}}^T(kT) \right]^T; \\ \tilde{\mathbf{y}}(kT) &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \rho - \bar{p}_1 & \cdots & \rho - \bar{p}_N \end{bmatrix}^T y(kT); \\ \tilde{\mathbf{u}}(kT) &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \rho - \bar{p}_1 & \cdots & \rho - \bar{p}_N \end{bmatrix}^T \delta(kT)\end{aligned}\quad (17)$$

Por meio desta aproximação para  $e(kT)$ , o problema de minimização da função objetivo não-linear  $J(\theta)$  torna-se *linear* nos parâmetros em  $\theta$ , sendo sua solução conhecida e dada por:

$$\hat{\theta} = [\mathbf{M}^T \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{y}, \quad (18)$$

onde  $\hat{\theta}$  é uma estimativa para o mínimo global de  $J(\theta)$ ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} & -\tilde{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{y} = [y[0] \quad \cdots \quad y[K-1]]^T \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{\mathbf{y}}[0] \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{y}}[K-1]]^T \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \tilde{\mathbf{u}}[0] & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}[K-1] \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Neste artigo, escreve-se  $x[k] = x(kT)$  para simplificar a notação.

Uma vez que  $\hat{\theta}$  é obtido via (18), busca-se tornar próximo o erro aproximado  $\tilde{e}(kT)$  em (15) do erro original  $e(kT)$  em (14) considerando-se que o polinômio obtido  $F(\rho)$  é uma estimativa mais refinada para o polinômio  $\hat{F}(\rho)$ . Isso pode ser facilmente realizado fazendo com que as raízes destes dois polinômios sejam iguais, isto é, consideram as raízes do polinômio  $F(\rho)$  como uma estimativa refinada para o conjunto pré-especificado de polos  $\{\bar{p}_i\}$ . De fato, este procedimento que consiste em especificar  $\{\bar{p}_i\}$  como as raízes estimadas para  $F(\rho)$  pode ser repetido (iterado) até que  $\hat{\theta}$  e  $\{\bar{p}_i\}$  convirjam para valores fixos  $\hat{\theta}'$  e  $\{\bar{p}'_i\}$ . Quando a convergência ocorre, naturalmente obtém-se  $F'(\rho) = \hat{F}'(\rho)$ , onde  $F'(\rho)$  e  $\hat{F}'(\rho)$  denotam os valores obtidos para os polinômios  $F(\rho)$  e  $\hat{F}(\rho)$  quando  $\{\bar{p}_i\} = \{\bar{p}'_i\}$  e  $\hat{\theta} = \hat{\theta}'$ . Consequentemente, o sinal-modelo  $\hat{y}(t)$  obtido na convergência se transforma em um sinal com a estrutura desejada em (2):

$$\begin{aligned}\hat{y}'(t) &= h'_{\text{dc}} + \frac{B'(\rho)}{F'(\rho)}\delta(t) \\ &= h'_{\text{dc}} + \frac{B'(\rho)}{\hat{F}'(\rho)}\delta(t) \\ &= h'_{\text{dc}} + \sum_{i=1}^N \frac{c'_i}{\rho - \bar{p}'_i}\delta(t)\end{aligned}\quad (23)$$

A expressão em (23) revela que  $h'_{\text{dc}}$ ,  $c'_1, \dots, c'_N$  e  $\bar{p}'_1, \dots, \bar{p}'_N$  representam as estimativas finais obtidas para  $h_{\text{dc}}$ ,  $r'_1, \dots, r'_N$  e  $p'_1, \dots, p'_N$ , sendo que os coeficientes  $\{d_i\}$  não possuem efeito no sinal-modelo resultante  $\hat{y}'(t)$ .

## 2.1 Passo a passo para implementar RTD-VF

**Passo 1.** Seja  $y(t)$  um sinal transitório de um sistema de potência. Dado um conjunto de  $K$  amostras  $\{y(kT)\}$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ , definir o número de iterações e um conjunto de polos iniciais  $\{\bar{p}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

*Comentário:* Grivet-Talocia and Gustavsen (2016) recomendam que os polos iniciais sejam escolhidos como sendo pares complexos conjugados fracamente atenuados (com  $\Re(\bar{p}_i) = -0.01 \times$

$|\Im(\bar{p}_i)|$ , por exemplo), com partes imaginárias linearmente distribuídas em uma determinada banda de frequências de interesse  $[0, \omega_{\max}]$ . Uma vez que modos eletromecânicos em sistemas de potência usualmente têm partes imaginárias com valores menores que 3 Hz, pode-se simplesmente definir  $\omega_{\max} = 2\pi \times 3$ .

**Passo 2.** Construir as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{y}$  com base nas equações (19)–(22). Os vetores  $\tilde{\mathbf{y}}[k]$  e  $\tilde{\mathbf{u}}[k]$  podem ser facilmente obtidos para as amostras  $k = 1, \dots, K-1$  usando-se recursivamente as seguintes discretizações no espaço de estados (Schumacher et al., 2018; Chen, 1999):

$$\tilde{\mathbf{y}}[k] \approx \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{y}}[k-1] + \mathbf{B}_d \mathbf{y}[k-1], \quad \tilde{\mathbf{y}}[0] = \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}[k] \approx \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{u}}[k-1], \quad \tilde{\mathbf{u}}[0] = \mathbf{B} \quad (25)$$

onde

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}; \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B}; \quad (26)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{p}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{p}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (27)$$

e  $\mathbf{I}$  denota a matriz identidade de dimensão  $N \times N$ .

*Comentário:* Conforme mostrado em (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016), é possível transformar o par de matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  em (27) de tal forma a garantir que os resíduos  $c_i$  e  $c_{i+1}$  são estimados em pares complexos conjugados perfeitos ( $c_{i+1} = c_i^*$ ) sempre que  $\bar{p}_{i+1} = \bar{p}_i^*$ .

**Passo 3.** Via (18), obter a solução mínima quadrática para o vetor  $\theta$ .

*Comentário:* Durante as iterações, pode-se observar o desempenho da estimativa atual para os polos  $\{\bar{p}_i\}$  na estrutura sinal-modelo  $\bar{y}(t)$  em (2). Para tanto, seus coeficientes  $h_{dc}$  e  $\{r_i\}$  podem ser facilmente estimados via (18) simplesmente redefinindo-se  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{U}}$ . Neste contexto, a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) associada ao sinal  $\bar{y}(t)$  é uma importante métrica a ser observada e é definida conforme segue:

$$\text{REQM} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y(kT) - \bar{y}(kT)|^2}. \quad (28)$$

**Passo 4.** Atualizar os valores de  $\{\bar{p}_i\}$  com as raízes do polinômio  $F(\rho)$ .

*Comentário:* Uma vez que as raízes do polinômio  $F(\rho)$  são iguais aos zeros da função de transferência  $F(\rho)/\hat{F}(\rho)$ , pode-se simplesmente atualizar  $\{\bar{p}_i\}$  calculando-se os autovalores da matriz

$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})$  (veja (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016) para uma prova), com  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  sendo a realização em espaço de estados para  $F(\rho)/\hat{F}(\rho)$  na qual  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  satisfazem (27) e

$$\mathbf{C} = [d_1 \quad \cdots \quad d_n]; \quad \mathbf{D} = 1. \quad (29)$$

Como uma prática usual em implementações VF (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016), a estabilidade do modelo pode ser assegurada invertendo-se os sinais dos polos com partes reais positivas (se isso ocorrer enquanto faz-se  $\{\bar{p}_i\} \leftarrow \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})$ ).

**Passo 5.** Repetir os passos de 2 a 4 até que o número de iterações estabelecido seja atingido.

*Comentário:* Ao invés de considerar o conjunto  $\{\bar{p}_i\}$  obtido na última iteração (ou na convergência) como a estimativa final para os polos originais  $\{p_i\}$ , pode-se alternativamente considerar que a ‘melhor’ estimativa para esses polos é aquela que apresenta o menor REQM para o sinal-modelo  $\bar{y}(t)$ .

**Passo 6.** As componentes modais resultantes do sinal *ringdown* estimado  $\bar{y}(t)$  são obtidas através das relações em (3) e (4).

### 3 IV-RTD-VF

Abordagens VF são extremamente populares por geralmente encontrarem estimativas satisfatórias para polos de funções de transferência (Grivet-Talocia and Gustavsen, 2016).

Entretanto, apesar de extremamente populares, sabe-se que abordagens VF padrões, como aquela que consiste em resolver (18) iterativamente, não garantem que suas soluções convergidas são ótimos locais ou globais de suas funções objetivo correspondentes.

De fato, é possível verificar através de exemplos bastante simples que, no caso do método RTD-VF padrão proposto na seção anterior,  $\hat{\theta}'$  pode não satisfazer a condição necessária e suficiente de otimalidade local/global:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}'} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

Um desses exemplos é discutido na seção de resultados deste artigo. Nesta seção, propõe-se um método IV alternativo para se estimar os parâmetros do sinal-modelo  $\bar{y}(t)$ . A proposta se mostra capaz de obter soluções que de fato satisfazem (30).

Com base nas equações (10)–(13), pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) = -2 \sum_{k=0}^{K-1} \begin{bmatrix} \mathbf{i}(kT) \\ \mathbf{i}'(kT) \end{bmatrix} e(kT) \quad (31)$$

onde  $\mathbf{i}(kT)$  e  $\mathbf{i}'(kT)$  são os seguintes vetores de instrumentos:

$$\mathbf{i}(kT) = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial h_{dc}} & \frac{\partial}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial c_N} \end{array} \right]^T \hat{y}(kT) \quad (32)$$

$$\mathbf{i}'(kT) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial d_N} \end{array} \right]^T \hat{y}(kT) \quad (33)$$

Similarmente à linearização feita para o método RTD-VF padrão, pode-se transformar a condição de otimalidade local/global  $\frac{\partial J}{\partial \theta} = \mathbf{0}$  no novo problema aproximado:

$$\sum_{k=0}^{K-1} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{i}(kT) \\ \mathbf{i}'(kT) \end{array} \right] \tilde{e}(kT) = \mathbf{0} \quad (34)$$

ou, ainda, equivalentemente,

$$\Psi^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}\hat{\theta}_{IV}) = \mathbf{0} \quad (35)$$

sendo

$$\Psi = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{i}[0] & \cdots & \mathbf{i}[K-1] \\ \mathbf{i}'[0] & \cdots & \mathbf{i}'[K-1] \end{array} \right]^T \quad (36)$$

Finalmente, isolando-se o vetor de coeficientes  $\hat{\theta}_{IV}$  em (36), segue que o método IV-RTD-VF proposto neste artigo consiste em resolver a equação (37) iterativamente.

$$\hat{\theta}_{IV} = [\Psi^T \mathbf{M}]^{-1} \Psi^T \mathbf{y}, \quad (37)$$

### 3.1 Uma aproximação dos vetores de instrumentos

Com base nas equações (8)–(11), (32) e (33), tem-se

$$\mathbf{i}(kT) = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{\hat{F}(\rho)}{F(\rho)} \tilde{\mathbf{u}}(kT) \end{array} \right], \quad (38)$$

$$\mathbf{i}'(kT) = - \left( \frac{\hat{F}(\rho)}{F(\rho)} \right)^2 \tilde{\mathbf{y}}'(kT), \quad (39)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{y}}'(kT) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\rho - \bar{p}_1} & \cdots & \frac{1}{\rho - \bar{p}_N} \end{array} \right]^T y'(kT), \quad (40)$$

$$y'(kT) = [c_1 \cdots c_N] \tilde{\mathbf{u}}(kT) \quad (41)$$

A seguir, descreve-se as dificuldades encontradas ao se computar os instrumentos  $\mathbf{i}(kT)$  e  $\mathbf{i}'(kT)$  através das equações (38)–(41).

As equações (9) e (41) claramente mostram que  $\mathbf{i}(kT)$  e  $\mathbf{i}'(kT)$  (e por consequência, a matriz  $\Psi$ ) são funções dos coeficientes  $\{d_i\}$  e  $\{c_i\}$ , que são

estimados por meio do vetor  $\hat{\theta}_{IV}$  em (37). Isso significa que (37) não pode ser usada para se encontrar  $\hat{\theta}_{IV}$  diretamente, uma vez que o lado direito desta equação é também função de  $\hat{\theta}_{IV}$ .

Computar  $\mathbf{i}(kT)$  e  $\mathbf{i}'(kT)$  baseando-se nos valores encontrados para  $\{d_i\}$  e  $\{c_i\}$  durante a iteração imediatamente anterior do algoritmo de fato torna possível o uso de (37) para se encontrar  $\hat{\theta}_{IV}$ . Por outro lado, entretanto, valores inconvenientes para  $\{d_i\}$  fazem as raízes do polinômio  $F(\rho)$  se tornar polos instáveis em (38) e (39). Para lidar com este problema, pode-se assumir que, durante o processo de construção da matriz  $\Psi$ , as aproximações  $\mathbf{i}(kT) \approx \tilde{\mathbf{i}}(kT)$  e  $\mathbf{i}'(kT) \approx \tilde{\mathbf{i}}'(kT)$  são válidas, onde

$$\tilde{\mathbf{i}}(kT) = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \tilde{\mathbf{u}}(kT) \end{array} \right]; \quad \tilde{\mathbf{i}}'(kT) = -\tilde{\mathbf{y}}'(kT). \quad (42)$$

Na equação acima, assume-se que cada  $k$ -ésimo vetor  $\tilde{\mathbf{y}}'(kT)$  é construído com base nos coeficientes  $\{c_i\}$  obtidos na iteração anterior do algoritmo.  $\Psi$  pode então ser aproximada conforme segue

$$\Psi \approx \left[ \begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{U}} & -\tilde{\mathbf{Y}}' \end{array} \right], \quad (43)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{Y}}' = [ \tilde{\mathbf{y}}'[0] \cdots \tilde{\mathbf{y}}'[K-1] ]^T. \quad (44)$$

Uma comparação entre as equações (17) e (24) revela que  $\tilde{\mathbf{y}}'[k]$  pode ser recursivamente obtido para  $k = 1, \dots, K-1$  a partir da discretização:

$$\tilde{\mathbf{y}}'[k] \approx \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{y}}'[k-1] + \mathbf{B}_d y'[k-1], \quad \tilde{\mathbf{y}}'[0] = \mathbf{0} \quad (45)$$

### 3.2 Passo a passo para implementar IV-RTD-VF

O mesmo passo a passo utilizado para implementar o método RTD-VF padrão (Seção 2.1) pode ser utilizado para implementar a versão IV do algoritmo. Para tanto, é necessário resolver (37) ao invés de (18) durante o **Passo 3**, aproximando-se a matriz  $\Psi$  conforme mostra a equação (43). Devido a necessidade de se calcular os vetores  $\tilde{\mathbf{y}}'(kT)$  com base nos coeficientes  $\{c_i\}$  obtidos na iteração anterior do algoritmo, tal aproximação da matriz  $\Psi$  faz com que IV-RTD-VF dependa de uma estimativa inicial para tais coeficientes. Em geral, uma estimativa inicial satisfatória para  $\{c_i\}$  pode ser obtida rodando-se o método RTD-VF padrão em (18) durante um número específico de iterações, migrando-se então para a técnica IV-RTD-VF com as estimativas obtidas para estes coeficientes.

## 4 Resultados Numéricos

### 4.1 Desconexão da Usina Hidrelétrica de Itaipu

A Usina Hidrelétrica de Itaipu foi desconectada do resto do sistema interconectado brasileiro (SIB) no dia 02 de setembro de 2011, às 19h43m40.3s UTC, devido à explosão de uma bucha elétrica (Jeremias et al., 2012; ONS, 2011). A Itaipu foi reconectada ao SIB 27m49.7s depois (ONS, 2011). Tanto a desconexão como a reconexão fizeram variáveis elétricas do sistema oscilar. Oscilações na frequência da rede foram medidas usando um medidor de frequência de rede localizado na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), com um intervalo de amostragem de  $T = (1/60)$ s. A Figura 1 mostra um transitório com  $K = 901$  amostras registrado durante o religamento da Itaipu.

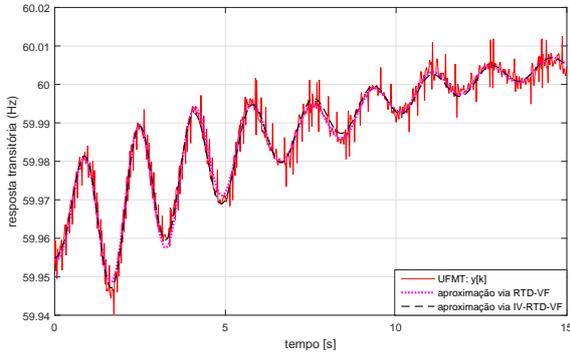


Figura 1: Transitório no SIB – Medição na UFMT.

A Figura 1 também mostra as curvas estimadas resultantes obtidas por meio das técnicas RTD-VF padrão e IV-RTD-VF (considerando  $N = 7$ ), enquanto a Figura 2 mostra os REQMs dos modelos durante as iterações. A Figura 2 revela a estratégia adotada para a inicialização do método IV-RTD-VF proposto: o método RTD-VF padrão é usado durante as primeiras 5 iterações para gerar uma estimativa inicial para a técnica IV-RTD-VF, que é então usada por mais 25 iterações para refinar as estimativas modais (diminuir o REQM do sinal-modelo). Embora ambas as técnicas sejam capazes de estimar satisfatoriamente o sinal medido na UFMT (veja a Figura 1), a Figura 2 revela que a técnica IV-RTD-VF apresenta um REQM menor após a convergência. Isso sugere que as estimativas modais obtidas via IV-RTD-VF estão, possivelmente, mais próximas dos parâmetros modais do SIB.

A Tabela 1 mostra ainda as estimativas modais resultantes. É importante ressaltar que as frequências observadas nesta Tabela 1 (especialmente para a técnica IV-RTD-VF) correspondem a valores típicos encontrados na literatura Brasileira (Jeremias et al., 2012) para oscilações entre as áreas Sul-Sudeste (geralmente em torno  $2\pi \times 0.70$  rad/s), Norte-Nordeste ( $2\pi \times 0.58$  rad/s) e Norte-Sul ( $2\pi \times 0.39$  rad/s).

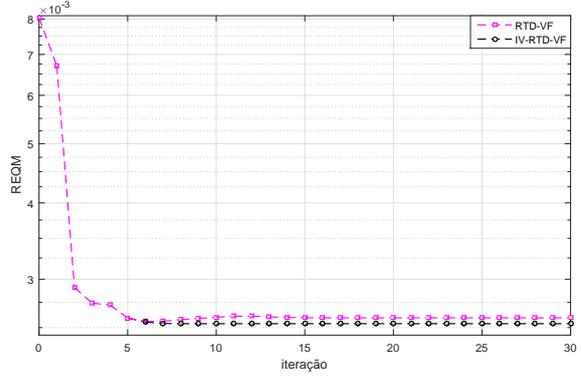


Figura 2: REQM obtido durante a modelagem do sinal medido na UFMT.

### 4.2 Sinal Teste Corrompido por Ruído Colorido

Neste segundo estudo de caso, mostra-se que o método IV-RTD-VF é capaz de prover performance superior em termos de REQM do modelo em comparação à técnica RTD-VF padrão, ainda que os dados de estimação encontrem-se corrompidos por ruído colorido, uma vez que ele garante uma solução ótima na convergência.

O sinal teste a ser identificado é composto por três modos e encontra-se definido na equação (46). Assim como em (Papadopoulos et al., 2016), tal sinal é discretizado a uma taxa de 100 amostras/s e assumindo um tempo total de observação de 30s.

$$y_0(t) = \underbrace{1.00 \times e^{-0.1697t} \cos(1.4351t - 2.5133)}_{\text{modo \#1 } (l=1)} + \underbrace{1.32 \times e^{-0.8150t} \cos(3.9270t + 1.8850)}_{\text{modo \#2 } (l=2)} + \underbrace{1.13 \times e^{-1.8230t} \cos(6.4654t + 0.3142)}_{\text{modo \#3 } (l=3)}. \quad (46)$$

Definindo-se que  $n_0[k]$  é uma sequência de ruído Gaussiano branco aditivo de média zero e variância  $0.25^2$ , isto é,

$$n_0[k] \sim \mathcal{N}(0, 0.25^2), \quad (47)$$

pode-se considerar que cada amostra  $y[k]$  é dada conforme segue

$$y[k] = y_0[k] + n[k]; \quad n[k] = y_0[k]n_0[k], \quad (48)$$

tal que  $y[k]$  possui uma componente aditiva de ruído que é proporcional a sua amostra livre de ruído  $y_0[k]$ . Os dados resultantes de estimação são mostrados na Figura 3 (acima).

A Figura 4 mostra o REQM através das iterações para cada curva aproximada, considerando  $N = 6$  polos. A Figura 5 mostra uma visão ampliada em relação às últimas iterações da Figura 4. Similarmente ao primeiro exemplo, o método RTD-VF padrão é usado durante as primei-

Tabela 1: Estimativas modais encontradas para o sinal UFMT, no SIB.

method	$l$	$\sigma$ [s <sup>-1</sup> ]	$\omega$ [rad/s]	$A$ [Hz]	$\varphi$ [rad]
RTD-VF	1	-0.3955	4.3458	0.0164	1.1098
	2	-0.1602	3.6309	0.0221	-2.3709
	3	-0.1029	1.0664	0.0026	0.7986
	4	-0.0712	0	-0.0682	0
IV-RTD-VF	1	-0.4777	4.3502	0.0213	1.0261
	2	-0.1606	3.6151	0.0226	-2.2381
	3	-0.4183	2.4564	0.0072	-1.6767
	4	-0.0952	0	-0.0617	0

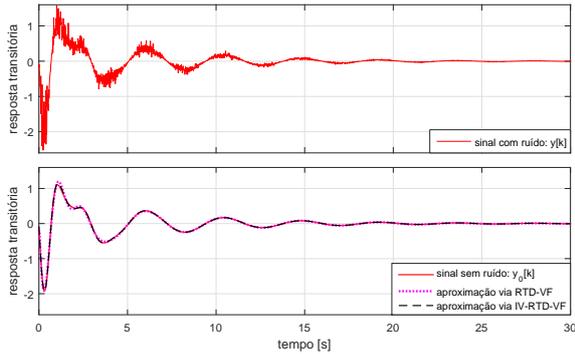


Figura 3: Sinal com ruído (acima) e comparação entre o sinal sem ruído  $y_0[k]$  e suas aproximações (abaixo).

ras 20 iterações para gerar uma estimativa inicial para técnica proposta (IV-RTD-VF). As Figuras 4 e 5 mostram que RTD-VF apresenta um REQM maior na convergência. Tal resultado está de acordo com a Figura 3 (abaixo), que mostra que RTD-VF apresenta uma maior compatibilidade em relação às amostras livres de ruído  $y_0[k]$  durante os primeiros transitórios.

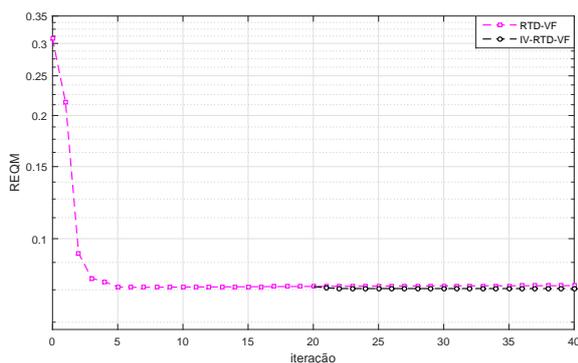


Figura 4: REQM obtido durante a modelagem do sinal corrompido por ruído.

Investiga-se agora os valores convergidos obtidos para as soluções  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\theta}_{IV}$  na iteração #40. A Tabela 2 mostra o gradiente associado à função objetivo não-linear  $J(\theta)$ . Pode-se considerar que a formulação IV de fato converge para um ótimo local da função  $J(\theta)$ , uma vez que suas de-

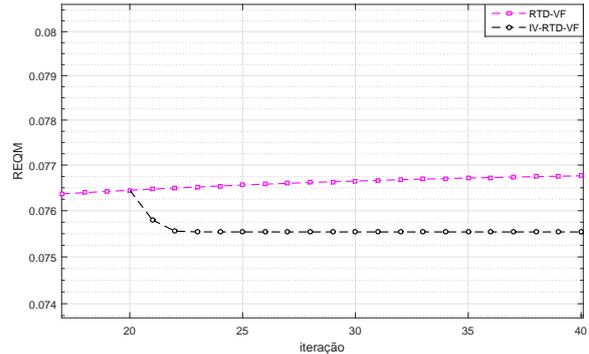


Figura 5: Últimas iterações da Figura 4 (visão ampliada).

rivadas parciais são todas próximas de zero. Enquanto isso, o método RTD-VF padrão não convergiu para nenhum ótimo local.

Os resultados obtidos neste estudo de caso variam para diferentes realizações do mesmo uma vez que  $n_0[k]$  é uma sequência aleatoriamente gerada. Por este motivo, repete-se o experimento descrito até agora considerando-se 1000 gerações diferentes para  $n_0[k]$ . Na Figura 6, as estimativas modais obtidas para essas 1000 gerações são representadas pelas funções densidade de probabilidade estimadas e normalizadas. Nesta figura, linhas verticais tracejadas representam os valores reais para os parâmetros modais do sinal teste  $y_0(t)$ , encontrado em (46). Estimativas concisas em torno dos modos reais são providos apenas pela técnica IV-RTD-VF. Por outro lado, RTD-VF apresenta enviesamentos para a maior parte das estimativas.

## 5 Conclusões

Dentro do contexto de estimação de modos oscilatórios em sistemas elétricos de potência a partir de eventos transitórios do tipo *ringdown*, o presente trabalho propôs a técnica IV-RTD-VF, que consiste em uma extensão IV do método RTD-VF padrão (Schumacher et al., 2018). Com base nos estudos de caso avaliados neste artigo, a versão IV se mostrou capaz de gerar estimativas modais mais precisas em relação ao método RTD-VF

Tabela 2: Gradiente da função objetivo não-linear  $J(\theta)$  na iteração #40.

	RTD-VF	IV-RTD-VF
$\partial J/\partial h_{dc}^{(1)}$	-2.844	$-0.214 \times 10^{-10}$
$\partial J/\partial c_1^{(1)}; \partial J/\partial c_2^{(1)}$	0.023; 0.110	$0.236 \times 10^{-10}; -0.163 \times 10^{-10}$
$\partial J/\partial c_3^{(1)}; \partial J/\partial c_4^{(1)}$	0.263; -0.259	$0.170 \times 10^{-10}; 0.453 \times 10^{-10}$
$\partial J/\partial c_5^{(1)}; \partial J/\partial c_6^{(1)}$	0.518; -0.178	$-0.090 \times 10^{-10}; 0.051 \times 10^{-10}$
$\partial J/\partial d_1; \partial J/\partial d_2$	0.007; 0.023	$-0.051 \times 10^{-10}; 0.137 \times 10^{-10}$
$\partial J/\partial d_3; \partial J/\partial d_4$	0.042; -0.106	$-0.286 \times 10^{-10}; 0.079 \times 10^{-10}$
$\partial J/\partial d_5; \partial J/\partial d_6$	0.043; -0.062	$-0.089 \times 10^{-10}; -0.007 \times 10^{-10}$

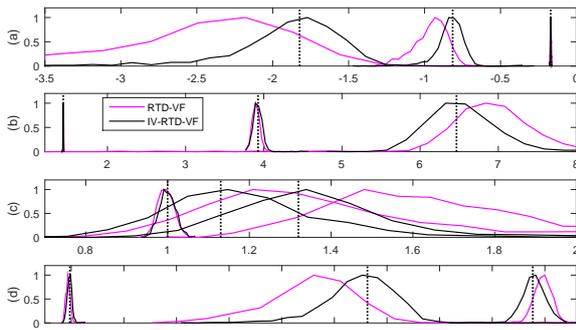


Figura 6: Funções de densidade de probabilidade estimadas e normalizadas para as (a) atenuações  $\sigma_l$ ; (b) frequências  $\omega_l$ ; (c) amplitudes  $A_l$ ; e (d) fases  $\varphi_l$ . Linhas verticais tracejadas representam os valores reais de  $\sigma_l$ ,  $\omega_l$ ,  $A_l$ ,  $\varphi_l$ , encontrados em (46).

padrão. Isso se deve pelo fato que, para diversos casos, IV-RTD-VF é capaz de garantir que as estimativas modais obtidas após a convergência do algoritmo representam um ótimo local (ou o próprio mínimo global) da função objetivo usada como critério de estimação dos parâmetros do modelo.

### Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pelo programa de pesquisa e desenvolvimento tecnológico da Companhia Paranaense de Energia (COPEL), através do projeto PD 2866-0470/2017, regulado pela ANEEL. Os autores deste trabalho agradecem também à CAPES e à Fundação Araucária pelo suporte financeiro. Finalmente, também agradecemos aos autores em (Jeremias et al., 2012) por compartilharem conosco os dados transitórios usados no estudo de caso da Seção 4.1.

### Referências

- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3 edn, Oxford University Press, New York.
- Crow, M. L. and Singh, A. (2005). The matrix pencil for power system modal extrac-

tion, *IEEE Transactions on Power Systems* **20**(1): 501–502.

Glickman, M., O’Shea, P. and Ledwich, G. (2007). Estimation of modal damping in power networks, *IEEE Transactions on Power Systems* **22**(3): 1340–1350.

Grivet-Talocia, S. and Gustavsen, B. (2016). *Passive Macromodeling: Theory and Applications*, John Wiley and Sons Inc., New Jersey.

Hauer, J. F., Demeure, C. J. and Scharf, L. L. (1990). Initial results in Prony analysis of power system response signals, *IEEE Transactions on Power Systems* **5**(1): 80–89.

Hwang, J. K. and Liu, Y. (2017). Identification of interarea modes from ringdown data by curve-fitting in the frequency domain, *IEEE Transactions on Power Systems* **32**(2): 842–851.

Jeremias, T., Zimmer, V., Decker, I. C., E Silva, A. S. and Agostini, M. N. (2012). Estudo de oscilações eletromecânicas no sistema elétrico brasileiro utilizando medidas fasoriais sincronizadas (“study of electromechanical oscillations in the brazilian electric system using phasor measurement units”), *XIX Congresso Brasileiro de Automatica*, pp. 2364–2371.

Kundur, P. (1994). *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, New York.

ONS (2011). Daily preliminary information of operation 02/02/2011. [Online]. Available in Portuguese: [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br).

Papadopoulos, T. A., Chrysochos, A. I., Kontis, E. O. and Papagiannis, G. K. (2016). Ring-down analysis of power systems using Vector Fitting, *Electric Power Systems Research* **141**: 100–103.

Schumacher, R., Oliveira, G. H. C. and Kuiava, R. (2018). A novel time-domain linear ringdown method based on vector fitting for estimating electromechanical modes, *Electric Power Systems Research* **160**: 300–307.