Busca do Equilíbrio de Nash para Jogos de Duopólio Não-Cooperativos via Controle Acionado por Evento ⋆

Roberto Luo * **Victor Hugo Pereira Rodrigues** * **Tiago Roux Oliveira** *
Miroslav Krstić ** **Tamer Başar** ***

* *Departamento de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro - RJ, Brasil. (e-mails: cai.roberto@graduacao.uerj.br, victor.rodrigues@uerj.br, tiagoroux@uerj.br)*
** *Departamento de Engenharia Mecânica e Aeroespacial, Universidade da Califórnia - San Diego (UCSD), La Jolla - CA, EUA. (e-mail: krstic@ucsd.edu)*
*** *Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade de Illinois em Urbana-Champaign, Urbana - IL, EUA. (e-mail: basar1@illinois.edu)*

Abstract: This paper proposes a novel approach for locally stable convergence to Nash equilibrium in duopoly noncooperative games based on a distributed event-triggered control scheme. The proposed approach employs extremum seeking, with sinusoidal perturbation signals applied to estimate the gradient of unknown quadratic payoff functions. This is the first instance of noncooperative games being tackled in a model-free fashion integrated with the event-triggered methodology. The stability analysis is carried out using time-scaling technique, Lyapunov's direct method and averaging theory for discontinuous systems. We quantify the size of the ultimate small residual sets around the Nash equilibrium and illustrate the theoretical results numerically on an example.

Resumo: Este artigo propõe uma abordagem inovadora para a convergência localmente estável ao equilíbrio de Nash em jogos de duopólio não cooperativos com base em um esquema de controle distribuído acionado por eventos. A abordagem proposta emprega busca extremal, com sinais de perturbação senoidais aplicados para estimar o gradiente de funções de pagamento quadráticas desconhecidas. A análise de estabilidade é realizada usando a técnica de escalonamento de tempo, o método direto de Lyapunov e a teoria de médias para sistemas descontínuos. Quantificamos o tamanho dos conjuntos residuais finais em torno do equilíbrio de Nash e ilustramos os resultados numericamente teóricos através de um exemplo.

Keywords: Extremum Seeking; Nash Equilibrium; Game Theory; Event-Triggered Control.
Palavras-chaves: Busca Extremal; Equilíbrio de Nash; Teoria dos Jogos; Controle Acionado por Evento.

1. INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos oferece um arcabouço conceitual para analisar interações sociais entre jogadores competitivos, empregando modelos matemáticos para compreender tomadas de decisões estratégicas (Fudenberg and Tirole, 1991; Başar and Zaccour, 2018a). Sua aplicação abrange diversas áreas, incluindo sistemas de engenharia, comportamentos biológicos e mercados financeiros, tornando-se uma ferramenta crucial em diversos campos (Han et al., 2019; Amina et al., 2013; Başar and Zaccour, 2018b).

Os jogos podem ser classificados como cooperativos e não cooperativos (Başar and Olsder, 1999). Jogos cooperativos envolvem jogadores formando acordos, enquanto jogos não-cooperativos se baseiam em ações unilaterais dos jogadores e na busca pelo equilíbrio de Nash (Nash, 1951). O equilíbrio de Nash, um conceito-chave na teoria dos jogos não-cooperativos, representa um estado no qual nenhum jogador pode melhorar unilateralmente seu próprio lucro (Başar and Olsder, 1999).

Esforços para alcançar a convergência ao equilíbrio de Nash estão em curso há décadas (Li and Başar, 1987; Başar, 1987), incluindo estudos sobre esquemas de atualização baseados em aprendizado (Zhu et al., 2013). Trabalhos recentes exploraram abordagens de busca extremal (ES) para o alcance em tempo real de equilíbrios de Nash em jogos não-cooperativos (Frihauf et al., 2012), possibilitando convergência estável sem necessidade de informações da função custo (Krstić and Wang, 2000) e com as ações dos jogadores sendo propagadas dinamicamente através de Equações Diferenciais Parciais (EDP) de calor e com atrasos (Oliveira et al., 2021b, 2020, 2021c,a). Assim como demonstrado em (Oliveira and Krstić, 2022), essa aborda-

⋆ Este projeto foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem as Agências Brasileiras de Financiamento: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológio (CNPq) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

gem poderia ser estendida para outras classes de equações diferenciais parciais.

Problemas práticos de engenharia, especialmente em redes, podem se beneficiar de abordagens teóricas de jogos, particularmente em alocação de recursos e otimização (Han et al., 2019; Amina et al., 2013; Alpcan and Başar, 2011). Combinar teoria dos jogos com arquiteturas acionadas por evento apresenta uma via promissora para otimização em tempo real de sistemas em rede, no entanto, a literatura carece de resultados da busca extremal nesse contexto (Mazo and Tabuada, 2011; Wang and Lemmon, 2011; Huo et al., 2024; Zhang et al., 2021). Felizmente, demos uma resposta positiva a essa pergunta em nosso trabalho anterior (Rodrigues et al., 2023) ao introduzirmos soluções para o problema de projetar algoritmos de busca extremal multivariáveis através estimativas baseadas em perturbação (baseadas em média) via Controle Acionado por Evento (ETC).

Este artigo estende os algoritmos de busca extremal para cenários de busca do equilíbrio de Nash (NES) em jogos não-cooperativos, empregando uma abordagem distribuída (ES-ETC). Apesar dos desafios impostos pelo controle descentralizado em jogos, nossa abordagem garante a convergência ao equilíbrio de Nash quando todos os jogadores utilizam algoritmos ES-ETC. Fornecemos uma análise teórica para jogos do tipo duopólio, valendo-nos das técnicas de escalonamento de tempo, função de Lyapunov e teoria da média para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Simulações numéricas ilustram a eficácia de nossa abordagem, demonstrando suas vantagens sobre métodos de controle via dados amostrados periodicamente (Khong et al., 2013; Hazeleger et al., 2022; Zhu et al., 2023).

2. JOGO DO TIPO DUOPÓLIO COM LUCROS QUADRÁTICOS: FORMULAÇÃO GERAL

Em um jogo de duopólio, o resultado ótimo para os jogadores P1 e P2, denotados por $y_1(t) \in \mathbb{R}$ e $y_2(t) \in \mathbb{R}$, respectivamente, não é determinado apenas por suas ações individuais ou estratégias de decisão, representadas por $\theta_1(t) \in \mathbb{R}$ e $\theta_2(t) \in \mathbb{R}$. Em vez disso, existe um conjunto de sinais de entrada $\theta^* = [\theta_1^*, \theta_2^*]^T \in \mathbb{R}^2$ onde a estratégia de cada jogador influencia de forma ótima as funções de lucro J_1 ou J_2 do outro jogador. Alcançar esse equilíbrio ótimo ($\theta(t) \equiv \theta^*$) define o equilíbrio de Nash (Fudenberg and Tirole, 1991).

Em particular, examinamos jogos de duopólio onde a função de lucro de cada jogador assume uma forma quadrática. Isso pode ser expresso como uma combinação estritamente côncava de suas ações:

$$\begin{aligned} J_1(\theta(t)) = {} & \frac{H_{11}^1}{2}\theta_1^2(t) + \frac{H_{22}^1}{2}\theta_2^2(t) + H_{12}^1\theta_1(t)\theta_2(t) \\ & + h_1^1\theta_1(t) + h_2^1\theta_2(t) + c_1, \qquad (1) \\ J_2(\theta(t)) = {} & \frac{H_{11}^2}{2}\theta_1^2(t) + \frac{H_{22}^2}{2}\theta_2^2(t) + H_{21}^2\theta_1(t)\theta_2(t) \\ & + h_1^2\theta_1(t) + h_2^2\theta_2(t) + c_2. \qquad (2) \end{aligned}$$

Aqui, $J_1(\theta), J_2(\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ representam as funções de lucro para os jogadores P1 e P2, respectivamente, enquanto $\theta_1(t), \theta_2(t) \in \mathbb{R}$ denotam as variáveis de decisão dos jogadores, e H_{jk}^i, h_j^i, $c_i \in \mathbb{R}$ são constantes, com $H_{ii}^i < 0$, para todos $i, j, k \in 1, 2$.

Para a completude, vamos definir a representação matemática do equilíbrio de Nash $\theta^* = [\theta_1^*, \theta_2^*]^T$ em um jogo de dois jogadores como

$$J_1(\theta_1^*, \theta_2^*) \geq J_1(\theta_1, \theta_2^*) \;\text{ e }\; J_2(\theta_1^*, \theta_2^*) \geq J_2(\theta_1^*, \theta_2). \qquad (3)$$

Assim, nenhum jogador tem incentivo para desviar independentemente de θ^*. No contexto do duopólio, θ_1 e θ_2 são elementos de $\mathbb{R}$, representando o conjunto dos números reais.

Para determinar a solução do equilíbrio de Nash em jogos quadráticos estritamente côncavos envolvendo dois jogadores, onde cada conjunto de ações é toda a linha real, deve-se diferenciar J_i em relação a $\theta_i(t), \forall i = 1, 2$, definindo as expressões resultantes iguais a zero e resolvendo o conjunto de equações assim obtido. Esse conjunto de equações, que também fornece uma condição suficiente devido à concavidade estrita, é

$$\begin{cases} H_{11}^1\theta_1^* + H_{12}^1\theta_2^* + h_1^1 = 0 \\ H_{21}^2\theta_1^* + H_{22}^2\theta_2^* + h_2^2 = 0 \end{cases}, \qquad (4)$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_1^1 & h_2^2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Definindo a matriz Hessiana H, e os vetores θ^* e h por

$$H := \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad \theta^* := \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix}, \quad h := \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^2 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

existe um único Equilíbrio de Nash em $\theta^* = -H^{-1}h$, se H é invertível:

$$\begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^2 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Para mais detalhes, consulte (Başar and Olsder, 1999, Capítulo 4).

2.1 Busca Extremal em Tempo Contínuo

O principal objetivo deste artigo é desenvolver políticas de controle distribuído acionadas por eventos para a busca do equilíbrio de Nash em jogos de duopólio não-cooperativos. Ao longo de nossa análise, assume-se que $H_{ii}^i < 0$ para ambos os i (uma consequência natural da concavidade estrita), a matriz H em (6) tem posto completo e todos os parâmetros são desconhecidos.

O diagrama esquemático mostrado na Fig. 1 fornece uma visão geral da política NES proposta para cada jogador, detalhando suas respectivas saídas da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_1(t) &= J_1(\theta(t)), \\ y_2(t) &= J_2(\theta(t)). \end{cases} \qquad (8)$$

Os sinais de sondagem são:

$$\begin{cases} S_1(t) &= a_1 \sin(\omega_1 t) \\ S_2(t) &= a_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}, \qquad (9)$$

e os sinais de demodulação são representados por

$$\begin{cases} M_1(t) &= \dfrac{2}{a_1}\sin(\omega_1 t) \\ M_2(t) &= \dfrac{2}{a_2}\sin(\omega_2 t) \end{cases}, \qquad (10)$$

tendo amplitudes constantes não nulas a_1 e a_2, ambas maiores que zero, e frequências ω_1 e ω_2, satisfazendo $\omega_1 \neq \omega_2$. Essas frequências de excitação aditiva ω_i podem ser escolhidas como

$$\omega_i = \omega_i' \omega = \mathscr{O}(\omega) \quad i = 1 \text{ ou } 2, \qquad (11)$$

onde ω representa uma constante positiva e ω_i' é um número racional. Uma seleção potencial é detalhada em (Ghaffari et al., 2012).

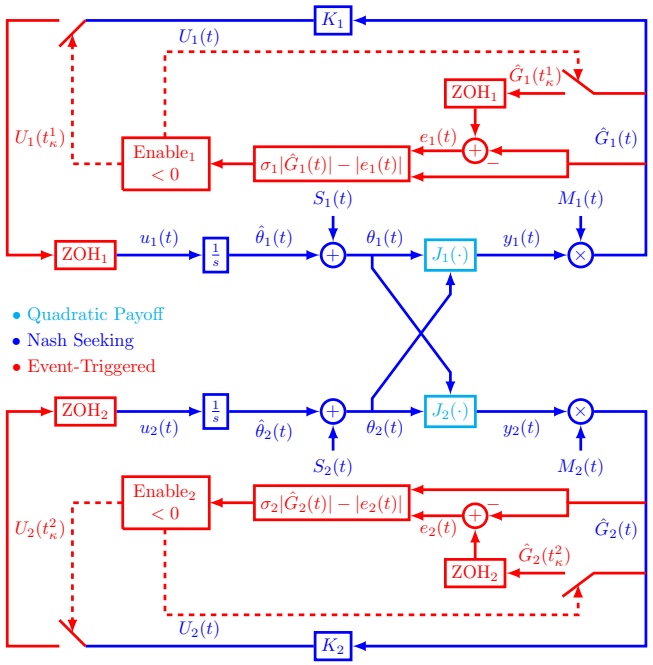


Figura 1. Diagrama de blocos ilustrando a busca do equilíbrio de Nash acionada por eventos.

Se denotarmos $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ como as estimativas de θ_1^* e θ_2^*, respectivamente, podemos definir o "erro de estimação" da seguinte forma:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1(t) = \hat{\theta}_1(t) - \theta_1^* \\ \tilde{\theta}_2(t) = \hat{\theta}_2(t) - \theta_2^* \end{cases} . \tag{12}$$

A estimativa do gradiente

$$\begin{cases} \hat{G}_1(t) & = M_1(t)y_1(t) \\ \hat{G}_2(t) & = M_2(t)y_2(t) \end{cases} , \tag{13}$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(t) = {} & H_{11}^1\theta_1^* + H_{12}^1\theta_2^* + h_1^1 \\ & + \mathscr{H}_{11}(t)\tilde{\theta}_1(t) + \mathscr{H}_{12}(t)\tilde{\theta}_2(t) \\ & + \frac{H_{11}^1}{a_1}\sin(\omega_1 t)\tilde{\theta}_1^2(t) + \frac{H_{22}^1}{a_1}\sin(\omega_1 t)\tilde{\theta}_2^2(t) \\ & + \frac{2H_{12}^1}{a_1}\sin(\omega_1 t)\tilde{\theta}_1(t)\tilde{\theta}_2(t) + \delta_1(t), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_2(t) = {} & H_{21}^2\theta_1^* + H_{22}^2\theta_2^* + h_2^2 \\ & + \mathscr{H}_{21}(t)\tilde{\theta}_1(t) + \mathscr{H}_{22}(t)\tilde{\theta}_2(t) \\ & + \frac{H_{11}^2}{a_2}\sin(\omega_2 t)\tilde{\theta}_1^2(t) + \frac{H_{22}^2}{a_2}\sin(\omega_2 t)\tilde{\theta}_2^2(t) \\ & + \frac{2H_{21}^2}{a_2}\sin(\omega_2 t)\tilde{\theta}_1(t)\tilde{\theta}_2(t) + \delta_2(t), \end{aligned} \tag{15}$$

com parâmetros variáveis no tempo dados por

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{11}(t) = {} & H_{11}^1 - H_{11}^1\cos(2\omega_1 t) \\ & + \frac{2h_1^1}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{2H_{11}^1\theta_1^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) \\ & + \frac{H_{12}^1 a_2}{a_1}\cos[(\omega_1+\omega_2)t] \\ & + \frac{2H_{12}^1\theta_2^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{H_{12}^1 a_2}{a_1}\cos[(\omega_1-\omega_2)t], \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{12}(t) = {} & H_{12}^1 - H_{12}^1\cos(2\omega_1 t) \\ & + \frac{2h_2^1}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{2H_{12}^1\theta_1^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) \\ & + \frac{2H_{22}^1\theta_2^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{H_{22}^1 a_2}{a_1}\cos[(\omega_1-\omega_2)t] \\ & + \frac{H_{22}^1 a_2}{a_1}\cos[(\omega_1+\omega_2)t], \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{21}(t) = {} & H_{21}^2 - H_{21}^2\cos(2\omega_2 t) \\ & + \frac{2h_1^2}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{2H_{21}^2\theta_1^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) \\ & + \frac{2H_{22}^2\theta_2^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{H_{22}^2 a_1}{a_2}\cos[(\omega_2-\omega_1)t] \\ & + \frac{H_{22}^2 a_1}{a_2}\cos[(\omega_2+\omega_1)t], \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{22}(t) = {} & H_{22}^2 - H_{22}^2\cos(2\omega_2 t) \\ & + \frac{2h_2^2}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{2H_{22}^2\theta_2^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) \\ & + \frac{H_{21}^2 a_1}{a_2}\cos[(\omega_2+\omega_1)t] \\ & + \frac{2H_{21}^2\theta_1^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{H_{21}^2 a_1}{a_2}\cos[(\omega_2-\omega_1)t], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \delta_1(t) = {} & \frac{H_{11}^1 a_1}{2}\sin(\omega_1 t) + \frac{H_{11}^1 a_1}{4}\cos(\omega_1 t) + \frac{H_{11}^1 a_1}{4}\cos(3\omega_1 t) \\ & + \frac{H_{22}^1 a_2^2}{2a_1}\sin(\omega_1 t) - \frac{H_{22}^1 a_2^2}{2a_1}\cos[(\omega_1-2\omega_2)t] \\ & + \frac{H_{22}^1 a_2^2}{2a_1}\cos[(\omega_1+2\omega_2)t] + \frac{2H_{12}^1\theta_1^*\theta_2^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) \\ & - h_1^1\cos(2\omega_1 t) \\ & + \frac{a_2 h_2^1}{a_1}\cos[(\omega_1-\omega_2)t] + \frac{a_2 h_2^1}{a_1}\cos[(\omega_1+\omega_2)t] \\ & - H_{11}^1\theta_1^*\cos(2\omega_1 t) \\ & + \frac{H_{12}^1 a_2\theta_1^*}{a_1}\cos[(\omega_1-\omega_2)t] + \frac{H_{12}^1 a_2\theta_1^*}{a_1}\cos[(\omega_1+\omega_2)t] \\ & - H_{12}^1\theta_2^*\cos(2\omega_1 t) \\ & + \frac{H_{22}^1 a_2\theta_2^*}{a_1}\cos[(\omega_1-\omega_2)t] - \frac{H_{22}^1 a_2\theta_2^*}{a_1}\cos[(\omega_1+\omega_2)t] \\ & + \frac{2c_1}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{2h_1^1\theta_1^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{2h_2^1\theta_2^*}{a_1}\sin(\omega_1 t) \\ & + \frac{H_{11}^1\theta_1^{*2}}{a_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{H_{22}^1\theta_2^{*2}}{a_1}\sin(\omega_1 t) \\ & + \frac{H_{12}^1 a_2}{2}\cos(\omega_2 t) - \frac{H_{12}^1 a_2}{2}\cos[(2\omega_1-\omega_2)t] \\ & + \frac{H_{12}^1 a_2}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{H_{12}^1 a_2}{2}\cos[(2\omega_1+\omega_2)t], \end{aligned} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2(t) = {} & \frac{H_{11}^2 a_2}{2}\sin(\omega_2 t) + \frac{H_{11}^2 a_2}{4}\cos(\omega_2 t) + \frac{H_{11}^2 a_2}{4}\cos(3\omega_2 t) \\
& + \frac{H_{22}^2 a_2}{2}\sin(\omega_2 t) - \frac{H_{22}^2 a_2}{2}\cos[(\omega_2 - 2\omega_1)t] \\
& + \frac{H_{22}^2 a_2}{2}\cos[(\omega_2 + 2\omega_1)t] + \frac{2H_{21}^2\theta_1^*\theta_2^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) \\
& - h_2^2\cos(2\omega_2 t) \\
& + h_2^1\cos[(\omega_2 - \omega_1)t] + \frac{h_2^2}{a_2}\cos[(\omega_1 + \omega_2)t] \\
& - H_{11}^2\theta_1^*\cos(2\omega_2 t) \\
& + \frac{H_{21}^2 a_2\theta_1^*}{a_1}\cos[(\omega_2 - \omega_1)t] + H_{21}^2\theta_1^*\cos[(\omega_1 + \omega_2)t] \\
& - H_{21}^2\theta_2^*\cos(2\omega_2 t) \\
& + \frac{H_{22}^2 a_1\theta_2^*}{a_2}\cos[(\omega_2 - \omega_1)t] - \frac{H_{22}^2 a_1\theta_2^*}{a_2}\cos[(\omega_2 + \omega_1)t] \\
& + \frac{2c_2}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{2h_1^2\theta_1^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{2h_2^2\theta_2^*}{a_2}\sin(\omega_2 t) \\
& + \frac{H_{11}^2\theta_1^{*2}}{a_2}\sin(\omega_2 t) + \frac{H_{22}^2\theta_2^{*2}}{a_2}\sin(\omega_2 t) \\
& + \frac{H_{21}^2 a_1}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{H_{21}^2 a_1}{2}\cos[(2\omega_2 - \omega_1)t] \\
& + \frac{H_{21}^2 a_1}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{H_{21}^2 a_1}{2}\cos[(2\omega_2 + \omega_1)t]\,. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Vale ressaltar que os termos quadráticos em (14) e (15) podem ser ignorados em uma análise local (Krstić, 2014). Além disso, a partir de (4), $H_{11}^1\theta_1^* + H_{12}^1\theta_2^* + h_1^1 = 0$ e $H_{21}^2\theta_1^* + H_{22}^2\theta_2^* + h_2^2 = 0$. Portanto, a estimativa do gradiente é expressa localmente como

$$\hat{G}_1(t) = \mathscr{H}_{11}(t)\tilde{\theta}_1(t) + \mathscr{H}_{12}(t)\tilde{\theta}_2(t) + \delta_1(t)\,, \qquad (22)$$

$$\hat{G}_2(t) = \mathscr{H}_{21}(t)\tilde{\theta}_1(t) + \mathscr{H}_{22}(t)\tilde{\theta}_2(t) + \delta_2(t)\,. \qquad (23)$$

Agora, considerando a derivada temporal de (12) e referindo-se ao esquema busca pelo equilíbrio de Nash ilustrado na Fig. 1, podemos encontrar a dinâmica que governa $\hat{\theta}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ da seguinte forma:

$$\frac{d\tilde{\theta}_1(t)}{dt} = \frac{d\hat{\theta}_1(t)}{dt} = u_1(t)\,, \qquad (24)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_2(t)}{dt} = \frac{d\hat{\theta}_2(t)}{dt} = u_2(t)\,, \qquad (25)$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ representam as leis de controle NES a serem projetadas.

A lei de retroalimentação contínua é dada por:

$$\begin{cases} u_1(t) & = K_1\hat{G}_1(t) \\ u_2(t) & = K_2\hat{G}_2(t) \end{cases}, \quad \text{para todo } t \geq 0\,. \qquad (26)$$

A lei de controle (26), quando escrita de forma vetorial $u(t) = K\hat{G}(t)$ onde

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \qquad (27)$$

garante a estabilidade do sistema de malha fechada, assumindo que o produto KH seja Hurwitz.

Aqui, as atualizações de controle são acionadas apenas para uma determinada sequência de instantes de tempo $(t_\kappa)\kappa \in \mathbb{N}$ determinada por um gerador de eventos. Este gerador é projetado para manter estabilidade e robustez do sistema de malha fechada ao mesmo tempo que diminui a frequência de atualização do sinal controle. Ou seja, tarefa de controle é orquestrada por um mecanismo de monitoramento que aciona atualizações quando a diferença entre o valor de saída atual e seu valor previamente calculado no tempo t_κ excede um limite pré-definido, determinado por uma condição de acionamento (Heemels et al., 2012). É importante notar que, em implementações convencionais por dados amostrados, o tempo de execução é uniformemente espaçado, com $t_{\kappa+1} = t_\kappa + h$, onde $h > 0$ é uma constante conhecida, para todos $\kappa \in \mathbb{N}$. No entanto, em um esquema acionado por eventos, os instantes de amostragem podem ocorrer de forma aperiódica.

2.2 Emulação do Projeto de Busca Extremal em Tempo Contínuo

Definimos as ações dos jogadores como:

$$u_1(t) = K_1\hat{G}_1(t_\kappa^1), \quad \forall t \in [t_\kappa^1, t_{\kappa+1}^1), \qquad (28)$$

$$u_2(t) = K_2\hat{G}_2(t_\kappa^2), \quad \forall t \in [t_\kappa^2, t_{\kappa+1}^2). \qquad (29)$$

As seguintes funções e_1 e e_2, ambas mapeando de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, representam a diferença entre a variável de estado atual e seu valor anteriormente transmitido para os jogadores P1 e P2, respectivamente, e são expressas como:

$$e_1(t) := \hat{G}_1(t_\kappa^1) - \hat{G}_1(t), \quad \forall t \in [t_\kappa^1, t_{\kappa+1}^1), \quad \kappa \in \mathbb{N}, \qquad (30)$$

$$e_2(t) := \hat{G}_2(t_\kappa^2) - \hat{G}_2(t), \quad \forall t \in [t_\kappa^2, t_{\kappa+1}^2), \quad \kappa \in \mathbb{N}. \qquad (31)$$

Usando as equações (28)–(31), reescrevemos as políticas de controle distribuído acionadas por eventos para cada jogador em termos de e_1 e e_2, conforme segue:

$$u_1(t) = K_1\hat{G}_1(t) + K_1 e_1(t), \quad \forall t \in [t_\kappa^1, t_{\kappa+1}^1), \qquad (32)$$

$$u_2(t) = K_2\hat{G}_2(t) + K_2 e_2(t), \quad \forall t \in [t_\kappa^2, t_{\kappa+1}^2). \qquad (33)$$

Consequentemente, substituindo a lei de controle acionada por eventos (32)–(33) na derivada temporal de (22), (23), (24) e na equação (25), para todo $t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$, onde $t_\kappa = \min\{t_\kappa^1, t_\kappa^2\}$ e $t_{\kappa+1} = \min\{t_{\kappa+1}^1, t_{\kappa+1}^2\}$ (para mais detalhes, veja (Tallapraga and Chopra, 2014)), obtemos a seguinte dinâmica governando $\hat{G}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{G}_1(t)}{dt} = {} & \mathscr{H}_{11}(t)K_1\hat{G}_1(t) + \mathscr{H}_{11}(t)K_1 e_1(t) \\
& + \mathscr{H}_{12}(t)K_2\hat{G}_2(t) + \mathscr{H}_{12}(t)K_2 e_2(t) \\
& + \frac{d\mathscr{H}_{11}(t)}{dt}\tilde{\theta}_1(t) + \frac{d\mathscr{H}_{12}(t)}{dt}\tilde{\theta}_2(t) + \frac{d\delta_1(t)}{dt}\,, \qquad (34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{G}_2(t)}{dt} = {} & \mathscr{H}_{21}(t)K_1\hat{G}_1(t) + \mathscr{H}_{21}(t)K_1 e_1(t) \\
& + \mathscr{H}_{22}(t)K_2\hat{G}_2(t) + \mathscr{H}_{22}(t)K_2 e_2(t) \\
& + \frac{d\mathscr{H}_{21}(t)}{dt}\tilde{\theta}_1(t) + \frac{d\mathscr{H}_{22}(t)}{dt}\tilde{\theta}_2(t) + \frac{d\delta_2(t)}{dt}\,, \qquad (35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\theta}_1(t)}{dt} = {} & K_1\mathscr{H}_{11}(t)\tilde{\theta}_1(t) + K_1\mathscr{H}_{12}(t)\tilde{\theta}_2(t) \\
& + K_1 e_1(t) + K_1\delta_1(t)\,, \qquad (36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\theta}_2(t)}{dt} = {} & K_2\mathscr{H}_{21}(t)\tilde{\theta}_1(t) + K_2\mathscr{H}_{22}(t)\tilde{\theta}_2(t) \\
& + K_2 e_2(t) + K_2\delta_2(t)\,. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Portanto, em uma representação concisa em forma de vetorial, temos

$$\frac{d\hat{G}(t)}{dt} = \mathscr{H}(t)K\hat{G}(t) + \mathscr{H}(t)Ke(t) + \frac{d\mathscr{H}(t)}{dt}\tilde{\theta}(t) + \frac{d\delta(t)}{dt}\,, \qquad (38)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}(t)}{dt} = K\mathscr{H}(t)\tilde{\theta}(t) + Ke(t) + K\delta(t)\,, \qquad (39)$$

onde

$$\mathscr{H}(t) = \begin{bmatrix} \mathscr{H}_{11}(t) & \mathscr{H}_{12}(t) \\ \mathscr{H}_{21}(t) & \mathscr{H}_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ e } \delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

O sistema em malha fechada descrito por (38) e (39) destaca um ponto crucial: enquanto o produto $\mathscr{H}(t)K$ em média forma uma matriz de Hurwitz, a convergência ao equilíbrio $\hat{G} \equiv 0$ e $\tilde{\theta} \equiv 0$ não é garantida devido à presença do vetor de erro $e(t) := [e_1(t), e_2(t)]^T$ e do termo variável no tempo $\delta(t)$ e suas derivadas. No entanto, o sistema exibe Estabilidade de Entrada-Estado (ISS) em relação ao vetor de erro $e(t)$ e a tais perturbações variáveis no tempo. Além disso, é importante observar que as perturbações $\delta(t)$ e $\frac{d\delta(t)}{dt}$, assim como a matriz variável no tempo $\frac{d\mathscr{H}(t)}{dt}$, possuem valores médios nulos.

3. AÇÕES DISTRIBUÍDAS ACIONADAS POR EVENTOS PARA BUSCA DO EQUILÍBRIO DE NASH

A Definição 1 delineia a utilização de parâmetros pequenos σ_i, juntamente com os erros e_i e medidas da estimativa do gradiente $\hat{G}_i$ para o projeto do mecanismo distribuído de transmissão de dados acionado por eventos. Esses componentes são empregados para construir a "Condição de Acionamento Estático da Busca do Equilíbrio de Nash". Essa abordagem envolve a atualização das leis de controle (28) e (29) e dos atuadores ZOH, conforme ilustrado na Figura 1. Isso garante, de forma aperiódica, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.

Definição 1. (Condição de Acionamento). O ET-NES com condição de acionamento estático consiste em dois componentes:

(1) O conjunto de sequências crescentes de tempo $I = \{I_1, I_2\}$ tal que $I_i = \{t_0^i, t_1^i, t_2^i, \ldots\}$ com $t_0^i = 0$, para todo $i \in \{1,2\}$, gerado sob as seguintes regras:
   - Se $\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_\kappa^i \ \wedge \ \sigma_i|\hat{G}_i(t)| - |e_i(t)| < 0\right\} = \emptyset$, então o conjunto de tempos dos eventos é $I_i = \{t_0^i, t_1^i, \ldots, t_\kappa^i\}$.
   - Se $\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_\kappa^i \ \wedge \ \sigma_i|\hat{G}_i(t)| - |e_i(t)| < 0\right\} \neq \emptyset$, o próximo tempo de evento é dado por
   $$t_{\kappa+1}^i = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_\kappa^i \wedge \sigma_i|\hat{G}_i(t)| - |e_i(t)| < 0\right\}, \tag{41}$$
   consistindo no mecanismo de acionamento estático de evento.

(2) A i-ésima ação de controle de realimentação atualizada nos instantes de acionamento em (28) e (29).

4. MECANISMO DE ACIONAMENTO PARA O SISTEMA DE MALHA FECHADA ESCALADO TEMPORALMENTE

4.1 Procedimento de Escalonamento Temporal

Para facilitar a análise de estabilidade do sistema de malha fechada, introduzimos uma escala de tempo conveniente. Ao examinar (11), nota-se que as frequências de sondagem (9) e (10), bem como suas combinações, são racionais. Além disso, existe um período de tempo T tal que

$$T = 2\pi \times \text{MMC}\left\{\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}\right\}, \tag{42}$$

onde MMC denota o mínimo múltiplo comum. Portanto, definimos uma nova escala de tempo para a dinâmica (38) e (39) usando a transformação $\bar{t} = \omega t$, onde

$$\omega := \frac{2\pi}{T}. \tag{43}$$

Consequentemente, o sistema (38) e (39) pode ser expresso , para todo $t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$ e $\kappa \in \mathbb{N}$, como:

$$\frac{d\hat{G}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathscr{H}(\bar{t})K\hat{G}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\mathscr{H}(\bar{t})Ke(\bar{t}) + \\ + \frac{d\mathscr{H}(\bar{t})}{d\bar{t}}\tilde{\theta}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\frac{d\delta(\bar{t})}{d\bar{t}}, \tag{44}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}K\mathscr{H}(\bar{t})\tilde{\theta}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}Ke(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}K\delta(\bar{t}). \tag{45}$$

Agora, dentro da escala de tempo transformada $\bar{t}$, pode-se implementar a teoria da média adequadamente com base nas dinâmicas (44) e (45). Apesar da não-periodicidade dos eventos de disparo e da descontinuidade no lado direito das equações (44) e (45), o sistema em malha fechada mantém sua periodicidade ao longo do tempo devido aos sinais de excitação aditiva e demodulação periódicos. Essa característica única permite a aplicação dos resultados de média estabelecidos por Plotnikov (Plotnikov, 1980) a esta configuração específica.

4.2 Sistema Médio em Malha Fechada

Define-se o estado aumentado como:

$$X^T(\bar{t}) := \left[\hat{G}(\bar{t}) \ \tilde{\theta}(\bar{t})\right], \tag{46}$$

que reduz o sistema (44) e (45) para:

$$\frac{dX(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathscr{F}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right). \tag{47}$$

O sistema (47) apresenta um pequeno parâmetro $1/\omega$ e uma função T-periódica $\mathscr{F}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right)$ em $\bar{t}$. Portanto, o teorema da média (Plotnikov, 1980) pode ser aplicado a $\mathscr{F}\left(\bar{t}, X, \frac{1}{\omega}\right)$ em $\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega} = 0$, seguindo os princípios estabelecidos por Plotnikov (Plotnikov, 1980).

Ao empregar a média de (47), obtemos o seguinte sistema médio:

$$\frac{dX_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\mathscr{F}_{\text{av}}(X_{\text{av}}), \tag{48}$$

$$\mathscr{F}_{\text{av}}(X_{\text{av}}) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{F}(\xi, X_{\text{av}}, 0)\, d\xi, \tag{49}$$

onde as variáveis de estado médias $\hat{G}(\bar{t})$ e $\tilde{\theta}(\bar{t})$, para todo $\bar{t} \in [\bar{t}_\kappa, \bar{t}_{\kappa+1})$, são regidas pelas seguintes equações:

$$\frac{d\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}HK\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}HKe_{\text{av}}(\bar{t}), \tag{50}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}KH\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}Ke_{\text{av}}(\bar{t}), \tag{51}$$

$$e_{\text{av}}(\bar{t}) = \hat{G}_{\text{av}}(\bar{t}_\kappa) - \hat{G}_{\text{av}}(\bar{t}), \tag{52}$$

$$\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t}) = H\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t}), \tag{53}$$

lembrando que a matriz HK é Hurwitz. Portanto, é evidente a partir de (50) que a relação ISS de $\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})$ com relação ao erro médio de medição $e_{\text{av}}(\bar{t})$ se mantém. Assim, podemos introduzir a seguinte "Condição de Disparo Estático Média da Busca do Equilíbrio de Nash" para o sistema médio.

Definição 2. (Versão Média da Condição de Acionamento). A condição média de acionamento por eventos na busca de Nash consiste em dois componentes:

(1) O conjunto de sequências crescentes de tempo $I = \{I_1, I_2\}$ tal que $I_i = \{\bar{t}_0^i, \bar{t}_1^i, \bar{t}_2^i, \ldots\}$ com $\bar{t}_0^i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, gerado sob as seguintes regras:

- Se $\left\{\bar{t}\in\mathbb{R}^+ : \bar{t}>\bar{t}^i_\kappa \wedge \sigma_i|\hat{G}^{\rm av}_i(\bar{t})|-|e^{\rm av}_i(\bar{t})|<0\right\}=\emptyset$, então o conjunto de tempos dos eventos é $I_i=\{\bar{t}^i_0,\bar{t}^i_1,\ldots,\bar{t}^i_\kappa\}$.
- Se $\left\{\bar{t}\in\mathbb{R}^+ : \bar{t}>\bar{t}^i_\kappa \wedge \sigma_i|\hat{G}^{\rm av}_i(\bar{t})|-|e^{\rm av}_i(\bar{t})|<0\right\}\neq\emptyset$, o próximo tempo de evento é dado por

$$\bar{t}^i_{\kappa+1}=\inf\left\{\bar{t}\in\mathbb{R}^+ : \bar{t}>\bar{t}^i_\kappa \ \wedge\ \sigma_i|\hat{G}^{\rm av}_i(\bar{t})|-|e^{\rm av}_i(\bar{t})|<0\right\}, \tag{54}$$

consistindo no mecanismo de disparo de evento estático.

(2) A i-ésima ação de controle é atualizada nos instantes de disparo tal que

$$u^{\rm av}_i(\bar{t})=K_i\hat{G}^{\rm av}_i(\bar{t})+K_ie^{\rm av}_i(\bar{t}), \tag{55}$$

para todo $\bar{t}\in[\bar{t}_\kappa,\bar{t}_{\kappa+1})$, $k\in\mathbb{N}$.

5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O teorema 1 garante localmente a estabilidade assintótica do sistema de controle em malha fechada ilustrado na Figura 1.

Teorema 1. Considere a dinâmica média da estimativa do gradiente (50), o vetor médio do erro (52), e o mecanismo médio de acionamento por evento distribuído na Definição 2. Para $\omega>0$ suficientemente grande, definido em (43), o equilíbrio $\hat{G}_{\rm av}(t)\equiv 0$ é localmente exponencialmente estável, e $\tilde{\theta}_{\rm av}(t)$ converge exponencialmente para zero. Além disso, para o sistema não-médio (39), existem constantes m e $\bar{M}_\theta$ tais que

$$\|\theta(t)-\theta^*\|\leq\bar{M}_\theta\exp(-mt)+\mathscr{O}\left(a+\frac{1}{\omega}\right), \tag{56}$$

onde $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, com a_1, a_2 definida em (9)–(10) e as constantes m e $\bar{M}_\theta$ dependendo dos parâmetros de acionamento σ_1, σ_2, e da condição inicial $\theta(0)$, respectivamente. Além disso, existe um limite inferior τ^* para o intervalo entre execuções $t_{\kappa+1}-t_\kappa$ para todo $\kappa\in\mathbb{N}$, evitando o comportamento de Zeno.

Prova: A prova do teorema é dividida em duas seções principais: análise de estabilidade e prevenção do efeito de Zeno.

A. Análise de Estabilidade

Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov para o sistema médio (50):

$$V_{\rm av}(\bar{t})=\hat{G}^T_{\rm av}(\bar{t})P\hat{G}_{\rm av}(\bar{t}), \quad P=P^T>0. \tag{57}$$

Como HK é Hurwitz, dado $Q=Q^T>0$, existe $P=P^T$ tal que a equação de Lyapunov seja $K^TH^TP+PHK=-Q$ e, portanto, a derivada temporal de (57) é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}=&-\frac{1}{\omega}\hat{G}^T_{\rm av}(\bar{t})Q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})+\frac{1}{\omega}e^T_{\rm av}(\bar{t})H^TK^TP\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\\&+\frac{1}{\omega}\hat{G}^T_{\rm av}(\bar{t})PKHe_{\rm av}(\bar{t}),\end{aligned} \tag{58}$$

cujo limite superior pode ser expresso como

$$\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}\leq-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\omega}\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2+\frac{2\|PKH\|}{\omega}\|e_{\rm av}(\bar{t})\|\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|. \tag{59}$$

No mecanismo de acionamento de evento proposto, a lei de atualização é dada por (54). Assim, por projeto $|e^{\rm av}_1(\bar{t})|\leq\sigma_1|\hat{G}^{\rm av}_1(\bar{t})|$, $|e^{\rm av}_2(\bar{t})|\leq\sigma_2|\hat{G}^{\rm av}_2(\bar{t})|$ e $\|e_{\rm av}(\bar{t})\|\leq\bar{\sigma}\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|$, onde $\bar{\sigma}=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$. Além disso, a desigualdade de Rayleigh-Ritz (Khalil, 2002) nos dá $\lambda_{\min}(P)\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2\leq V_{\rm av}(\bar{t})\leq\lambda_{\max}(P)\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2$. Assim, a desigualdade (59) é limitada superiormente por

$$\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}\leq-\frac{1}{\omega}\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}\left(1-\frac{2\|PKH\|\bar{\sigma}}{\lambda_{\min}(Q)}\right)V_{\rm av}(\bar{t}), \tag{60}$$

com $V_{\rm av}(\bar{t})>0$ and $\dfrac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}<0$, para todo $\bar{\sigma}<\dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|PHK\|}$. Por exemplo, se escolhermos $\bar{\sigma}=\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|PHK\|}\hat{\sigma}$, onde $\hat{\sigma}\in(0,1)$, e definindo $\alpha=\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$, a desigualdade (60) torna-se simplesmente

$$\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}\leq-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}V_{\rm av}(\bar{t}). \tag{61}$$

Usando o Princípio da Comparação (Khalil, 2002, Lemma), a solução de

$$\frac{d\bar{V}_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}=-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}\bar{V}_{\rm av}(\bar{t}), \quad \bar{V}_{\rm av}(\bar{t}_\kappa)=V_{\rm av}(\bar{t}_\kappa) \tag{62}$$

proporciona um limite superior $\bar{V}_{\rm av}(\bar{t})$ para $V_{\rm av}(\bar{t})$ tal que

$$V_{\rm av}(\bar{t})\leq\bar{V}_{\rm av}(\bar{t}), \quad \forall\bar{t}\in[\bar{t}_\kappa,\bar{t}_{\kappa+1}), \tag{63}$$

com

$$\bar{V}_{\rm av}(\bar{t})=\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}\bar{t}\right)V_{\rm av}(\bar{t}_\kappa), \quad \forall\bar{t}\in[\bar{t}_\kappa,\bar{t}_{\kappa+1}). \tag{64}$$

Definindo $\bar{t}^+_\kappa$ e $\bar{t}^-_\kappa$ como limites à direita e à esquerda de $\bar{t}=\bar{t}_\kappa$, respectivamente, substituindo em (63), $V_{\rm av}(\bar{t}^-_{\kappa+1})\leq\exp\left(-\dfrac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}^-_{\kappa+1}-\bar{t}^+_\kappa)\right)V_{\rm av}(\bar{t}^+_\kappa)$. Como $V_{\rm av}(\bar{t})$ é contínuo, $V_{\rm av}(\bar{t}^-_{\kappa+1})=V_{\rm av}(\bar{t}_{\kappa+1})$, $V_{\rm av}(\bar{t}^+_\kappa)=V_{\rm av}(\bar{t}_\kappa)$, e, consequentemente,

$$V_{\rm av}(\bar{t}_{\kappa+1})\leq\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}_{\kappa+1}-\bar{t}_\kappa)\right)V_{\rm av}(\bar{t}_\kappa). \tag{65}$$

Portanto, para qualquer $\bar{t}\geq 0$ em $\bar{t}\in[\bar{t}_\kappa,\bar{t}_{\kappa+1})$, $k\in\mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}V_{\rm av}(\bar{t})&\leq\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}-\bar{t}_\kappa)\right)V_{\rm av}(\bar{t}_\kappa)\\&\leq\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}-\bar{t}_\kappa)\right)\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}_\kappa-\bar{t}_{\kappa-1})\right)V_{\rm av}(\bar{t}_{\kappa-1})\\&\leq\ldots\leq\\&\leq\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}-\bar{t}_\kappa)\right)\prod_{i=1}^{i=k}\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}(\bar{t}_i-\bar{t}_{i-1})\right)V_{\rm av}(\bar{t}_{i-1})\\&=\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}\bar{t}\right)V_{\rm av}(0), \quad \forall\bar{t}\geq 0.\end{aligned} \tag{66}$$

Agora, ao limitar inferiormente o lado esquerdo e superiormente o lado direito de (66) com seus respectivos equivalentes na desigualdade de Rayleigh-Ritz, obtemos:

$$\lambda_{\min}(P)\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2\leq\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{\omega}\bar{t}\right)\lambda_{\max}(P)\|\hat{G}_{\rm av}(0)\|^2. \tag{67}$$

Então,

$$\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2\leq\left[\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{2\omega}\bar{t}\right)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|\hat{G}_{\rm av}(0)\|\right]^2, \tag{68}$$

e

$$\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|\leq\exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{2\omega}\bar{t}\right)\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|\hat{G}_{\rm av}(0)\|. \tag{69}$$

Uma vez que H é invertível e, a partir de (53), $\tilde{\theta}\text{av}(\bar{t}) = H^{-1}\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})$, a seguinte desigualdade é estabelecida

$$\|\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})\| \leq \exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{2\omega}\bar{t}\right) M_\theta \|\tilde{\theta}_{\text{av}}(0)\|, \tag{70}$$

$$M_\theta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|H^{-1}\|\|H\|. \tag{71}$$

Já que (39) tem lado direito descontínuo, é T-periódica em t, e observando que o sistema médio com estado $\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})$ é assintoticamente estável de acordo com (70), podemos invocar o teorema da média em (Plotnikov, 1980, Teorema 2) para concluir que

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_{\text{av}}(t)\| \leq \mathscr{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{72}$$

Ao aplicarmos a desigualdade triangular (Apostol, 1957), obtemos:

$$\begin{aligned}\|\tilde{\theta}(t)\| &\leq \|\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)\| + \mathscr{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\\ &\leq \exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{2}t\right) M_\theta \|\tilde{\theta}_{\text{av}}(0)\| + \mathscr{O}\left(\frac{1}{\omega}\right).\end{aligned} \tag{73}$$

Agora, a partir de (9) e da Figura 1, podemos verificar que

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t), \tag{74}$$

onde $S(t) := [S_1(t), S_2(t)]^T$ e cuja norma euclidiana satisfaz

$$\begin{aligned}&\|\theta(t) - \theta^*\| = \|\tilde{\theta}(t) + S(t)\| \leq \|\tilde{\theta}(t)\| + \|S(t)\|\\ &\leq \exp\left(-\frac{\alpha(1-\hat{\sigma})}{2}t\right) M_\theta \|\theta(0) - \theta^*\| + \mathscr{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right),\end{aligned} \tag{75}$$

levando à desigualdade (56), para m e $\bar{M}_\theta$ apropriados.

B. Evitando o Comportamento de Zeno

Uma vez que o sistema médio em malha fechada consiste em (50), com o mecanismo de acionamento por evento (54) e lei de controle média (55), podemos concluir que $\|e_{\text{av}}(\bar{t})\| \leq \bar{\sigma}\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|$, resultando em

$$\bar{\sigma}\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|^2 - \|e_{\text{av}}(\bar{t})\|\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\| \geq 0. \tag{76}$$

Ao usar a desigualdade de Peter-Paul (Warner, 1971), $cd \leq \frac{c^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon d^2}{2}$ para todo $c, d, \varepsilon > 0$, com $c = \|e_{\text{av}}(\bar{t})\|$, $d = \|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|$ e $\varepsilon = \bar{\sigma}$, a desigualdade (76) é limitada inferiormente por

$$\begin{aligned}&\bar{\sigma}\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|^2 - \|e_{\text{av}}(\bar{t})\|\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\| \geq\\ &q\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|^2 - p\|e_{\text{av}}(\bar{t})\|^2,\end{aligned} \tag{77}$$

onde $q = \frac{\bar{\sigma}}{2}$ e $p = \frac{1}{2\bar{\sigma}}$. Em (Girard, 2014), é demonstrado que um limite inferior para o intervalo entre execuções é dado pelo tempo que leva a função

$$\phi(\bar{t}) = \sqrt{\frac{p}{q}}\frac{\|e_{\text{av}}(\bar{t})\|}{\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|} \tag{78}$$

variar de 0 a 1. A derivada temporal de (78) é

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} = \sqrt{\frac{p}{q}}\frac{1}{\|e_{\text{av}}(\bar{t})\|\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|}\Bigg[&e_{\text{av}}^T(\bar{t})\frac{de_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}}\\ &-\hat{G}_{\text{av}}^T(\bar{t})\frac{d\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}}\left(\frac{\|e_{\text{av}}(\bar{t})\|}{\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|}\right)^2\Bigg].\end{aligned} \tag{79}$$

Então, a seguinte estimativa é válida:

$$\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} \leq \frac{\|HK\|}{\omega}\sqrt{\frac{p}{q}}\left\{1 + 2\frac{\|e_{\text{av}}(\bar{t})\|}{\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|} + \frac{\|e_{\text{av}}(\bar{t})\|^2}{\|\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\|^2}\right\}. \tag{80}$$

Portanto, usando (78), a desigualdade (80) é reescrita como

$$\omega\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} \leq \|HK\|\sqrt{\frac{p}{q}} + 2\|HK\|\phi(\bar{t}) + \|HK\|\sqrt{\frac{q}{p}}\phi^2(\bar{t}). \tag{81}$$

A partir da escala de tempo $t = \frac{\bar{t}}{\omega}$, a desigualdade (80) e por meio do Lema de Comparação (Khalil, 2002), encontramos um limite inferior para o tempo entre execuções como

$$\tau^* = \int_0^1 \frac{1}{b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2}d\xi, \tag{82}$$

com $b_0 = \frac{|HK|}{\bar{\sigma}}$, $b_1 = 2|HK|$, e $b_2 = \bar{\sigma}|HK|$. Portanto, o comportamento de Zeno é evitado não apenas para o sistema médio em malha fechada no tempo $\bar{t}$, mas também para o sistema original no tempo t, uma vez que ω é apenas um parâmetro de escalonamento temporal, o que significa que $\bar{\tau}^* = \omega\tau^*$ ainda será um número finito, estabelecendo um tempo de comutação mínimo para descartar qualquer comportamento de Zeno no tempo $t \in \mathbb{R}+$ ou $\bar{t} \in \mathbb{R}+$.

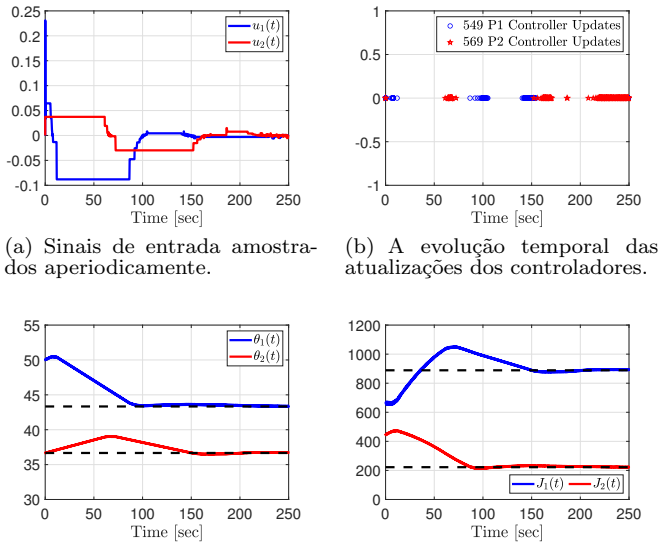
6. SIMULAÇÃO

Esta seção apresenta os resultados da simulação para ilustrar a busca distribuída de equilíbrio de Nash baseada em mecanismo de acionamento por eventos. O sistema investigado representa um jogo não-cooperativo envolvendo duas empresas operando em um mercado de tipo duopólio. Essas empresas se envolvem em um competição visando maximizar seus lucros $J_i(t)$ por meio da estratégia de precificação $u_i(t)$ de seus respectivos produtos, sem compartilhar qualquer informação entre os jogadores. Os parâmetros do sistema são consistentes com os descritos em (Frihauf et al., 2012): as condições iniciais são definidas como $\hat{\theta}_1(0) = 50$ e $\hat{\theta}_2(0) = 110/3$. Além disso, $S_d = 100$, $p = 0,20$, $m_1 = 30$ e $m_2 = 30$ De acordo com (7), esses parâmetros nos levam a um equilíbrio de Nash único dado por:

$$\theta^* = [43,3333,\ 36,6667]^T, \tag{83}$$

$$J^* = [888,8889,\ 222,2222]^T. \tag{84}$$

Os parâmetros do controlador são escolhidos da seguinte forma: para a estratégia de busca do equilíbrio de Nash, definimos $a_1 = 0,075$, $a_2 = 0,050$, $K_1 = 2$, $K_2 = 5$, $\omega_1 = 27$ e $\omega_2 = 22$. Com relação ao mecanismo de acionamento por eventos, os parâmetros são $\sigma_1 = 0,85$ e $\sigma_2 = 0,95$. Para alcançar o equilíbrio de Nash (83) com os lucros ótimos (84), os jogadores P1 e P2 implementam a estratégia de busca pelo equilíbrio de Nash descentralizada proposta, empregando perturbações senoidais para modificar suas ações. A evolução temporal da abordagem proposta é representada na Figura 2. A Figura 2(a) mostra o comportamento de atualização aperiódica das ações dos jogadores. Lembrando que cada jogador estima um componente de gradiente distinto e decide independentemente quando acionar e atualizar a ação do jogador correspondente, essas atualizações ocorrem autonomamente. Em uma simulação que abrange 250 segundos, as ações do jogador P1 foram atualizadas 549 vezes e as do jogador P2 foram atualizadas 569 vezes - Figura 2(b). Notavelmente, embora essas atualizações sejam independentes, elas impulsionam coletivamente o sistema em direção ao equilíbrio de Nash, conforme representado na Figura 2(c). Além disso, a Figura 2(d) ilustra como, dentro da estrutura de mercado de duopólio descrita sem compartilhamento de informações, cada jogador pode maximizar seus lucros $J_i(t)$ empregando a estratégia NES descentralizada proposta via ETC para definir os preços dos produtos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ no jogo não-cooperativo.



(a) Sinais de entrada amostrados aperiodicamente.

(b) A evolução temporal das atualizações dos controladores.

(c) Sinais de entrada das funções de lucro, $\boldsymbol{\theta}(t)$.

(d) Funções de lucro.

Figura 2. Simulação numérica da busca extremal distribuída em um jogo do tipo duopólio não-cooperativo através de políticas acionadas por eventos.

A estratégia de busca de Nash acionada por eventos resulta em intervalos de tempo não uniformes entre as ações de controle. Em contraste, uma estratégia de controle acionada periodicamente por computador executaria atualizações de controle em intervalos de tempo fixos e regulares, independentemente do estado atual do sistema. As vantagens da abordagem aperiódica incluem a utilização mais eficiente dos recursos computacionais e de comunicação, pois as atualizações ocorrem apenas quando necessárias, reduzindo a carga desnecessária no sistema e minimiza o consumo de energia.

7. CONCLUSÕES

Este artigo introduziu um método inovador para alcançar localmente a convergência ao equilíbrio de Nash em jogos não-cooperativos por meio de um esquema de controle distribuído acionado por evento usando busca extremal. Essa estratégia permite que os jogadores em um duopólio melhorem seus lucros sem que ocorra qualquer tipo de compartilhamento de informações, com atualizações de ações ocorrendo independentemente, uma vez que cada jogador estima e atualiza suas ações com base em diferentes componentes do gradiente. A abordagem proposta contribui não apenas para a teoria dos jogos, mas também oferece um método prático para tomada de decisão descentralizada em sistemas complexos, demonstrando eficácia mesmo sob largura de banda limitada e preservando a estabilidade do sistema em malha fechada.

REFERÊNCIAS

Alpcan, T. and Başar, T. (2011). *Network Security: A Decision and Game Theoretic Approach*. Cambridge University Press.

Amina, S., Schwartz, G.A., and Sastry, S.S. (2013). Security of interdependent and identical networked control systems. *Automatica*, 49, 186–192.

Apostol, T. (1957). *Mathematical Analisys - A Modern Approach to Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company.

Başar, T. (1987). Relaxation techniques and the on-line asynchronous algorithms for computation of noncooperative equilibria. *J. Economic Dynamics and Control*, 11, 531–549.

Başar, T. and Olsder, G.J. (1999). *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM Series in Classics in Applied Mathematics. Philadelphia.

Başar, T. and Zaccour, G. (eds.) (2018a). *Handbook of Dynamic Game Theory, Volume I (Theory of Dynamic Games)*. Springer International Publishing.

Başar, T. and Zaccour, G. (eds.) (2018b). *Handbook of Dynamic Game Theory, Volume II (Applications of Dynamic Games)*. Springer International Publishing.

Frihauf, P., Krstić, M., and Başar, T. (2012). Nash equilibrium seeking in noncooperative games. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 57, 1192–1207.

Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991). *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Ghaffari, A., Krstić, M., and Nešic, D. (2012). Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767.

Girard, A. (2014). Dynamic triggering mechanism for event-triggered control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 60, 1992–1997.

Han, Z., Niyato, D., Saad, W., and Başar, T. (2019). *Game Theory for Next Generation Wireless and Communication Networks: Modeling, Analysis, and Design*. Cambridge University Press.

Hazeleger, L., Nesić, D., and van de Wouw, N. (2022). Sampled-data extremum-seeking framework for constrained optimization of nonlinear dynamical systems. *Automatica*, 142, 110415 (14 pages).

Heemels, W.P.M.H., Johansson, K.H., and Tabuada, P. (2012). An introduction to event-triggered and self-triggered control. In *IEEE 51st IEEE Conf. Decis. Control.*, 3270–3285.

Huo, W., Tsang, K.F.E., Yan, Y., Johansson, K.H., and Shi, L. (2024). Distributed nash equilibrium seeking with stochastic event-triggered mechanism. *Automatica*, 162, 111486.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey.

Khong, S.Z., Nesić, D., Tan, Y., and Manzie, C. (2013). Unified frameworks for sampled-data extremum seeking control: Global optimisation and multi-unit systems. *Automatica*, 49, 2720–2733.

Krstić, M. (2014). Extremum seeking control. In *Encyclopedia of Systems and Control*, volume 1, 413–416. Springer, London, 1 edition.

Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36, 595–601.

Li, S. and Başar, T. (1987). Distributed learning algorithms for the computation of noncooperative equilibria. *Automatica*, 23, 523–533.

Mazo, M. and Tabuada, P. (2011). Decentralized event-triggered control over wireless sensor/actuator networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56, 2456–2461.

Nash, J.F. (1951). Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54, 286–295.

Oliveira, T.R. and Krstić, M. (2022). *Extremum Seeking through Delays and PDEs*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Oliveira, T.R., Rodrigues, V.H.P., Krstić, M., and Başar, T. (2020). Nash equilibrium seeking with arbitrarily delayed player actions. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 150–155.

Oliveira, T.R., Rodrigues, V.H.P., Krstić, M., and Başar, T. (2021a). Nash equilibrium seeking in heterogeneous noncooperative games with players acting through heat pde dynamics and delays. In *2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 1167–1173.

Oliveira, T.R., Rodrigues, V.H.P., Krstić, M., and Başar, T. (2021b). Nash equilibrium seeking in quadratic noncooperative games under two delayed information-sharing schemes. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 191, 700–735.

Oliveira, T.R., Rodrigues, V.H.P., Krstić, M., and Başar, T. (2021c). Nash equilibrium seeking with players acting through heat pde dynamics. In *2021 American Control Conference (ACC)*, 684–689.

Plotnikov, V.A. (1980). Averaging of differential inclusions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 31, 454–457.

Rodrigues, V.H.P., Oliveira, T.R., Hsu, L., Diagne, M., and Krstic, M. (2023). Event-triggered extremum seeking control systems. `https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.08512`.

Tallapraga, P. and Chopra, N. (2014). Decentralized event-triggering for control of nonlinear systems. *Automatica*, 59, 3312–3324.

Wang, X. and Lemmon, M.D. (2011). Event-triggering in distributed networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56, 586–601.

Warner, F. (1971). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Chicago, Illinois.

Zhang, K., Fang, X., Wang, D., Lv, Y., and Yu, X. (2021). Distributed nash equilibrium seeking under event-triggered mechanism. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 68, 3441–3445.

Zhu, Q., Tembine, H., and Başar, T. (2013). Hybrid learning in stochastic games and its applications in network security. In F.L. Lewis and D. Liu (eds.), *Series on Computational Intelligence*, chapter 14, 305–329. IEEE Press/Wiley.

Zhu, Y., Fridman, E., and Oliveira, T.R. (2023). Sampled-data extremum seeking with constant delay: A time-delay approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 68, 432–439.