CONTROLE DE ATITUDE DE NANO SATÉLITE USANDO O MÉTODO FPRE COM SOLUÇÃO VIA FILTRAGEM ADAPTATIVA*

FRANCISCO DAS C. DE SOUZA[1], JOÃO DE DEUS M. A. FILHO[2], WILLIAMS JESUS L. YANEZ[3]

[1], [3]*Laboratório de Sistemas Adaptativos e Processamento de Sinais (LSAPS), Universidade Federal do Maranhão (UFMA), São Luís, MA, Brasil, (E-mails:* francisco.souza@ufma.br; wyanez@unicamp.br).
[2]*Consórcio de Alumínio do Maranhão (ALUMAR), (E-mail:* joao.filho@alcoa.com).

Abstract: This work investigates the efficiency of the LQR-based FPRE (forward-propagation Riccati equation) method applied to the control of a nonlinear system factored in SDC (state-dependent coefficients) that represents the attitude dynamics of nanosatellites. To solve the FPRE, it is necessary to obtain the solution of the state-dependent discrete algebraic Riccati equation (SD-DARE) at each time instant, which is complex to determine analytically. The adopted strategy consists of using adaptive filtering algorithms to solve the Bellman equation, which is independent of the dynamic system matrices and whose solution converges to the solution of the SD-DARE. As a result, a control vector is calculated online in order to stabilize the states of the dynamic system. Computational simulations demonstrate the performance of the FPRE when normalized least-mean-square (NLMS) and recursive least-square (RLS) algorithms are used in the face of initial state conditions, disturbances, and choices of matrices in SDC.

Resumo: Este trabalho investiga a eficiência do método FPRE (*forward-propagation Riccati equation*) baseado em LQR e aplicado no controle de um sistema não-linear fatorado em SDC (*state-dependent coefficients*) que representa a dinâmica de atitude de nano satélites. Para resolver o FPRE, é necessário obter a solução da SD-DARE (*state-dependent discret algebraic Riccati equation*) a cada instante de tempo o que é complexo para ser determinado analiticamente. A estratégia adotada consiste em utilizar algoritmos de filtragem adaptativa para resolver a equação de Bellman, a qual não depende das matrizes do sistema dinâmico e cuja solução converge para a solução da SD-DARE. Como resultado, um vetor de controle é calculado *online* a fim de estabilizar os estados do sistema dinâmico. Simulações computacionais mostram o desempenho do FPRE quando os algoritmos NLMS (*normalized least-mean-square*) e RLS (*recursive least-square*) são usados frente às condições iniciais dos estados, distúrbios e escolhas de matrizes em SDC.

Keywords— FPRE, attitude control, normalized LMS algorithm, state-dependent discrete algebraic Riccati equation.

Palavras-chave— FPRE, controle de atitude, algoritmos LMS normalizado e RLS, equação algébrica de Riccati discreta dependente de estado.

1. Introdução

Os nano satélites fazem parte de uma classe de satélites miniaturizados em formato cúbico com massa entre 1,33 kg e 10 kg (Sidi, l1997). O baixo custo e menor período de concepção favorecem a ampla utilização dos nano satélites em missões de telecomunicações, GPS e pesquisas científicas (Zheng, 2021). Para executar essas missões, os satélites contam com instrumentos que requerem apontamentos em direções precisas no espaço (Sun, Guowen, 2017). Essa condição é dependente de um controle de atitude embarcado ao veículo espacial a fim de manter a sua orientação de forma correta em relação a um referencial considerado inercial como a Terra (Wertz, 1978). Na prática, essa tarefa é executada pelo ADCS (*Attitude Determination Control System*) que contém algoritmos de controle além de sensores e atuadores (Xia, Sun, 2017). O controle de atitude é requerido a partir dos instantes iniciais da missão a fim de eliminar rotações indesejadas no nano satélite quando é deixado em órbita por um LSV (*Sattelite Launch Vehicle*) e ao longo da missão frente a efeitos de fenômenos ambientais (Yang, 2012).

O maior desafio enfrentado pelos projetistas é o desenvolvimento de técnicas de controle de atitude de alto desempenho frente às incertezas e não-linearidades (Yang, 2012). Entre diferentes técnicas de controle dedicadas a sistemas dinâmicos não lineares destacam-se: inversão dinâmica, controle de modo deslizante, controle ótimo adaptativo, programação dinâmica e o método da equação de Riccati dependente de estado (SDRE - *state-dependent Riccati equation*) (Haim, Choukroun, 2012). Especificamente, o SDRE foi introduzido por Pearson (1962) (Nekoo, 2019) e possui inúmeras aplicações em sistemas aeroespaciais (Parrish, Ridgely, 1997; Stansbery, James, 2000). O SDRE envolve a fatoração da dinâmica não linear do modelo em um vetor de estado e o produto de uma função valor que depende do próprio estado. Ao fazer isso, o algoritmo captura totalmente as não linearidades do sistema dinâmico, trazendo-o para uma estrutura pseudo-linear (não única) em coeficientes dependentes de estado (SDC - *state-dependent coeficients*). Na sequência, o método LQR pode ser utilizado para controlar uma planta linearizada em torno do seu ponto de operação atual. Esse processo é repetido em todas as etapas de amostragens tal que uma equação algébrica de Riccati (ARE) é resolvida e uma lei de controle é calculada *online* (Çimen, 2008). Para ser im-

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (Processo CAPES 88881.707433/2022-01 e 88887.707432/2022-00), da Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

plementado o SDRE requer condições de estabilidade e detectabilidade atendidas a cada instante de tempo, isto é, as suas matrizes de estado e controle devem ter posto completo em cada etapa da trajetória de estados do sistema dinâmico (Prach, Tekinalp, Bernstein, 2016a). No entanto, esses requisitos nem sempre são atendidos nos casos de sistemas não lineares devido à impossibilidade de determinação de dinâmicas futuras o que torna as garantias globais de estabilidade e desempenho incertas. (Prach, Tekinalp, Bernstein, 2014). Uma alternativa ao SDRE, é o método *forward propagation Riccati equation* (FPRE) proposto em (Chen, 1997; Weiss, Kolmanovsky, Bernstein, 2012), rigorosamente justificado em (Prach, Tekinalp, Bernstein, 2016b) e aplicado no controle de vôo de aeronaves (Prach, Tekinalp, Bernstein, 2016c). O FPRE utiliza equações a diferenças de Riccati resolvidas em avanço no tempo e pode ser aplicado no controle de sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não lineares fatorados em SDC. De forma análoga ao SDRE, o FPRE não garante em todos os casos a minimização ótima de um índice de desempenho quadrático. No entanto, para o FPRE, as condições necessárias de estabilidade e observabilidade não precisam ser satisfeitas a cada instante de tempo, o que facilita a implementação do método em tempo real sem a necessidade de conhecimento da dinâmica futura da planta, mas somente no instante atual (Prach, Tekinalp, Bernstein, 2016c).

No geral, problemas de controle ótimo envolvendo sistemas não lineares são resolvidos através de métodos que calculam a aproximação da solução da equação de *Hamilton Jacob Bellman* (Lewis, Draguna, 2009) cujos parâmetros não dependem de matrizes do sistema dinâmico. As técnicas de controle ótimo adaptativo livres do modelo do sistema pertencem à área de programação dinâmica adaptativa (ADP) e aprendizagem por reforço (RL). Em geral, nas áreas de ADP e RL, a equação de Bellman é resolvida usando redes neurais, métodos do tipo gradiente ou mínimos quadrados recursivos (Lewis, Draguna, 2009). Em (Yanez, Souza, 2021), a equação de Bellman é resolvida usando filtragem adaptativa (Haykin, 2014). Neste caso, a solução da equação de Bellman converge para a solução da DARE (*discrete algebraic riccati equation*) sendo aplicada no controle de sistemas lineares.

As principais contribuições deste trabalho são: mostrar como obter um arranjo fatorado em SDC de um sistema não linear que representa a dinâmica de atitude de nano satélites e a partir disso testar a eficiência de algoritmos de filtragem adaptativa para resolver a equação de Bellman até convergir para a solução da SD-DARE (*state-dependent discret algebraic Riccati equation*). O artigo é organizado da seguinte forma: Na seção 2, é apresentado o sistema não-linear junto as etapas de discretização, fatoração em SDC e o arranjo em espaço de estados. Na seção 3, o controle FPRE *online* mostra a equivalência entre a SD-DARE e a equação de Bellman. Além disso, apresenta-se o detalhamento da etapa de filtragem adaptativa, considerando os algoritmos adaptativos NLMS (*normalized least-mean-square*) e RLS (*recursive least-squares*) para obter a estimativa recursiva da vetorização da solução da equação de Bellman. Finalmente na seção 4, simulações computacionais verificam a eficiência do FPRE frente a condições iniciais dos estados, distúrbios e escolhas de matrizes em SDC.

2. Formulação do Problema

A dinâmica de atitude de um nano satélite em uma órbita circular pode ser descrita em diferentes sistemas referenciais. Seja *ABC* um referencial inercial denotado por F_i. Um referencial comumente usado para órbitas terrestres é o sistema Equatorial Geocêntrico, onde *A* é o eixo que aponta para a direção do equinócio Vernal, o plano *AB* é o plano equatorial da Terra e o eixo *C* coincide com o eixo de rotação da Terra e aponta para o Norte. Neste artigo, F_b é a estrutura formada pelos eixos do nano satélite e F_0 é o sistema referencial orbital (também chamado LVLH) com origem no centro de massa do corpo rígido (Reyhanoglu, Ton, Drakunov, 2009). Como mostrado na Figura 1, a_0 está ao longo da direção orbital, b_0 é perpendicular ao plano de órbita e c_0 está na direção Nadir. Sendo a orientação do veículo descrita em relação ao referencial F_0, a atitude é considerada ideal quando os eixos fixos *abc* do nano satélite coincidem com os eixos orbitais $a_0 b_0 c_0$.

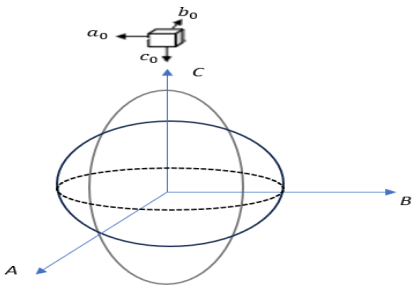


Figura 1. Sistema Inercial Geocêntrico (*ABC*) e Referencial Orbital ($a_0 b_0 c_0$).

A representação de atitude é geralmente descrita por parâmetros como ângulos de Euler, matrizes de cossenos diretores e quatérnios (Kuipers, 1999; Yang 2012). A cinemática e a dinâmica rotacional dos satélites são representadas por sistemas de equações de Euler-Newton. No geral, a literatura aborda sistemas não lineares no tempo contínuo do tipo (Yao, Jianying, 2021; Safi, Dibaji, 2018).

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} - [\boldsymbol{\omega}^{\times}]\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\ \omega_2\ \ \omega_3]^T \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular; $\mathbf{J} = \mathrm{diag}\,(J_1,\ J_2\ ,J_3) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ é o momento de inércia do nano satélite; $\mathbf{u} = [u_1\ u_2\ \ u_3]^T$ é o vetor de controle e $\boldsymbol{\omega}^{\times} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ denota a matriz anti-simétrica

$$\boldsymbol{\omega}^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Note que

$$\dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2}(q_0\boldsymbol{\omega} + \mathbf{q}_v^{\times}\boldsymbol{\omega}) \tag{3}$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{q}_v \tag{4}$$

$$\mathbf{q}^T = [q_0, \mathbf{q}_v]^T = [\cos(\delta/2), \mathbf{e}^T \sin(\delta/2)]^T \tag{5}$$

onde $\mathbf{q}$ é o quatérnio de atitude cuja parte escalar é $q_0 \in \mathbb{R}$; $\mathbf{q}_v = [q_1\ q_2\ q_3]^T \in \mathbb{R}^3$ é a parte vetorial e satisfaz a condição de restrição $q_0^2 + \mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v = 1$; $\mathbf{e}$ é um vetor unitário; δ é o ângulo de rotação do vetor $\mathbf{e}$ e $\mathbf{q}^\times$ é a matriz anti-simétrica

$$\mathbf{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

O sistema dinâmico em (3) e (4) possui dois pontos de equilíbrio: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{q}_v = \mathbf{0}$. Assume-se que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{q}_v = \mathbf{x}_2$, são os estados do sistema. A representação de (3) e (4) em espaço de estado é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}^{-1}[\mathbf{x}_1]^\times\mathbf{J}\mathbf{x}_1 + \mathbf{u} \\ \frac{1}{2}(q_0\mathbf{x}_1 + [\mathbf{x}_2]^\times\mathbf{x}_1) \end{bmatrix} \tag{7}$$

e

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

2.1 Discretização e fatoração do modelo em SDC

Segundo o método de integração de Euler (Chen, 1999; Golub, Van Loan, 2013), a representação discretizada de (7) e (8) é dada por

$$\mathbf{x}_{1,k+1} = T_a\left(-\mathbf{J}^{-1}[\mathbf{x}_{1,k}]^\times\mathbf{J}\right) + \mathbf{x}_{1,k} \tag{9}$$

e

$$\mathbf{x}_{2,k+1} = T_a\left(\frac{1}{2}q_0\mathbf{x}_{1,k} + \frac{1}{2}[\mathbf{x}_{2,k}]^\times\mathbf{x}_{1,k}\right) + \mathbf{x}_{2,k} \tag{10}$$

sendo T_a o período de amostragem. A não exclusividade da parametrização SDC cria graus extras de liberdade que podem ser utilizados para aprimorar o desempenho do controlador (Çimen, 2008). Desse modo, a partir de (9) e (10), uma possível representação (não-única) da matriz dinâmica $\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{6\times6}$ em SDC é dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} + T_a(-\mathbf{J}^{-1}[\mathbf{x}_{1,k}]^\times\mathbf{J}^{-1}) & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \frac{1}{2}T_a(q_0 + \mathbf{A}_{e,k}) & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \tag{11}$$

onde

$$\mathbf{A}_{e,k} = \begin{bmatrix} q_{0,k} & -x_{3,k} & x_{2,k} \\ x_{3,k} & q_{0,k} & -x_{1,k} \\ -x_{2,k} & x_{1,k} & q_{0,k} \end{bmatrix} \tag{12}$$

e $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade. Finalmente, a matriz $\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{6\times3}$ associada ao controle é

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) = T_a\begin{bmatrix} -\mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

2.2 Controle FPRE baseado em LQR

O FPRE foi desenvolvido inicialmente para sistemas em tempo contínuo na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}),\ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{14}$$

onde $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado. A fatoração de (14) em SDC (Çimen, 2008) é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \tag{15}$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ são matrizes dependentes de estado em t.

Para a aplicação de filtros adaptativos é requerido que o sistema em (15) esteja na forma (Kelemen, Dávid, Gyorgy, 2015; Prach, Tekinalp, 2014)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_k\,. \tag{16}$$

No contexto da teoria do LQR (Chen, Chung-yao, 1997), associa-se a (16) o custo funcional

$$V(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=k}^{\infty}(\mathbf{x}_i^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i^T\mathbf{R}\mathbf{u}_i) \tag{17}$$

onde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiva semi-definida e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ positiva definida são, respectivamente, matrizes que penalizam o estado e o controle. Assume-se que (16) é estabilizável, ou seja, existe uma lei de controle

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \tag{18}$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que os autovalores da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)$ pertencem ao círculo unitário (Kelemen, Dávid, Gyorgy, 2015). Nesse caso, diz-se que $\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)$ é admissível. Além disso, é assumido que o par $(\mathbf{A}(\mathbf{x}_k), \sqrt{\mathbf{Q}})$ é observável (Chen, 1999, p.171)

Para (18), com $\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)$ admissível, o índice (17) é quadrático (Lewis, Draguna, 2009), isto é,

$$V^{\mathbf{K}}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T\mathbf{S}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \tag{19}$$

onde $\mathbf{S}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{S}^T(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiva definida é a solução da equação de Lyapunov

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)\right)^T\mathbf{S}(\mathbf{x}_k) \\ &\times\left(\mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k - \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)\right) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{Q} \\ &+ \mathbf{K}(\mathbf{x}_k)^T\mathbf{R}\mathbf{K}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{20}$$

A matriz de ganho ótimo que minimiza (17) é

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k) = &\left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)\mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\right)^{-1} \\ &\times\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{21}$$

onde $\mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k) = \mathbf{S}^{*T}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiva definida é a solução única da SD-DARE

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_k) = \left|\begin{aligned} &\mathbf{A}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_k) \\ &+ \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}(\mathbf{x}_k)\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \\ &\times\left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}(\mathbf{x}_k)\mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\right)^{-1} \\ &\times\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}(\mathbf{x}_k). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Portanto, para resolver o problema do FPRE baseado em LQR, a equação (22) é resolvida a cada instante de tempo. De forma simultânea, as matrizes (21) e (18) são atualizadas.

3. Controle FPRE online

Para o controle FPRE *online*, a matriz de ganho deve ser calculada em tempo real. Então, seja J um número inteiro positivo fixo. Para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$, considere

$$t_j = jJ. \tag{23}$$

Seja o conjunto $[t_j, t_{j+1})$, com J elementos, isto é,

$$[t_j, t_{j+1}) = \{t_j, t_j + 1, t_j + 2, \ldots, t_{j+1} - 1\} \tag{24}$$

disjuntos dois a dois, ou seja,

$$[t_j, t_{j+1}) \cap [t_i, t_{i+1}) = \emptyset \tag{25}$$

para todo $j \neq i$, sendo $\emptyset$ o conjunto vazio. Além disso,

$$\bigcup_{j=0}^{\infty}[t_j, t_{j+1}) = \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Neste artigo, é desenvolvida uma lei de controle

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \tag{27}$$

onde a matriz $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$ é obtida em tempo real, para $k \in [t_j, t_{j+1})$, tal que $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k)$, quando $j \to \infty$, sendo $\mathbf{K}_j^*(\mathbf{x}_k)$ a matriz de ganho ótimo (21).

Seja a matriz

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) = \quad & \Big(\big(\mathbf{R} + \mathbf{B}_j{}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}_{j-1}(\mathbf{x}_k) \\ & \times \mathbf{B}_j(\mathbf{x}_k)\big)^{-1}\mathbf{B}_j{}^T(\mathbf{x}_k) \\ & \times \mathbf{S}_{j-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}_j(\mathbf{x}_k)\end{aligned} \tag{28}$$

com $j \geq 1$, onde $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ é a solução da equação de Lyapunov

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k) = \quad & \big(\mathbf{A}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{B}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)\big)^T \\ & \times \mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\big(\mathbf{A}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{B}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)\big) \\ & +\mathbf{Q} + \mathbf{K}_j{}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{R}\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)\end{aligned} \tag{29}$$

com $j \geq 0$ e $\mathbf{K}_0(\mathbf{x}_k)$ admissível. De (19), resulta

$$V^{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \tag{30}$$

com a sequência $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ em (29) convergindo para a solução da SD-DARE (22) quando $j \to \infty$. Com isso (28) converge para (21). Neste artigo, utiliza-se um esquema de filtragem adaptativa para obter uma sequência de matrizes $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ que convergem para a solução da SD-DARE em tempo real.

3.1 Equação de Bellman como um problema de filtragem adaptativa

Seja a lei de controle (27) com $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$ dado em (28). Para $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$, o custo em (17) é reescrito na forma

$$V^{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T\mathbf{R}\mathbf{u}_k + V^{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}_{k+1}) \tag{31}$$

sendo (31) chamada de Equação de Bellman (Lewis, Draguna, 2009). A seguir é apresentado um esquema de filtragem adaptativa para aproximar a solução da equação de Bellman. Segue-se de (19) que a equação de Bellman (31) para o controle FPRE torna-se

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k = \ & \mathbf{x}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T\mathbf{R}\mathbf{u}_k \\ & + \mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_{k+1}\end{aligned} \tag{32}$$

Seja $\mathbf{A}_{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}_k) = \big(\mathbf{A}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{B}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)\big)$. Então, (32) é equivalente a

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k = \quad & \mathbf{x}_k^T\big[\mathbf{Q} + \mathbf{K}_j{}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{R}\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) \\ & +\mathbf{A}_{\mathbf{K}_j}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}_{\mathbf{K}_j}(\mathbf{x}_k)\big]\mathbf{x}_k.\end{aligned} \tag{33}$$

Considerando que (33) deve ser satisfeita para todo instante k então (29) é equivalente a (32) que pode ser resolvida *online* usando somente dados obtidos ao longo da trajetória de estados do controle de atitude. Na sequência note que a equação (30) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k = \quad & \mathbf{x}_k^T\big(x_k^1\mathbf{S}_j^1(\mathbf{x}_k) + x_k^2\mathbf{S}_j^2(\mathbf{x}_k) \\ & + \cdots + x_k^n\mathbf{S}_j^n(\mathbf{x}_k)\big)\end{aligned} \tag{34}$$

$$\mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k = \quad \mathbf{s}_j^T(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_k \otimes \mathbf{x}_k) \tag{35}$$

$$\mathbf{x}_k^T\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k = \quad \mathbf{s}_j^T(\mathbf{x}_k)\hat{\mathbf{x}}_k \tag{36}$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{x}_k$, isto é,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = [x_{1,k} \ x_{2,k} \ldots x_{6,k}] \otimes \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{6,k} \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{1,k}x_{1,k} & x_{1,k}x_{2,k} & x_{1,k}x_{3,k}\ldots x_{1,k}x_{6,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{6,k}x_{1,k} & x_{6,k}x_{2,k} & x_{6,k}x_{3,k}\ldots x_{6,k}x_{6,k} \end{bmatrix}$$

é o produto de Kronecker (Golub, Van Loan, 2013), contendo todos os possíveis produtos dos componentes de $\mathbf{x}_k$. Logo, obtém-se $\mathbf{s}_j(\mathbf{x}_k) = \Big[\big(\mathbf{S}_{j1}(\mathbf{x}_k)\big)^T \cdots \big(\mathbf{S}_{jn}(\mathbf{x}_k)\big)^T\Big]^T$, o qual é um vetor formado pelo empilhamento das colunas da matriz $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$, onde $\mathbf{S}_{ji}(\mathbf{x}_k)$ é a sua i-ésima coluna. Note que $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ é simétrica e possui somente $n(n+1)/2$ elementos independentes. A seguir, os termos redundantes em $\hat{\mathbf{x}}_k$ são removidos para definir uma base quadrática $\hat{\mathbf{x}}_k$ com $n(n+1)/2$ elementos definidos como

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k}^2, 2x_{1,k}x_{2,k}, \ldots, 2x_{1,k}x_{6,k}, x_{2,k}^2, \ldots, \\ 2x_{2,k}x_{6,k}, x_{3,k}^2, \ldots, 2x_{3,k}x_{6,k}, x_{4,k}^2, \\ 2x_{4,k}x_{5,k}, 2x_{4,k}x_{6,k}, x_{5,k}^2, 2x_{5,k}x_{6,k}, x_{6,k}^2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

onde, $\bar{\mathbf{x}}_k$ é o resultado de remover os termos redundantes em $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{x}_k$ sendo cada termo redundante multiplicado por 2. Com isso, obtém-se $\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Considerando $n = 6$, então, $\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$ possui 21 elementos os quais também são elementos comuns da matriz $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ em (30). A matriz $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ resulta da reconstrução de $\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$ que é chamado de vetorização de $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$. De (36) obtém-se

$$V^{\mathbf{K}j}(\mathbf{x}_k) = \big(\bar{\mathbf{s}}_j^T(\mathbf{x}_k)\big)\bar{\mathbf{x}}_k \tag{39}$$

Finalmente, associando (32) e (39), a equação de Bellman torna-se

$$(\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_{k+1})^T\big(\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)\big) = \mathbf{x}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T\mathbf{R}\mathbf{u}_k. \tag{40}$$

3.2 Filtro Adaptativo

Um esquema de filtragem adaptativa (Figura 2) consiste de um filtro digital e um algoritmo adaptativo, ambos com o mesmo sinal de entrada φ_k. A partir de φ_k e dos coeficientes θ_k, o filtro gera a saída y_k. A diferença entre o sinal desejado d_k e y_k é o erro e_k que é usado pelo algoritmo para ajustar θ_k a fim de aproximar y_k de d_k (Haykin, 2014).

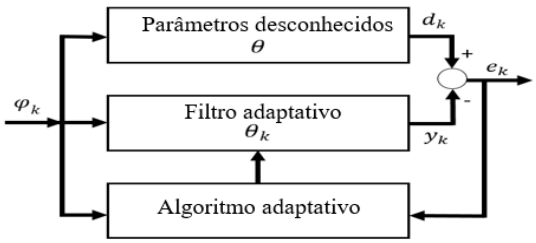


Figura 2. Esquema de filtragem adaptativa

3.2.1 Algoritmo NLMS

A estrutura do filtro adaptativo para (40), visando gerar estimativas recursivas θ_k do vetor $\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$ é

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \mu_k f(\theta_k, e_k, \varphi_k) \tag{41}$$

com $\mu_k > 0$. Uma versão de (41) é o algoritmo LMS normalizado (NLMS - *normalized least-mean-square*), o qual pode ser escrito como (Haykin, 2014)

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\mu e_k \varphi_k}{\varphi_k^T \varphi_k + \psi} \tag{42}$$

onde $\psi \geq 0$ e $0 < \mu < 2$. Na sequência, seja o filtro formado por

$$\varphi_k = \bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_{k+1} \tag{43}$$

$$y_k = \varphi_k^T \theta_k \tag{44}$$

$$d_k = \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k \tag{45}$$

$$e_k = d_k - y_k \tag{46}$$

onde θ_k é uma aproximação do vetor $\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$ no tempo $k \in [\mathrm{t}_j, \mathrm{t}_{j+1})$. Assim, (40) forma um conjunto de J equações com $n(n+1)/2$ elementos desconhecidos. Para obter uma solução única de mínimos quadrados $\bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$, é necessário e suficiente que a matriz

$$\mathbf{\Phi}(t_j) = \sum_{k=\mathrm{t}_j}^{\mathrm{t}_{j+1}-1} \varphi_k \varphi_k^T \tag{47}$$

seja invertível ou não-singular. Essa condição em (47) é denominada condição de excitação (Al-Tamimi, Murad, Lewis, 2007). Uma condição necessária para evitar a singularidade da matriz (47) é

$$J \geq n(n+1)/2. \tag{48}$$

3.3 Persistência de excitação

Para obter a convergência exponencial do algoritmo NLMS é requerido que o sinal φ_k satisfaça a condição de persistência de excitação (Al-Tamimi, Murad, Lewis, 2007), isto é, exista um T fixo tal que para todo t

$$\infty > \alpha_1 \mathbf{I} > \sum_{k=t}^{t+T} \varphi_k \varphi_k^T > \alpha_2 \mathbf{I} > 0 \tag{49}$$

sendo α_1 e α_2, números reais positivos.

O algoritmo *FPRE* proposto para o problema do controle de atitude é descrito a seguir em detalhes:

▷ **Bloco 0 – Inicialização**
▷ Matrizes
$[\mathbf{A}(\mathbf{x}_0), \mathbf{B}(\mathbf{x}_0), \mathbf{Q}, \mathbf{R}]$
Selecione um controle admissível: $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0)$.
▷ Parâmetros do NLMS e RLS
Inicialize o vetor de peso dos filtros
$\theta_k(0) \leftarrow \theta(0)$
Selecione o tamanho do passo: $0 < \mu < 2$
Selecione lambda (RLS)
▷ Selecione o estado inicial: $\mathbf{x}_0$.

$k \leftarrow 0$, $j \leftarrow 0$
▷ Processo iterativo
Para $j \leftarrow j+1$
Faça
Para $j \leftarrow 1{:}N$
Faça

▷ **Bloco 1 –Atualizações**
▷ Ação de controle
$\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \leftarrow -\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k$
▷ Estado
$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_k$

▷ **Bloco 2**
▷ Produto de Kronecker
$\varphi_k \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}$
Obtenha os dados de entrada e saída
$d_k = \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k$, $y_k = \varphi_k^T \theta_k$
Obtenha o sinal de erro: $e_k = d_k - y_k$
Reconstrução de $\theta_j(i)$ usando (42) da estimação do NLMS em $k \leftarrow k+1$
Atualize $\varphi_k^T \bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k) \leftarrow \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k$
Sendo $m = 6$, então
Para $i = 1{:}m$ i linha da matriz
Para $j = 1{:}m$ j coluna da matriz
Faça $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\{i,j\} = \bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$
Faça $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\{j,i\} = \bar{\mathbf{s}}_j(\mathbf{x}_k)$
Fim
Fim
Fim
Ao fazer a remoção dos termos redundantes então

$$\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \bar{s}_{j1} & \bar{s}_{j2} & \bar{s}_{j3} & \bar{s}_{j4} & \bar{s}_{j5} & \bar{s}_{j6} \\ \bar{s}_{j2} & \bar{s}_{j7} & \bar{s}_{j8} & \bar{s}_{j9} & \bar{s}_{j10} & \bar{s}_{j11} \\ \bar{s}_{j3} & \bar{s}_{j8} & \bar{s}_{j12} & \bar{s}_{j13} & \bar{s}_{j14} & \bar{s}_{j15} \\ \bar{s}_{j4} & \bar{s}_{j9} & \bar{s}_{j13} & \bar{s}_{j16} & \bar{s}_{j17} & \bar{s}_{j18} \\ \bar{s}_{j5} & \bar{s}_{j10} & \bar{s}_{j14} & \bar{s}_{j17} & \bar{s}_{j19} & \bar{s}_{j20} \\ \bar{s}_{j6} & \bar{s}_{j11} & \bar{s}_{j15} & \bar{s}_{j18} & \bar{s}_{j20} & \bar{s}_{j21} \end{bmatrix}$$

Bloco 3 –Atualização da política
$\mathbf{K}_{j+1}(\mathbf{x}_k) \leftarrow$
$\left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_j^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{B}_j(\mathbf{x}_k)\right)^{-1}$
$\mathbf{B}_j^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)\mathbf{A}_j(\mathbf{x}_k)$

▷ Atualização de parâmetros
$\theta_{t_{j+1}} = \theta_j$
$\mu_{j+1} = \mu_j$
Fim

4. Simulações e Resultados

Nesta seção, simulações computacionais avaliam a eficiência do FPRE frente a distintos cenários, utilizando os algoritmos NLMS e RLS (Astrom and Wittenmark, 2008, p.51). Como em (Yanez, Souza, 2021), através da utilização de um ruído de prova, a condição de persistência de excitação em (47) é satisfeita. Define-se aqui a norma de um vetor coluna $\mathbf{x}$ como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$. Para uma matriz $\mathbf{X}$, considera-se a norma espectral $\|\mathbf{X}\|$, isto é, o maior valor singular de $\mathbf{X}$. Os parâmetros usados são (Yao, Jianying, 2021; Safi, Dibaji, 2018): m = 2,06 kg; $\mathbf{J}$ = diag ([2, 2, 2.2)] kg.m^2, $\boldsymbol{\omega}_0 = [-4.2\ 4.8\ -3.8]^T$rad/s; $\mathbf{q}_0 = [-6\ 5\ 5.2]^T$. As matrizes em SDC aplicadas são (11), (12) e (13), $\mathbf{Q}$ = diag ([250, 250, 250 250, 250, 250]); $\mathbf{R}$ = diag ([1000, 1000, 1000]) e $\mathbf{K}(\mathbf{x}_0) = [1,2,3,4,2,2;\ 4,1,7,2,3,8;\ 1,2,3,2,1,4]^T$; $\theta_0 =$ zeros (21, 1); $T_a = 0.04$ s; $\mu = 0.65$ e $\lambda = 1.25$.

4.1 *Exemplo 1*

Dois cenários são considerados para os testes:

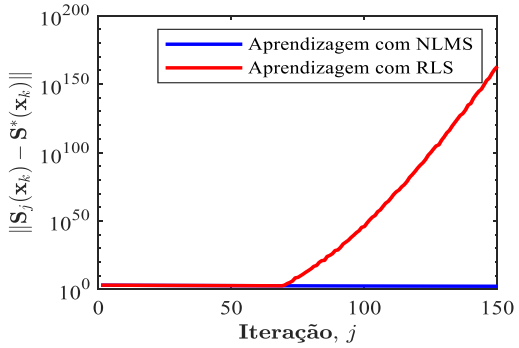
- Caso (i). $J \geq 21$, $N = 150$, sem aplicação de persistência de excitação.
- Caso (ii). $J \geq 21$, $N = 600$, com aplicação de persistência de excitação.

Como $n = 6$ (número de estados da planta), então $J \geq 21$ satisfaz a condição (48). Portanto, acima de 21 iterações dos algoritmos adaptativos é obtida uma aproximação da solução da equação de Bellman.

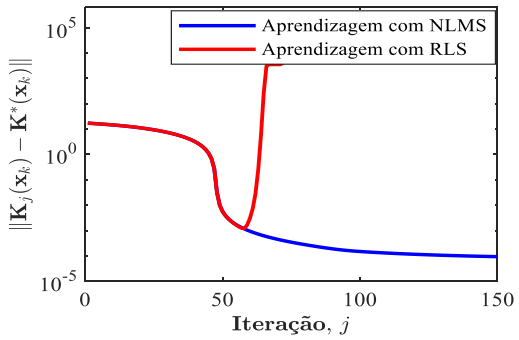
Caso (i). As Figuras 3 (a) e 3 (b) mostram respectivamente que as sequências $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$ não convergem para a solução da SD-DARE (22) e para a matriz de ganho ótimo (21) quando são usados os algoritmos NLMS e RLS sem aplicação de ruído de prova ao sinal de entrada do filtro.

Caso (ii). Visando satisfazer a condição de excitação em (47), adiciona-se um ruído de prova Gaussiano branco de média nula e variância $\sigma^2 = 10^{-10}$ ao sinal de entrada φ_k. Logo, (41) torna-se equivalente a $\theta_{k+1} = \theta_k + f(e_k, \bar{\varphi}_k, \theta_k)$, com $\bar{\varphi}_k$ ruidoso. Desse modo, o NLMS e o RLS convergem para as soluções de $\mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k)$, conforme ilustrado, respectivamente, nas Figuras 4 (a) e 4 (b).

Para o Caso (ii), as Figuras 5(a) e 5(b), mostram respectivamente o esforço de controle e a amortização das taxas de velocidade angular. Já as Figuras 5 (c) e 5 (d) mostram respectivamente, a parte vetorial do quatérnio de atitude e o MSE (*mean square error*) (Haykin, 2014) alcançado pelos algoritmos adaptativos.

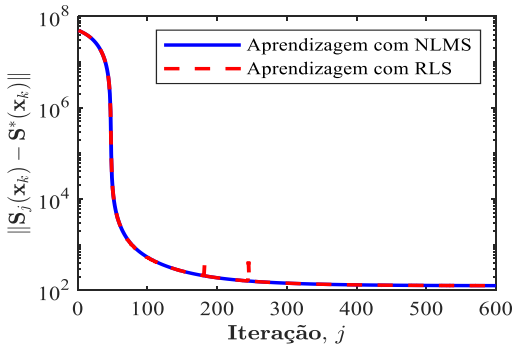


(a)

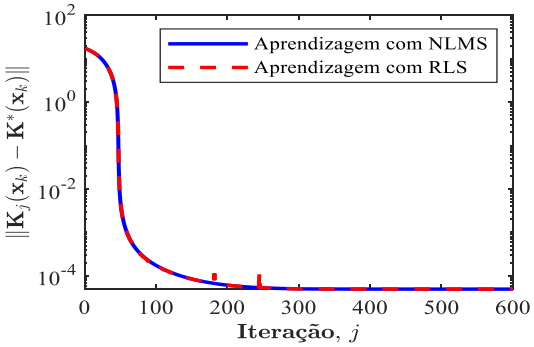


(b)

Figura 3. Exemplo 1 - Caso (i). (a) Comportamentos de $\|\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)\|$ e (b) $\|\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k)\|$ verificando a não convergência das matrizes $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$.



(a)



(b)

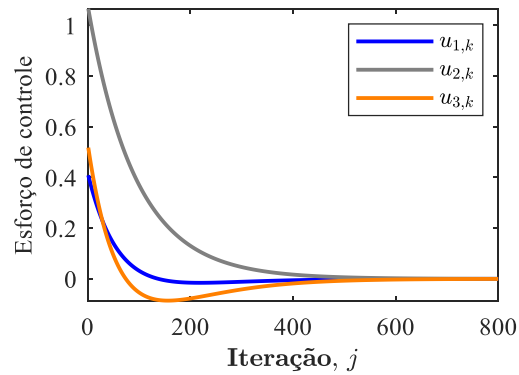
Figura 4. Exemplo 1 - Caso (ii). (a) Comportamento de $\|\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)\|$ e (b) $\|\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k)\|$ verificando a convergência das matrizes $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$ quando são aplicados ruídos ao sinal de entrada do filtro.

4.2 Exemplo 2

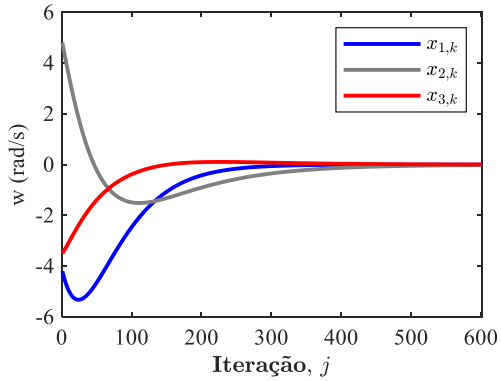
O cenário apresentado é $J \geq 21$ e $N = 1000$. Para testar a eficiência do FPRE frente à distúrbios, considera-se em $N = 350$, a revitalização de estados para as condições iniciais. Para este exemplo, considere $\boldsymbol{\omega}_0 = [-4 \;\; 5 \;\; -3.5]^T$rad/s; $\mathbf{q}_0 = [2.2 \;\; -3 \;\; -3.8]^T$. Desse modo, as Figuras 6 (a) e 6 (b) mostram os comportamentos de $\|\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)\|$ e $\|\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k)\|$ frente a perturbação imposta ao controle. As trajetórias dos estados para este caso são mostradas nas Figura 6 (c) e Figura 6 (d).

5. Conclusão

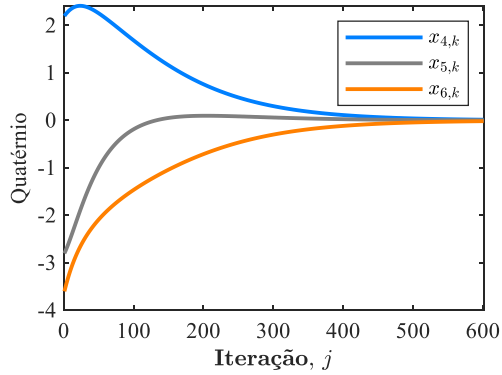
Neste trabalho, o método FPRE é aplicado no controle de um modelo não linear fatorado em SDC e que representa a dinâmica de atitude de nano satélites. O objetivo foi testar a eficiência do FPRE a partir de matrizes em SDC e pela obtenção da solução da equação de Bellman até convergir para a solução da SD-DARE. Para resolver a equação de Bellman sem o conhecimento de matrizes do sistema dinâmico foram empregados filtros adaptativos usando os algoritmos NLMS e o RLS.



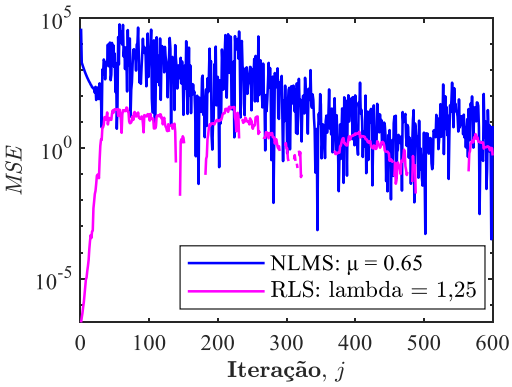
(a)



(b)

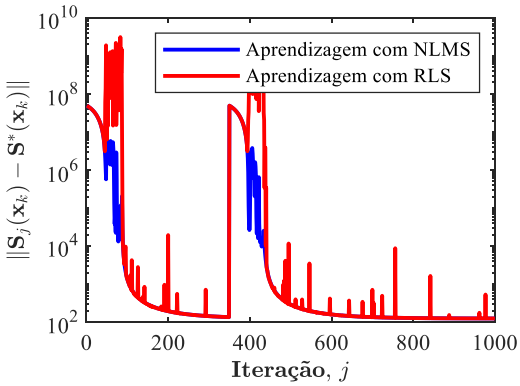


(c)

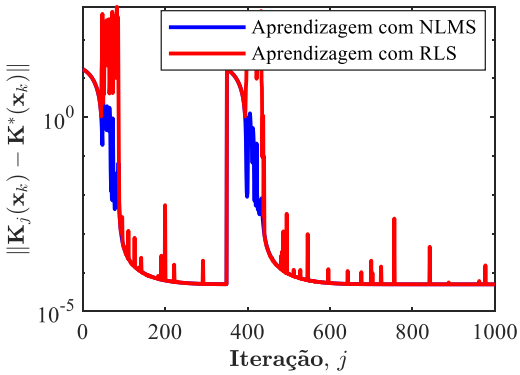


(d)

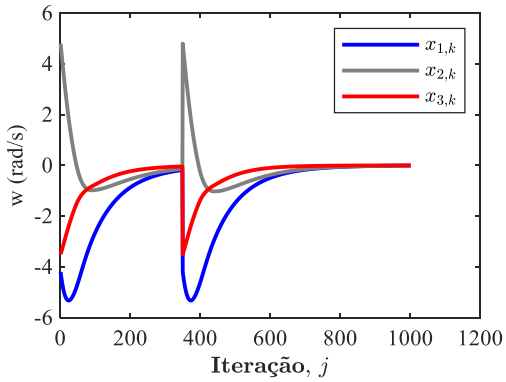
Figura (5). Exemplo 1 - Caso (ii). (a) Esforço de controle $\mathbf{u}_k$ em N/m. (b) Velocidade angular. (c) Parte vetorial do quatérnio de atitude. (d) MSE do NLMS com $\mu = 0.65$ e MSE do RLS com fator de esquecimento (lambda) igual a 1.25.



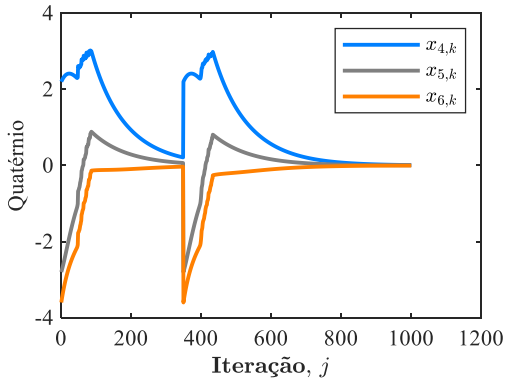
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura (6). Exemplo 2. (a) Comportamento de $\|\mathbf{S}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{S}^*(\mathbf{x}_k)\|$. (b) $\|\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k) - \mathbf{K}^*(\mathbf{x}_k)\|$. (c) Velocidade angular. (d) Parte vetorial do quatérnio de atitude.

Referências Bibliográficas

Al-Tamimi, Asma, Murad, Abu-Khalaf and Lewis, Frank L. (2007). Adaptive Critic Designs for Discrete-Time Zero-Sum Games With Applications to H_∞ Control. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 37, No. 1, pp. 240-247. doi: 10.1109/tsmcb.2006.880135.

Astrom, K.J. and Wittenmark, B. (2008). *Adaptive control*. Bitmead, Robert R. (1984). Persistence of Excitation Conditions and the Convergence of Adaptative Schemes. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 30, No. 2, pp. 183-191. doi: 10.1109/TIT.1984.1056898.

Chen, Chi-Tsong. 1999. Linear System Theory and Design. 3ª ed. New York: Oxford University Press.

Chen, Min-Shin and Chung-yao, Kao. (1997). Control of Linear Time-Varying Systems Using Forward Riccati Equation. Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 119, No. 3, pp. 536-540. doi: 10.1115/1.2801290.

Çimen, Tayfun. (2008). State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey. In Proceedings of the World Congress The International Federation of Automatic Control, Vol. 17. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00635.

Golub, Gene H. and Van Loan, Charles F. 2013. Matrix Computations. 4ª ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Haim, L and Choukroun, D. 2012. Optimized State-Dependent Riccati Equation Method for Spacecraft Attitude Estimation and Control. In Proceedings AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Minneapolis, Minnesota: American Institute of Aeronautics and Astronautics. doi: 10.2514/6.2012-4557.

Haykin, Simon. (2014). Adaptative Filter Theory. 5ª ed. London: Pearson Education.

Kuipers, Jack B. (1999). Quaternions and Rotation Sequences. New Jersey: Princeton University Press.

Gyorgy, Katalin, Kelemen A. (2015). Theoretical Study f the Nonlinear Control Algorithms with Continuous and Discrete-Time State Dependent Riccati Equation.

Lewis, Frank L. and Draguna, Vrabie. (2009). Reinforcement Learning and Adaptive Dynamic Programming for Feedback Control. IEEE Circuits and Systems Magazine 9, No. 3, pp. 32-50. doi: 10.1109/MCAS.2009.933854

Matinek, Radeck, Radana Kahankova, Jan Nedoma, Marcel Fajkus and Michal Skacel. 2018. Comparison of the LMS, NLMS, RLS and QR-RLS algorithms for vehicle noise supression. In Proceedings of the International Conference on Computer Modeling and Simulation, No. 10.. doi: 10.1145/3177457.3177502.

Akbari, Mohhamad, Gharesifard, Bahman, and Linder, Tamas Linder. (2021). On the lack of monotonicity of Newton-Hewer updates for Riccati equations. Automatica, No. 132. doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109788.

Nekoo, Saeed Rafee (2019). Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, Vol. 8, No. 2, pp. 109-166. doi: 10.5890/JAND.2019.06.001.

Parrish, David K. and Ridgely, Brett. (1997). Attitude Control of a Satellite Using the SDRE Method. In Proceeding of the American Control Conference. Albuquerque, New York. doi: 10.1109/ACC. 1997.609665.

Prach, Anna, Tekinalp, Ozan and Bernstein, Dennis S. (2014). Faux-Riccati Synthesis of Nonlinear Observer-Based Compensators for Discrete-Time Nonlinear Systems. In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, No. 53. Los Angeles, California. doi: 10.1109/ CDC.2014.7039488.

Prach, Anna, Tekinalp, Ozan and Bernstein, Dennis S. (2016a). Nonlinear Aircraft Flight Control Using The Forward Propagating Riccati Equation. In Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. San Diego, California: AIAA SciTech. doi: 10.2514/6.2016-1383.

Prach, Anna, Tekinalp, Ozan and Bernstein, Dennis S. (2016b). Output-feedback control of linear time-varying and nonlinear systems using the forward propagating Riccati equation. Journal of Vibration and Control, Vol. 24, No. 7, pp. 1239-1263. doi: 10.1177/107754631665913.

Prach, Anna, Tekinalp, Ozan and Bernstein, Dennis S. (2016c). Nonlinear Aircraft Flight Control Using The Forward Propagating Riccati Equation. American Institute of Aeronautics and Astronautics, pp. 1-13. doi: 10.2514/6.2016-1383.

Safi, M., M. Mortazavi and Dibaji, S. M. (2018). Global Stabilization of Attitude Dynamics; SDRE-based Control Designs. AUT Journal of Modeling and Simulation, Vol. 50, No. 2, pp. 203-210. doi: 10.22060/miscj.2018.13961.5087.

Sidi, Marcel J. (1997). Spacecraft Dynamics and Control: A Pratical Engineering Approach. New York: Cambridge University Press.

Stansbery, Donald T. and James, R. Cloutier. (2000). Position and Attitude Control of a Spacecraft Using the State-Dependent Riccati Equation Technique. In Proceedings of the American Control Conference. Chicago, Illinois. doi: 10.1109/ACC.2000.879525.

Weiss, Avishai, Kolmanovsky, Ilya and Bernstein, Dennis S. 2012. Forward-Integration Riccati-Based Output-Feedback Control of Linear Time-Varying Systems. In Proceeding of the American Control Conference Fairmont Queen Elizabeth. Montréal, Canada. doi: 10.1109/ ACC.2012.6315010.

Wertz, J. R. Spacecraft Attitude and control, London: D. Reidel (1978) (Astrophysics and Space Science Library).

Yanez, Williams Jesús López and Souza, Francisco das Chagas de. (2021). Considerações sobre o controle ótimo LQR online com solução da equação algébrica de Riccati baseada em algoritmos de filtragem adaptativa. In Proceeding of the Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, No. 15. Brasil: Sociedade Brasileira de Automática (SBA). doi: 10.20906/sbai.v1i1.2635.

Yang, Y. (2012). Spacecraft attitude determination and control: Quaternion based method. Annual Reviews in Control, No. 36: 198-219. doi: 0.1016/j.arcontrol.2012.09.003.

Yao, Junyu, Qinglei Hu and Jianying, Zheng. (2021). Nonlinear optimal attitude control of spacecraft using novel state-dependent coefficient parameterizations. Aerospace Science and Technology, No. 112. doi: 10.1016/j.ast.2021.106586.

Xia, Xiwang, Sun, Guowen, (2017). NanoSats/CubeSats ADCS Survey. 978-1-5090-4657-7/17/$31.00@2017 IEEE.