Controle robusto para uma classe de sistemas θ-periódicos com comutação ⋆

Grace S. Deaecto, * **Alessandro Astolfi** **

* *Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 13083-860, Brasil.*
Imperial College London, SW7 2AZ London, UK.
(e-mail: g.silva-deaecto@imperial.ac.uk).
** *Imperial College London, SW7 2AZ London, UK.*
Università di Roma Tor Vergata, 00133 Roma, Italy.
(e-mail: a.astolfi@imperial.ac.uk)

Abstract: This paper deals with robust control of a class of continuous-time switched systems subject to norm bounded uncertainty, in which the dynamic matrices are periodic with respect to a parameter θ. The main goal is to design a robust state-dependent switching function to ensure asymptotic tracking of a reference trajectory. An index of $\mathcal{H}_2$ type is taken into account to ensure a suitable level of performance for the overall system. The control methodology allows handling uncertain systems with linear fractional transformation structure (LFT) and is based on sufficient conditions expressed in terms of LMIs that ensure global asymptotic tracking when the parameter θ is time-dependent or local when it is state-dependent. The proposed technique is validated through the robust control of a three-phase AC-DC converter and a permanent magnet synchronous machine.

Resumo: Este artigo trata controle robusto de uma classe de sistemas com comutação a tempo contínuo, sujeitos à incerteza limitada em norma, nos quais as matrizes dinâmicas são periódicas com relação a um parâmetro θ. O objetivo principal é projetar uma função de comutação robusta dependente do estado para assegurar rastreamento assintótico de uma trajetória de referência. Um índice do tipo $\mathcal{H}_2$ é utilizado para assegurar um nível adequado de desempenho para o sistema global. A metodologia de controle permite considerar incerteza estruturada como transformação linear fracionária e é baseada em condições expressas por LMIs, que asseguram rastreamento assintótico global para o parâmetro θ dependente do tempo, ou local para θ dependente do estado. A técnica proposta é validada através do controle robusto de um conversor trifásico CA-CC e de uma máquina síncrona de ímã permanente.

Keywords: Switched systems; robust control; norm bounded uncertainty; asymptotic trajectory tracking; LMIs

Palavras-chaves: Sistemas com comutação; controle robusto; incerteza limitada em norma; rastreamento assintótico de trajetória; LMIs

1. INTRODUÇÃO

Sistemas afins com comutação são compostos por um conjunto de subsistemas e uma regra de comutação responsável por selecionar um deles a cada instante de tempo. Eles descrevem o comportamento dinâmico de vários dispositivos do mundo real, principalmente na área de eletrônica de potência, veja Garcia and Lopez Santos (2021), Deaecto et al. (2010), Baldi et al. (2018) e Sinafar et al. (2023) como alguns exemplos. Devido ao termo afim presente na sua equação dinâmica, os sistemas afins com comutação podem apresentar vários pontos de equilíbrio formando uma região no espaço de estado. Neste caso, o problema de estabilização consiste em encontrar a região de pontos de equilíbrio atingíveis e projetar uma função de comutação em malha fechada capaz de governar as trajetórias do estado para o ponto de equilíbrio desejado, veja Deaecto et al. (2010), Bolzern and Spinelli (2004) e Scharlau et al. (2014). Entretanto, quando o modelo é sujeito a incerteza, o problema de estabilização assintótica é mais desafiador, pois o ponto de equilíbrio pode não ser completamente conhecido.

A literatura apresenta poucos resultados sobre este tema, sendo Beneux et al. (2019), Sinafar et al. (2020), Deaecto et al. (2022), Beneux et al. (2018) e suas referências alguns deles. Nas três primeiras referências, o ponto de equilíbrio é parcialmente desconhecido e a técnica de controle é baseada na estimação dos parâmetros incertos. Na última referência, a ideia é projetar um controle do tipo integral como uma maneira de fornecer robustez para o sistema em consideração.

⋆ Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP - 2022/16431-0); do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - 305951/2022-0); do *European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme* (No. 739551 (KIOS CoE)); do *Italian Ministry for Research in the framework of the 2020 Program for Research Projects of National Interest (PRIN)* (Grant 2020RTWES4); e do *EPSRC* (Grants EP/W005557 e EP/X033546)

Este artigo trata uma classe de sistemas mais abrangentes do que os afins, caracterizados pela presença de matrizes dinâmicas que são periódicas com relação a um parâmetro θ. Este parâmetro pode ser uma função afim do tempo ou do estado. Neste caso, o projeto de controle é formulado como um problema de rastreamento de trajetória pela ação de uma função de comutação a ser determinada. Para cumprir este objetivo, Deaecto et al. (2024a) forneceu condições suficientes para assegurar o rastreamento assintótico de uma trajetória de interesse. O controle integral desta classe de sistemas foi estudado em Deaecto et al. (2024b) como uma estratégia para impor robustez, mas somente no caso em que θ é dependente do tempo.

Nosso objetivo é generalizar as condições suficientes propostas recentemente em Deaecto et al. (2024a) para estudar controle robusto de sistemas θ-periódicos com comutação sujeitos à incerteza limitada em norma, um tópico ainda não explorado na literatura. A técnica de controle proposta permite tratar incerteza estruturada como transformação linear fracionária (LFT [1]), através de condições LMIs [2] e a minimização de um custo garantido de desempenho, que foi inspirado na norma $\mathcal{H}_2$ de sistemas lineares e invariantes no tempo. A vantagem desta proposta em relação ao controle integral estudado em Deaecto et al. (2024b), é a possibilidade de incluir custo garantido e de não estar restrito ao caso em que θ é dependente do tempo. Além disso, no presente contexto, o conjunto de incertezas admissíveis é um parâmetro de projeto, enquanto que naquela referência, ele não é especificado. A metodologia proposta é validada através do projeto de controle robusto de um conversor trifásico $CA - CC$ com incerteza na resistência da carga e de uma máquina síncrona de ímã permanente (PMSM [3]) com incerteza no coeficiente de atrito viscoso.

Notação: Para vetores reais ou matrizes, $(')$ representa transposto. Para matrizes simétricas, $(\bullet)$ denota um bloco simétrico. A matriz identidade é denotada por I. Os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{N}$ denotam o conjunto dos números reais, reais não-negativos e naturais, respectivamente. Para uma matriz real e simétrica, $X > 0$ denota uma matriz definida positiva. Para matrizes quadradas, definimos o operador $\mathrm{He}\{X\} = X' + X$. A combinação convexa de N matrizes de mesma dimensão $X_1, ..., X_N$ é denotada por $X_\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i X_i$ com $\mu \in \Lambda_N$ na qual $\Lambda_N \subset \mathbb{R}^N$ é o simplex unitário, que é o conjunto de todos os vetores não-negativos, cuja soma de seus elementos é igual a um.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o sistema θ-periódico com comutação, sujeito à incerteza limitada em norma, dado por

$$\dot{x} = A_\sigma(\theta)x + b_\sigma(\theta) + B_{rq}(\theta)q + B_{rw}(\theta)w, \quad (1)$$
$$p = C_{rp}(\theta)x + H_p q, \quad (2)$$
$$z = C_{rz}(\theta)x, \quad (3)$$
$$q = \Delta p_e, \quad \Delta \in \Sigma, \quad (4)$$

evoluindo de uma condição inicial arbitrária $x(0) = x_0$. Neste sistema $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada externa, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada e $\sigma \in \mathbb{K} := \{1, ..., N\}$ é a função de comutação que seleciona a cada instante de tempo um dos N subsistemas disponíveis. Os vetores $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ e $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ são variáveis internas e p_e depende de p como será apresentado posteriormente. A matriz Δ representa a incerteza paramétrica pertencente ao conjunto Σ assim definido

$$\Sigma = \{\Delta \in \mathbb{R}^{n_q \times n_p} \ : \ \|\Delta\|_\infty^2 < \gamma^{-1}\}, \quad (5)$$

no qual $\gamma > 0$.

As funções matriciais $A_i(\theta)$ e $b_i(\theta)$ são periódicas e contínuas com relação ao parâmetro $\theta \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, com período θ_P definido como

$$\theta_P = \min\{\hat{\theta} > 0 : A_i(\theta + \hat{\theta}) = A_i(\theta), b_i(\theta + \hat{\theta}) = b_i(\theta), \ i \in \mathbb{K}\}.$$

Para facilitar a notação, Θ_P denota o intervalo $\Theta_P = [0, \theta_P]$. É suposto que θ é uma função diferenciável tal que $\dot{\theta} \in \Theta_D$ com

$$\Theta_D = \{\dot{\theta} \in \mathbb{R} \ : \ \underline{\omega} \leq \dot{\theta} \leq \overline{\omega}, \ \underline{\omega}, \ \overline{\omega} \in \mathbb{R}\}. \quad (6)$$

Considerando que $x_e(t, \theta)$ é a trajetória de referência a ser rastreada, e adotando a variável auxiliar $\xi(t) = x(t) - x_e(t, \theta)$, o sistema (1)-(4) pode ser escrito de forma equivalente como

$$\dot{\xi} = A_\sigma(\theta)\xi + \ell_\sigma(t, \theta, \dot{\theta}) + B_{rq}(\theta)q + B_{rw}(\theta)w, \quad (7)$$
$$p_e = C_{rp}(\theta)\xi + H_p q, \quad (8)$$
$$z_e = C_{rz}(\theta)\xi \quad (9)$$
$$q = \Delta p_e, \quad \Delta \in \Sigma, \quad (10)$$

no qual $\ell_i(t, \theta, \dot{\theta}) = A_i(\theta)x_e(t, \theta) + b_i(\theta) - \dot{x}_e(t, \theta, \dot{\theta})$, $z_e(t) = z(t) - C_{rz}(\theta)x_e(t, \theta)$, $p_e(t) = p(t) - C_{rq}(\theta)x_e(t, \theta)$ e $\xi(0) = x_0 - x_e(0, \theta(0))$.

Os vetores (q, p_e) podem ser eliminados, levando à seguinte equação dinâmica

$$\dot{\xi} = \tilde{A}_\sigma(\theta)\xi + \ell_\sigma(t, \theta, \dot{\theta}) + B_{rw}(\theta)w \quad (11)$$

com

$$\tilde{A}_i(\theta) = A_i(\theta) + B_{rq}(\theta)(I - \Delta H_p)^{-1}\Delta C_{rp}(\theta) \quad (12)$$

que coloca em evidência a dependência fracionária do sistema com relação à incerteza $\Delta \in \Sigma$.

Nosso objetivo principal é projetar uma função de comutação robusta dependente do estado $\sigma(t) = u(\xi, t, \theta, \dot{\theta})$ para assegurar estabilidade assintótica da origem do sistema incerto (7)-(10) sujeito a $\Delta \in \Sigma$. Isto é equivalente a assegurar rastreamento assintótico de uma trajetória de referência pré-especificada $x_e(t, \theta)$, pois $\xi(t) \to 0$ sempre que $x(t) \to x_e(t, \theta)$. Além disso, o projeto de controle deve levar em conta o índice de desempenho $\mathcal{H}_2$, definido em Geromel et al. (2008), como

$$J_2(\sigma) = \max_{\Delta \in \Sigma} \sum_{k=1}^{n_w} \|z_e^k\|_2^2, \quad (13)$$

no qual z_e^k é a resposta do sistema quando $\xi(0) = 0$ e a entrada externa é impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$, sendo e_k a k-ésima coluna da matriz identidade e δ a função impulso. Na verdade, desejamos minimizar um limitante superior adequado de (13), pois o problema de otimização $\min_\sigma J_2(\sigma)$ é virtualmente impossível de ser resolvido dado a sua natureza não convexa.

Antes de apresentar nosso resultado principal, algumas definições e hipóteses de Deaecto et al. (2024a) são repetidas na sequência. A função matricial periódica $R : \mathbb{R} \to$

[1] do inglês Linear Fractional Transformation
[2] do inglês Linear Matrix Inequalities
[3] do inglês Permanent Magnet Synchronous Machine

$\mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ com período θ_P satisfaz as seguintes propriedades para $\theta \in \mathbb{R}$:

$$R(\theta)'R(\theta) = I, \quad \dot{R}(\theta) := \frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta}\dot{\theta} = R(\theta)\Omega(\dot{\theta}), \tag{14}$$

na qual a matriz $\Omega(\dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é anti-simétrica e linear com relação a $\dot{\theta}$.

Hipótese 1. Existe $\lambda(t, \theta, \dot{\theta}) \in \Lambda$ tal que:

a) A trajetória $x_e(t, \theta)$ satisfaz a igualdade
$$\ell_\lambda(t, \theta, \dot{\theta}) = 0, \tag{15}$$
para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \Theta_P$ e $\dot{\theta} \in \Theta_D$.

b) O vetor λ que satisfaz (15) leva a uma combinação convexa de $A_i(\theta)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, satisfazendo a identidade
$$A_\lambda(\theta) = R(\theta)A_R R(\theta)', \tag{16}$$
com $A_R \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ sendo uma matriz constante adequada.

Além destas hipóteses, também consideradas em Deaecto et al. (2024a), vamos assumir as seguintes estruturas para as matrizes de entrada e saída

$$\begin{bmatrix} B_{rq}(\theta) \\ B_{rw}(\theta) \end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix} B_q \\ B_w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_{rp}(\theta) \\ C_{rz}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p \\ C_z \end{bmatrix} R(\theta)', \tag{17}$$

nos quais B_q, B_w, C_p e C_z são matrizes constantes.

3. RESULTADO PRINCIPAL

Como usual, o sistema (7) evoluindo da origem $\xi = 0$ e sujeito à entrada externa impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$ pode ser reescrito como

$$\dot{\xi} = A_\sigma(\theta)\xi + \ell_\sigma(t, \theta, \dot{\theta}) + B_{rq}(\theta)q, \tag{18}$$

com condição inicial $\xi(0^+) = R(\theta(0))B_w e_k$. Neste trabalho adotamos a candidata à função de Lyapunov dependente de parâmetro

$$v(\xi, \theta) = \xi' P(\theta)\xi, \tag{19}$$

com matriz

$$P(\theta) = R(\theta)P_R R(\theta)' \tag{20}$$

e $P_R > 0$. A função de comutação robusta é fornecida no próximo teorema.

Teorema 1. Considere a função matricial periódica $R(\theta)$ satisfazendo (14), o conjunto Θ_D definido em (6) e assuma que a trajetória de referência $x_e(t, \theta)$ satisfaz as hipóteses (15)-(17) para o sistema (7)-(10). Se existir uma matriz $P_R > 0$ e um escalar $\gamma > 0$ solução das LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P_R\mathcal{A}_R(\underline{\omega})\} & \bullet & \bullet & \bullet \\ B_q'P_R & -\gamma I & \bullet & \bullet \\ C_p & H_p & -I & \bullet \\ C_z & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P_R\mathcal{A}_R(\overline{\omega})\} & \bullet & \bullet & \bullet \\ B_p'P_R & -\gamma I & \bullet & \bullet \\ C_p & H_p & -I & \bullet \\ C_z & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

com $\mathcal{A}_R(\omega) = A_R + \Omega(\omega)'$ então, a função de comutação $\sigma(t) = u(t, \xi, \theta, \dot{\theta})$ dada por

$$u(\cdot) = \arg\min_{i \in \mathbb{K}} \xi'\mathrm{He}\{P(\theta)A_i(\theta)\}\xi + 2\xi' P(\theta)\ell_i(t, \theta, \dot{\theta})) \tag{23}$$

assegura estabilidade assintótica da origem $\xi = 0$ ou, equivalentemente, rastreamento assintótico da trajetória $x_e(t, \theta)$. Além disso, a seguinte desigualdade

$$J_2(\sigma) < \mathrm{Tr}(B_w'P_R B_w) \tag{24}$$

é válida.

Prova: Considere o sistema (7)-(10) evoluindo de $\xi = 0$, com $w(t) = \delta(t)e_k$, e a equação dinâmica reescrita alternativamente como (18). A derivada no tempo da função de Lyapunov (19) para uma trajetória arbitrária deste sistema, governada pela função de comutação $\sigma(t) = u(t, \xi, \theta, \dot{\theta})$ definida em (23) fornece

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi, \theta) &= \frac{\partial v(\xi, \theta)'}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial v(\xi, \theta)'}{\partial \theta}\dot{\theta} \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi \\ q \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P(\theta)A_i(\theta)\} + \dot{P}(\theta) & \bullet & \bullet \\ B_q(\theta)'P(\theta) & 0 & \bullet \\ \ell_i'P(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ q \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P(\theta)A_\lambda(\theta)\} + \dot{P}(\theta) & \bullet \\ B_q(\theta)'P(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

na qual a segunda igualdade e a primeira desigualdade são consequências da função de comutação (23) e do operador mínimo, respectivamente. Também foi usado o fato de que $\ell_\lambda = 0$ devido a hipótese (15).

Por outro lado, de (5) e (10) nós obtemos a desigualdade $p'p - \gamma q'q > 0$ e, portanto,

$$\begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{rp}(\theta)'C_{rp}(\theta) & \bullet \\ H_p'C_{rp}(\theta) & H_p'H_p - \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix} > 0. \tag{26}$$

Além disso, note que a dependência linear de $\Omega(\dot{\theta})$ com relação a $\dot{\theta}$ permite escrever $\Omega(\theta) = \alpha\Omega(\underline{\omega}) + (1 - \alpha)\Omega(\overline{\omega})$ para $\alpha \in [0, 1]$ e, portanto, checar (21) e (22) nos extremos deste conjunto é o mesmo que checar a desigualdade

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P_R\mathcal{A}_R(\dot{\theta})\} & \bullet & \bullet & \bullet \\ B_q'P_R & -\gamma I & \bullet & \bullet \\ C_p & H_p & -I & \bullet \\ C_z & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{27}$$

para todo $\dot{\theta} \in \Theta_D$. Agora, multiplicando (27) pela esquerda por $\mathrm{diag}(R(\theta), I, I, I)$ e pela direita pelo seu transposto, o primeiro bloco da diagonal principal fica

$$R(\theta)\mathrm{He}\{P_R\mathcal{A}_R(\dot{\theta})\}R(\theta)' = \mathrm{He}\{P(\theta)A_\lambda(\theta)\} + \dot{P}(\theta). \tag{28}$$

De fato, de (14), (16) e (20) temos

$$R(\theta)P_R A_R R(\theta)' = R(\theta)P_R R(\theta)'R(\theta)A_R R(\theta)' = P(\theta)A_\lambda(\theta)$$

e $\dot{P}(\theta) = R(\theta)\mathrm{He}\{P_R\Omega(\dot{\theta})'\}R(\theta)'$. Utilizando as estruturas (17) e aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas da desigualdade resultante, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P(\theta)A_\lambda(\theta)\} + \dot{P}(\theta) + Q(\theta) & \bullet \\ B_{rq}(\theta)'P(\theta) + H_p'C_{rp}(\theta) & H_p'H_p - \gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{29}$$

com $Q(\theta) = C_{rp}(\theta)'C_{rp}(\theta) + C_{rz}(\theta)'C_{rz}(\theta)$ no qual foi usado o fato que

$$B_q'P_R R(\theta)' = B_q'R(\theta)'R(\theta)P_R R(\theta)' = B_{rq}(\theta)'P(\theta). \tag{30}$$

Logo, a factibilidade das desigualdades (21)-(22) implica que (29) também é factível. Portanto, de (25) e (29) temos

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi, \theta) &\leq \begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathrm{He}\{P(\theta)A_\lambda(\theta)\} + \dot{P}(\theta) & \bullet \\ B_{rq}(\theta)'P(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix} \\ &< -\begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{rp}(\theta)'C_{rp}(\theta) & \bullet \\ H_p'C_{rp}(\theta) & H_p'H_p - \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ q \end{bmatrix} - z_e'z_e \\ &< -z_e'z_e, \end{aligned} \tag{31}$$

A primeira desigualdade vem de (25) e a segunda e terceira desigualdades são consequências diretas de (29) e (31), respectivamente. Integrando ambos os lados de (31) de

$t = 0$ a $t \to \infty$ temos que $\|z_e^k\|_2^2 < v(\xi(0), \theta(0)) = \xi(0)'P(\theta(0))\xi(0)$ com $\xi(0) = R(\theta(0))B_w e_k$ e, portanto, da definição do índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ obtemos

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &= \max_{\Delta\in\Sigma} \sum_{k=1}^{n_w} \|z_e^k\|_2^2 \\ &< \sum_{k=1}^{n_w} e_k' B_w' P_R B_w e_k \\ &= \mathrm{Tr}(B_w' P_R B_w), \end{aligned} \tag{32}$$

o que conclui a prova. □

Este teorema fornece condições LMIs para tratar controle robusto de sistemas θ-periódicos com comutação sujeitos a incerteza limitada em norma, um tópico ainda não explorado na literatura mesmo para o caso mais simples em que o par $(A_i(\theta), b_i(\theta))$ é independente de θ. Como uma alternativa para assegurar robustez para esta classe de sistemas, a referência Deaecto et al. (2024b) propôs uma estratégia baseada no controle do tipo integral, mas somente para o caso em que θ é uma função afim do tempo e sem considerar índice de desempenho. Além disso, naquela abordagem não é possível estabelecer para qual conjunto de incertezas o controle integral é efetivo em assegurar rastreamento assintótico. Em contraste, no Teorema 1 o conjunto de incertezas admissíveis $\Delta \in \Sigma$ é um parâmetro de projeto; um índice $\mathcal{H}_2$ é adotado para assegurar um nível adequado de desempenho e, o parâmetro θ pode ser dependente do tempo ou do estado. Vale ressaltar que quando θ é dependente do tempo as condições do Teorema 1 são globais, mas somente locais quando θ é dependente do estado. Isto é uma consequência do fato que $\dot{\theta}$ deve pertencer ao conjunto Θ_D.

4. APLICAÇÃO A SISTEMAS ELÉTRICOS

Considere as funções vetoriais

$$f(\theta) = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \sin(\theta - 2\pi/3) \\ \sin(\theta - 4\pi/3) \end{bmatrix}, \; g(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 4\pi/3) \end{bmatrix} \tag{33}$$

que são importantes para descrever os sistemas elétricos em consideração, e a matriz

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3}f(\theta) & \sqrt{2/3}g(\theta) & \sqrt{1/3}h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

com $h = [1\ 1\ 1]'$ que satisfaz as propriedades (14) com

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Na sequência os sistemas elétricos a saber, um conversor trifásico CA-CC e uma máquina síncrona de ímã permanente, são estudados separadamente.

4.1 Conversor CA-CC

Este exemplo foi retirado de Deaecto et al. (2024b). O modelo matemático do conversor trifásico é dado por

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}_{\sigma(t)}x(t) + b(\theta(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{36}$$

no qual o vetor de estado $x(t) = [i_\phi(t)' \quad v_o(t)]' \in \mathbb{R}^4$ é formado pelas correntes de fase $i_\phi(t) = [i_a(t)\ i_b(t)\ i_c(t)]' \in \mathbb{R}^3$ e pela tensão de saída $v_o(t) \in \mathbb{R}$; $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ é o ângulo elétrico, suposto conhecido, com frequência angular constante ω; e o par $(\tilde{A}_i, b(\theta))$ é dado por

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} -(R_L/L)I_3 & -(1/L)S_i \\ (1/C)S_i' & -1/(R_oC) \end{bmatrix}, b(\theta) = \begin{bmatrix} (1/L)v_\phi(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

no qual R_L e L são a resistência e a indutância de cada indutor acoplado, C é a capaciância, R_o é a resistência da carga e $v_\phi(\theta) = v_m f(\theta)$ é a tensão de entrada. A Tabela 1 fornece a função de comutação $\sigma(t) \in \mathbb{K} = \{1, \cdots, 7\}$ e a sua relação com os vetores $S_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \mathbb{K}$, veja Deaecto et al. (2024b) para mais detalhes.

Tabela 1. Função de comutação σ, e vetor S_i

σ	S_σ'
1	[-1/3 -1/3 2/3]
2	[-1/3 2/3 -1/3]
3	[-2/3 1/3 1/3]
4	[2/3 -1/3 -1/3]
5	[1/3 -2/3 1/3]
6	[1/3 1/3 -2/3]
7	[0 0 0]

Tabela 2. Parâmetros do conversor CA-CC e do PMSM

Conversor CA-CC		PMSM	
R_N	175 Ω	R_L	2.19 Ω
R_L	0.56 Ω	L	8.10 mH
L	19.5 mH	λ_M	6.02×10^{-2} V.s/rad
ω	$2\pi \times 50$ rad/s	c_N	4.16×10^{-4} N.m.s/rad
C	2.35 mF	τ_M	7.90×10^{-3} V
v_m	40.825 V	J_M	3.71×10^{-4}kg.m^2
-	-	V_{dc}	100 V
-	-	n_p	4

No nosso contexto, vamos considerar que a resistência da carga R_o é um parâmetro incerto tal que

$$R_o/R_N \in [1 - d, 1 + d] \tag{37}$$

com $d \in [0, 1]$, no qual R_N é a resistência nominal. Neste caso, o sistema incerto (12) é definido pelas matrizes

$$A_i = \begin{bmatrix} -(R_L/L)I_3 & -(1/L)S_i \\ (1/C)S_i' & -1/(R_NC) \end{bmatrix}, B_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/(R_NC) \end{bmatrix}$$

$$C_p = [0\ 0\ 0\ d], \; H_p = -d$$

Note que a incerteza apresenta a estrutura LFT.

Adotamos $B_w = -R(0)^{-1}x_e(0)$, que indica que a condição inicial do sistema (1)-(4), após o impulso, é $x(0^+) = 0$.

Nosso objetivo é rastrear a trajetória

$$x_e(\theta(t)) = \begin{bmatrix} i_* f(\theta(t)) \\ v_{o*} \end{bmatrix} \tag{38}$$

que é responsável por regular a tensão de saída em um valor desejado v_{o*}, assegurando fator de potência unitário.

De acordo com o Corolário 3.1 de Deaecto et al. (2024b), o par (i_*, v_{o*}) deve pertencer ao conjunto

$$X_e = \mathcal{E}_1 \bigcap \mathcal{E}_2 \tag{39}$$

no qual

$$\mathcal{E}_1 = \{(i_*, v_{o*}) : (v_m - R_L i_*)^2 + (L\omega i_*)^2 \le v_{o*}^2/3\}$$
$$\mathcal{E}_2 = \{(i_*, v_{o*}) : R_L i_*^2 - v_m i_* + 2v_{o*}^2/(3R_N) = 0\}$$

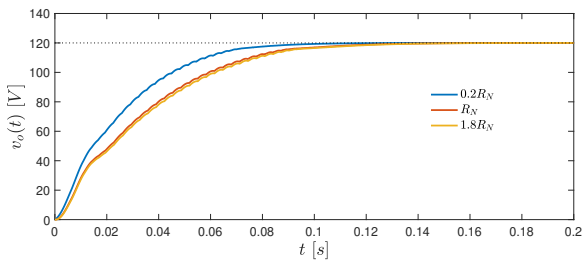

Figura 1. Conversor CA-CC: Tensões de saída.

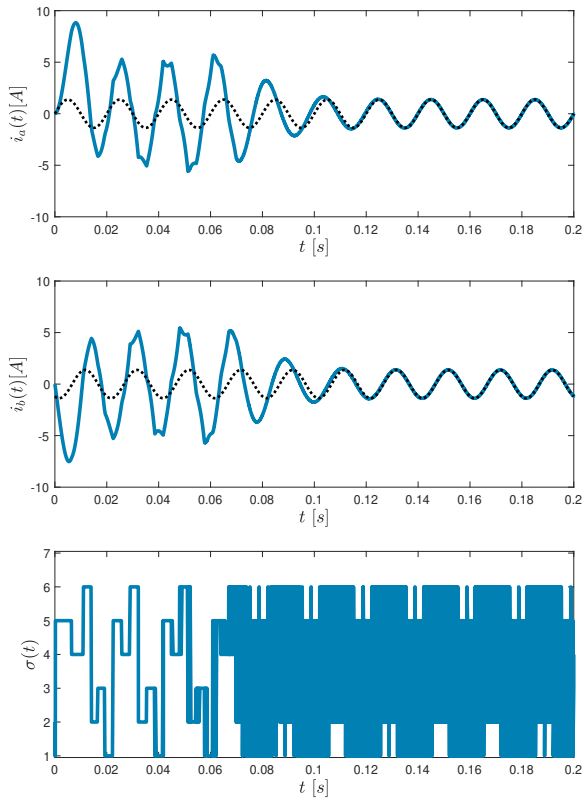

Figura 2. CA-CC converter: Correntes de fase e função de comutação para $R_o = 0.2R_N$.

para satisfazer a hipótese (15) e a matriz A_R é

$$A_R = \begin{bmatrix} -R_L/L & 0 & 0 & \beta v_d/L \\ 0 & -R_L/L & 0 & \beta\omega i_* \\ 0 & 0 & -R_L/L & 0 \\ -\beta v_d/C & -\beta L\omega i_*/C & 0 & -1/(R_N C) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

com $\beta = \sqrt{6}/(2v_{o*})$ and $v_d = R_L i_* - v_m$, para satisfazer a hipótese (16).

Usando os valores numéricos da Tabela 2, e considerando o parâmetro incerto R_o dado em (37) para $d = 0.8$, nosso objetivo é regular a tensão de saída em $v_{o*} = 120$ [V] associada a $i_* = 1.3694$ [A] cujo par (v_{o*}, i_*) pertence ao conjunto (39). Resolvendo as condições do Teorema 1 para $\gamma = 1$ obtivemos um custo garantido de $J_2(\sigma) < 3267.07$ e a matriz $P_R > 0$ usada para implementar a função de comutação. A Figura 1 apresenta as tensões de saída resultantes para $R_o \in \{0.2R_N, R_N, 1.8R_N\}$ e a Figura 2 fornece as correntes de fase $i_a(t)$, $i_b(t)$ e a função de comutação para $R_o = 0.2R_N$. Em ambas as figuras, as linhas pontilhadas indicam a trajetória de referência $x_e(\theta)$. Comparando com os resultados de Deaecto et al. (2024b) notamos uma resposta transitória mais rápida e mais suave (sem sobrelevação) para um intervalo maior de perturbação (naquela referência foi considerado $R_o \in \{0.7R_N, 1.3R_N\}$). As figuras apresentadas mostram a validade e a eficiência da técnica de controle proposta.

4.2 PMSM

O modelo do PMSM foi retirado de Deaecto et al. (2024a) e é dado por

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(\theta(t))x(t) + b_{\sigma(t)}, \; x(0) = x_0 \quad (41)$$

$$\dot{\theta}(t) = n_p\omega_M(t), \; \theta(0) = \theta_0 \quad (42)$$

no qual $x(t) = [i_\phi(t)' \; \omega_M(t)]' \in \mathbb{R}^4$ é o estado, formado pelas correntes de fase $i_\phi(t) = [i_a(t) \; i_b(t) \; i_c(t)]' \in \mathbb{R}^3$ e a velocidade angular do eixo da máquina ω_M. O par $(\tilde{A}(\theta), b_i)$ é dado por

$$\tilde{A}(\theta) = \begin{bmatrix} -(R_L/L)I_3 & -\lambda_M f(\theta)/L \\ \lambda_M f(\theta)'/J_M & -c_M/J_M \end{bmatrix}, \; b_i = \begin{bmatrix} V_{dc}S_i/L \\ -\tau_M/J_M \end{bmatrix}$$

no qual R_L e L são a resistência e a indutância equivalente por fase, respectivamente, J_M é o momento de inércia do rotor, λ_M é o valor de pico do fluxo mútuo concatenado, c_M é o coeficiente de atrito viscoso e τ_M é a torque externo constante. A posição angular do eixo está relacionada com o ângulo elétrico por $\theta_M = \theta/n_p$ em que n_p é o número de par de polos da máquina. Como no caso do conversor, $\sigma(t) \in \mathbb{K} = \{1, \cdots, 7\}$ e os vetores $S_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \mathbb{K}$, se relacionam como apresentado na Tabela 1.

Considere que o coeficiente de atrito viscoso c_M é um parâmetro incerto tal que

$$c_M/c_N \in [1 - d, 1 + d] \quad (43)$$

com $d \in [0, 1]$, no qual c_N é o coeficiente de atrito viscoso nominal. O sistema incerto (12) é dado por

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -(R_L/L)I_3 & -\lambda_M f(\theta)/L \\ \lambda_M f(\theta)'/J_M & -c_N/J_M \end{bmatrix}, B_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_N/J_M \end{bmatrix}$$

$$C_p = [0 \; 0 \; 0 \; d], \; H_p = 0$$

Como anteriormente, adotamos $B_w = -R(0)^{-1}x_e(0)$ indicando que o sistema (1)-(4) evolui da origem $x(0^+) = 0$.

Nosso objetivo é rastrear a trajetória de referência

$$x_e(t, \theta) = \begin{bmatrix} i_*(t)f(\theta(t)) \\ \omega_{M*}(t) \end{bmatrix}. \quad (44)$$

De acordo com o Corolário 2 de Deaecto et al. (2024a), esta corrente de referência com

$$i_*(t) = \frac{2(c_N\omega_{M*}(t) + J_M\dot{\omega}_{M*}(t) + \tau_M)}{3\lambda_M} \quad (45)$$

e qualquer perfil de velocidade ω_{M*} pertencente, pontualmente no tempo, ao conjunto

$$\mathcal{C}_* = \left\{\omega_M : \Delta(\omega_M)'(\psi\psi' + \kappa^2\varphi\varphi')\Delta(\omega_M) \leq \frac{3(\lambda_M V_{dc})^2}{4}\right\} \quad (46)$$

no qual $\kappa = \max\{|\underline{\omega}|, |\overline{\omega}|\}$ e

$$\psi = [R_L c_N + 3\lambda_M^2/2J_M R_L + L c_N J_M L R_L]'$$

$$\varphi = [L c_N \; J_M L \; 0 \; L]'$$

$$\Delta(\omega_M) = [\omega_M \; \dot{\omega}_M \; \ddot{\omega}_M \; \tau_M]'$$

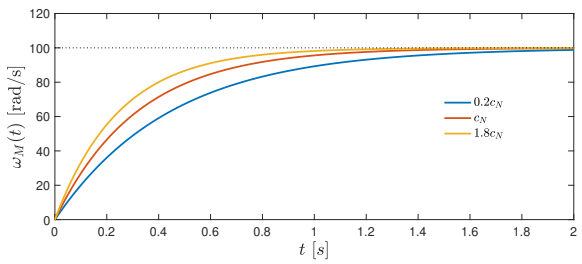

Figura 3. PMSM: Velocidades angulares.

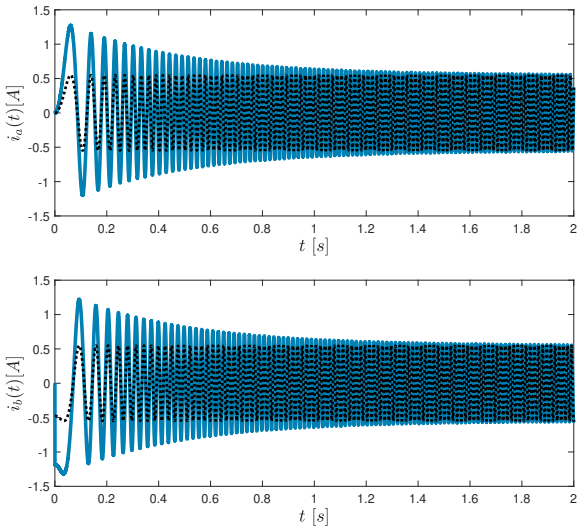

Figura 4. PMSM: Correntes de fase para $R_o = 0.2R_N$.

satisfaz a hipótese (15). Ademais, a seguinte matriz

$$A_R = \begin{bmatrix} -R_L/L & 0 & 0 & -\beta/L \\ 0 & -R_L/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_L/L & 0 \\ \beta/J_M & 0 & 0 & -c_N/J_M \end{bmatrix} \tag{47}$$

com $\beta = \sqrt{6}\lambda_M/2$ satisfaz a hipótese (16).

Usamos os valores numéricos da Tabela 2 e consideramos o coeficiente de atrito viscoso c_M incerto satisfazendo (43) com $d = 0.8$. O conjunto Θ_D é tal que $|\dot{\theta}| < 800$ rad/s, que é equivalente a $|\omega_M| < 200$ rad/s, e a trajetória de referência adotada é o degrau $\omega_{M*}(t) = 100$ rad/s. Resolvendo as condições do Teorema 1 para $\gamma = 1$, obtivemos um custo garantido de $J_2(\sigma) < 5659.54$ e a matriz $P_R > 0$ usada para implementar a função de comutação. A Figura 3 apresenta as velocidades angulares para $c_M \in \{0.2c_N, c_N, 1.8c_N\}$ e a Figura 4 mostra as correntes de fase associadas $i_a(t)$, $i_b(t)$ para $c_M = 0.2c_N$. Em ambas as figuras as linhas pontilhadas representam a trajetória de referência $x_e(t, \theta)$. A velocidade angular $n_p\omega_M(t)$ pertence ao conjunto Θ_D e a função de comutação foi eficiente em assegurar rastreamento assintótico para um grande intervalo de incertezas.

5. CONCLUSÃO

Neste artigo, estudamos controle robusto de sistemas θ-periódicos com comutação sujeitos à incerteza limitada em norma. As condições de projeto permitem considerar incerteza estruturada como transformação linear fracionária e são expressas por LMIs. Um custo garantido $\mathcal{H}_2$ foi adotado para assegurar um desempenho adequado para o sistema global. A teoria foi validada no controle de um conversor trifásico CA-CC com resistência de carga incerta e de uma máquina PMSM com coeficiente de atrito viscoso incerto. Para o conversor CA-CC, o controle robusto foi comparado com o controle integral e apresentou um desempenho melhor, mesmo para um intervalo maior de incertezas. Como perspectiva de trabalho futuro desejamos tratar sistemas sujeitos a incertezas politópicas.

REFERÊNCIAS

Baldi, S., Papachristodoulou, A., and Kosmatopoulos, E.B. (2018). Adaptive pulse width modulation design for power converters based on affine switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 30, 306–322.

Beneux, G., Astolfi, D., Riedinger, P., Daafouz, J., and Grimaud, L. (2018). Integral action for uncertain switched affine systems with application to DC/DC converters. In *European Control Conference (ECC)*, 795–800.

Beneux, G., Riedinger, P., Daafouz, J., and Grimaud, L. (2019). Adaptive stabilization of switched affine systems with unknown equilibrium points: Application to power converters. *Automatica*, 99, 82–91.

Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *IEEE Am. Contr. Conf.*, volume 5, 3890–3895.

Deaecto, G.S., Costanzo, L.C., and Egidio, L.N. (2024a). Trajectory tracking for a class of θ-periodic switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(3), 1874–1881.

Deaecto, G.S., Egidio, L.N., and Costanzo, L.C. (2024b). Trajectory tracking with integral action of switched periodic affine systems. *International Journal of Systems Science*, 55(6), 1156—-1166.

Deaecto, G.S., Geromel, J.C., and Brito, J.L. (2022). Asymptotic stability of continuous-time switched affine systems with unknown equilibrium points. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, 679–684. IEEE.

Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F.S., and Pomilio, J.A. (2010). Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. *IET Control Theory & Applications*, 4(7), 1201–1210.

Garcia, G. and Lopez Santos, O. (2021). A unified approach for the control of power electronics converters. part i—stabilization and regulation. *Applied Sciences*, 11(2), 631.

Geromel, J.C., Colaneri, P., and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 53(3), 720–733.

Scharlau, C.C., De Oliveira, M.C., Trofino, A., and Dezuo, T.J. (2014). Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. *Systems & Control Letters*, 68, 1–8.

Sinafar, B., Badamchizadeh, M.A., Kharrati, H., and Baradarannia, M. (2023). Current sharing and voltage regulation of parallel DC-DC buck converters: Switching control approach. *ISA Transactions*, 1–13.

Sinafar, B., Kharrati, H., Badamchizadeh, M.A., and Baradarannia, M. (2020). Distributed adaptive switching control of uncertain switched affine multi-agent systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 38, 100941.