Controle Preditivo Não Linear LPV usando Restrições Integrais-Quadráticas (IQCs) ⋆

Marcelo M. Morato *,**

* *Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Controle e Automação de Processos de Energia (*INCT CAPE*), Dept. de Automação e Sistemas (*DAS*), Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil.*
** *Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP*$^{\top}$*, GIPSA-lab, 38000 Grenoble, France.* $\top$*Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes.*

Abstract: In this brief paper, we discuss how to synthesise MPC terminal ingredients using IQCs for LPV systems. In particular, we recap results for sector-bounded Lur'e systems and propose model adaptations to encompass the LPV case. We also discuss the main LPV scheduling trajectory estimation approaches. Numerical results indicate the promising outcomes of the proposed IQC-and-LPV MPC approach, enabling less conservatism wider regions of attraction.

Resumo: Investigamos o projeto de controladores preditivos usando restrições integrais-quadráticas (IQCs) para sistemas Lineares a Parâmetros Variantes (LPV). Especificamente, recapitulamos o procedimento de síntese para sistemas não lineares Lur'e (restringidos por setor) e propomos adaptações na modelagem para incorporar o caso LPV (mais abrangente). Também discutimos as principais abordagens para estimar os parâmetros de agendamento online. Através de simulações numéricas, demonstramos como a abordagem MPC IQC-e-LPV permite um desempenho de controle menos conservador, associado a regiões de atração com maior volume.

Keywords: Model Predictive Control; LPV systems; Integral Quadratic Constraints.
Palavras-chaves: Controle Preditivo; Sistemas LPV; Restrições Integrais-Quadráticas.

1. CONTEXTO

Controle preditivo baseado em modelo (MPC) é uma técnica para a regulação de processos dinâmicos amplamente investigada na literatura (Camacho and Bordons, 2013). Garantias teóricas de estabilidade e factibilidade recursiva da otimização podem ser demonstradas através da metodologia seminal de Mayne et al. (2000). Tal ferramental para o projeto de MPCs estabilizantes consiste na inclusão dos chamados *ingredientes terminais* [1] ao problema de otimização, de tal forma que argumentos típicos de Lyapunov possam ser empregados para análise da malha fechada.

Recentemente, apresentamos uma nova abordagem para o projeto desses elementos (Morato et al., 2023), considerando sistemas não lineares do tipo Lur'e: propusemos a síntese dos argumentos estabilizantes via restrições integrais-quadráticas (IQCs) ponto-a-ponto [2]. Usando as IQCs no domínio do tempo de Scherer (2022), caracterizamos uma variante dos multiplicadores de O'Shea-Zames-Falb para laços Lur'e compostos por não linearidades limitadas por setor e derivada, possibilitando, portanto, o cômputo de ingredientes terminais para MPCs via LMIs.

No presente artigo, estendemos o resultado prévio oara sistemas Lineares a Parâmetros Variantes (LPV). O desenvolvimento de algoritmos LPV MPC é de grande interesse prático, uma vez que possibilita leis MPC com custo numérico reduzido, tal como apontamos em (Morato et al., 2020). As principais contribuições deste trabalho são: (1) Uma abordagem direta para a re-estruturação de sistemas Lur'e no formato LPV; (2) Ensaios de simulação numérica que demonstram o potencial do método MPC IQC-e-LPV na redução do conservadorismo de controle e na obtenção de regiões de atração de maior volume.

Notação. A matriz identidade $j \times j$ é I_j, enquanto I_{j_i} corresponde a i-ésima linha de I_j. O complemento ortogonal de uma matriz A é dado por $A^{\perp}$. O conjunto de matrizes simétricas é $\mathbb{S}$. Usamos $\mathrm{col}\{v\} := \left[v(0)^T, \ldots, v(L-1)^T\right]^T$ para a vetorização em coluna de v e $\mathrm{diag}\{v\}$ para a matriz diagonal em bloco formada por $\mathrm{col}\{v\}$. O valor *predito* de uma determinada variável $v(k)$ no instante de tempo $k+i$, calculado com base nas informações disponíveis no instante k, é denotado $v(k+i \mid k)$. Em particular, $v(k \mid k) = v(k)$.

2. NMPC ESTABILIZANTE VIA IQCS

Começamos por recapitular o arcabouço teórico-metodológico de (Morato et al., 2023). Para tal, consideramos sistemas Lur'e discretos, modelados, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ e $x(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$, por:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & B_u \\ C & D & D_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{pmatrix}, \; w(k) = \Delta(z)(k). \quad (1)$$

⋆ Financiamento: CAPES, FAPESC (2023TR001506), CNPq (304032/2019 − 0, 403949/2021 − 1, 406477/2022 − 1), e da Comissão Europeia (*Marie Skłodowska-Curie Action* 101149263 *REALOPT4CONTROL*). Contato: marcelo.menezes@ufsc.com.

[1] Um custo, uma restrição e uma lei de controle local associados à predição dos estados do sistema no final do horizonte de predição.

[2] IQCs permitem análise de diversas não lineares através de testes pouco conservadores, cf. (Seiler, 2014; Veenman et al., 2016).

Nq Eq. (1), x é o estado do sistema, u o sinal de controle, ao passo que z e w impõe uma interconexão não linear via $\Delta : \ell_{2e}^{n_z} \to \ell_{2e}^{n_z}$. Doravante, Δ é um considerado um operador conhecido, estático, composto por repetidas funções bijetivas $f : \mathbb{R}^{n_z} \to \mathbb{R}^{n_z}$, limitadas por setor e por derivada. Ademais, assumimos que Δ satisfaz a IQC

$$\xi(k+1)^\top Z\xi(k+1) - \xi(k)^\top Z\xi(k) + y(k)^\top My(k) \geq 0 \quad \text{(IQC)}$$

para um dado filtro LTI Ψ do tipo (2). Especificamente, consideramos a relação entrada-saída $y(z) := \Psi(z)u(z)$.

$$\begin{pmatrix} \xi(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\Psi & B_\Psi \\ C_\Psi & D_\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(k) \\ u(k) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

O operador Δ é descrito por repetidas funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitadas por setor e derivada, ou seja:

$$\Delta(z) := \begin{pmatrix} \phi(z_1) \\ \vdots \\ \phi(z_{n_z}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

O método (Morato et al., 2023) requer que agrupemos a parte linear de (1) com as dinâmicas do filtro Ψ, a fim de abstrair a não linearidade. Por conseguinte, obtemos o estado aumentado $\nu(k) := \mathrm{col}(\xi(k), x(k))$ sujeito a:

$$\begin{pmatrix} \nu(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{B}_u \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{D}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{B}_u \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{D}_u \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{cc|c|c} A_\Psi & B_\Psi \left(\begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & B_\Psi \left(\begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix}\right) & B_\Psi \left(\begin{smallmatrix} D_u \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & A & B & B_u \\ \hline C_\Psi & D_\Psi \left(\begin{smallmatrix} C \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & D_\Psi \left(\begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix}\right) & D_\Psi \left(\begin{smallmatrix} D_u \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{array}\right).$$

Considerando o modelo aumentado, e assumindo que os estados $x(k)$ e $\xi(k)$ são acessíveis $\forall k \geq 0$ (mensuráveis e calculáveis, respectivamente), aplicamos uma lei de controle preditiva $u(k) := \kappa(\nu(k))$ obtida pela solução de uma otimização que incorpora *ingredientes terminais* projetados usando IQCs. Especificamente, para uma função de custo $J_k = J(\nu(k), U_k) := \left(\sum_{j=0}^{N_p-1} \ell(\nu(k+j|k), u(k+j|k))\right) + V(\nu(k+N_p|k))$, consideramos a seguinte otimização para calcular a lei do MPC, a cada amostra k:

$$\min_{U_k} \; J(\nu(k), U_k), \tag{5}$$

$$\text{s.a.} : \begin{cases} \nu(k+j+1|k) = \mathcal{A}\nu(k+j|k) \\ \quad +\mathcal{B}w(k+j|k) + \mathcal{B}_u u(k+j|k), \forall j \in \mathbb{N}_{[0,N_p-1]}, \\ z(k+j|k) = Cx(k+j|k) \\ \quad +Dw(k+j|k) + D_u u(k+j|k), \forall j \in \mathbb{N}_{[0,N_p-1]}, \\ w(k+j|k) = f\left(z(k+j|k)\right), \forall j \in \mathbb{N}_{[0,N_p-1]}, \\ x(k+j|k) \in \mathcal{X}, \forall j \in \mathbb{N}_{[1,N_p]}, \\ u(k+j-1|k) \in \mathcal{U}, \forall j \in \mathbb{N}_{[1,N_p]}, \\ u(k+N_p-1|k) = \kappa_t \nu(k+N_p-1|k), \\ \nu(k+N_p|k) \in \mathbf{X}_t. \end{cases}$$

A variável de decisão de (5) é a sequencia de controle possíveis ao do horizonte de predição de N_p passos, i.e. $U_k := \mathrm{col}\big(u(k|k), \ldots, u(k+N_p-1|k)\big)$. Uma vez que a otimização é resolvida para um dado $\nu(k)$, o primeiro elemento da solução, i.e. $u^\star(k|k)$, define a lei $\kappa(\nu(k))$. As restrições em (5) consideram o modelo aumentado (4), a função não linear f, tal como as regiões de admissibilidade do sistema (conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{U}$). Os **ingredientes terminais** são o ganho $\kappa_t \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, o conjunto $\mathbf{X}_t$ e o custo $V(\cdot)$.

Para analisarmos a estabilidade da malha fechada - (1) com controle MPC (5) -, tal como a factibilidade recursiva da otimização[3], retomamos o arcabouço de Mayne et al. (2000), com as adaptações de (Morato et al., 2023):

Teorema 1. (Estabilidade e factibilidade recursiva) Considere que o custo de etapa $\ell : \mathbb{R}^{n_\nu} \times \mathbb{R}^{n_u} \to \mathbb{R}$ e o custo terminal $V : \mathbb{R}^{n_\nu} \to \mathbb{R}$ são quadráticos, contínuos e definido positivos para todo $x, u \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Ademais, assuma que as condições a seguir são satisfeitas:

(C1) O conjunto terminal $\mathbf{X}_t$ contém a origem.
(C2) O conjunto $\mathbf{X}_t$ é positivo invariante para (4) em malha-fechada com a lei $u(k) = \kappa_t x(k)$.
(C3) O custo de etapa e o custo terminal satisfazem a seguinte desigualdade para as trajetórias de malha-fechada, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, com $\nu(k) \in \mathbf{X}_t$:
$$V(\nu(k+1)) - V(\nu(k)) \leq -\ell(\nu(k), \kappa_t x(k)).$$
(C4) A lei de controle terminal é admissível, ou seja, para qualquer $\nu = \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ x \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{X}_t$, obtemos $\kappa_t x \in \mathcal{U}$.
(C5) O conjunto terminal é admissível, ou seja, para qualquer $\nu = \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ x \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{X}_t$, obtemos $x \in \mathcal{X}$.

Então, o MPC (5) é recursivamente factível e garante que as dinâmicas em malha-fechada sejam estáveis.

Considerando um custo de etapa quadrático $\ell(x, u) := x^\top Qx + u^\top Ru$, sendo Q e R ponderações definida-positivas, e conjuntos tipo caixa - $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : -\bar{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ e $\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R}^{n_u} : -\bar{u} \leq u \leq \bar{u}\}$ -, o teste via IQCs a seguir permite verificarmos as condições do Teorema 1.

Teorema 2. (Teste usando IQCs (Morato et al., 2023)) Considere que $\kappa_t \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\nu}$ é um ganho estático conhecido e que o operador Δ satisfaz (IQC) para um dado filtro Ψ e matrizes $Z \in \mathbb{S}^{n_\xi}$ e $M \in \mathbb{S}^m$. Portanto, desde que exista uma matriz $\mathfrak{X} = \left(\begin{smallmatrix} X_\Psi & W \\ \star & X \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{S}^{n_\xi + n_x}$ que satisfaça as desigualdades a seguir $\forall j \in \mathbb{N}_{[1,n_x]}, \forall i \in \mathbb{N}_{[1,n_u]}$:

$$(\star) \left(\begin{array}{cc|c|cc} \mathfrak{X} & 0 & & & \\ 0 & -\mathfrak{X} & & & \\ \hline & & M & & \\ \hline & & & Q & 0 \\ & & & 0 & R \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} A_\Psi & B_\Psi \left(\begin{smallmatrix} C+D_u\kappa_t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & B_\Psi \left(\begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & A + B_u\kappa_t & B \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hline C_\Psi & D_\Psi \left(\begin{smallmatrix} C+D_u\kappa_t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & D_\Psi \left(\begin{smallmatrix} D \\ I \end{smallmatrix}\right) \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & \kappa_t & 0 \end{array}\right) < 0, \tag{6a}$$

$$\begin{pmatrix} X_\Psi - Z & W \\ \star & X \end{pmatrix} > 0, \tag{6b}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} X_\Psi - Z & W & 0 \\ \star & X & I_{n_x,j} \\ \hline 0 & \star & \bar{x}_j^2 \end{array}\right) > 0 \;\text{ e }\; \left(\begin{array}{cc|c} X_\Psi - Z & W & 0 \\ \star & X & \kappa_t^\top I_{n_u,i} \\ \hline 0 & \star & \bar{u}_i^2 \end{array}\right) > 0 \tag{6c}$$

Logo, as condições do Teo. 1 serão válidas considerando $V(\nu) := \nu^\top \left(\begin{smallmatrix} X_\Psi - Z & W \\ \star & X \end{smallmatrix}\right) \nu$ e $\mathbf{X}_t := \nu^\top \left(\begin{smallmatrix} X_\Psi - Z & W \\ \star & X \end{smallmatrix}\right) \nu \leq 1\}$.

Dado um ganho terminal κ_t, podemos usar o Teorema 2 para testar se o sistema será estável em malha-fechada. Precisamos, entretanto, retomar a caracterização de multiplicadores O'Shea-Zames-Falb referentes a (IQC) para que possamos recapitular a síntese completa dos ingredientes terminais usando IQCs proposta em (Morato et al., 2023).

Teorema 3. (Multiplicadores O'Shea-Zames-Falb) Considere $\psi(z) := I_{n_w} \otimes (\frac{1}{z^l}, \ldots, \frac{1}{z}, 1)^\top$ para um dado número de

[3] Factibilidade recursiva significa que $\exists U_0^\star \implies$ existe $U_k \forall k \geq 0$.

passos l. Assumimos que a seguinte realização é numericamente análoga: $[I_{n_w} \otimes J_l, I_{n_w} \otimes e_l, I_{n_w} \otimes C_l, I_{n_w} \otimes e_{l+1}]$, na qual $e_l := \left(\begin{smallmatrix} 0_{l-1} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C_l := \left(\begin{smallmatrix} I_l \\ 0_{1\times l} \end{smallmatrix}\right)$, $e_{l+1} := \left(\begin{smallmatrix} 0_l \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, sendo $J_l \in \mathbb{R}^{l\times l}$ um bloco Jordan superior com auto-valor nulo. Logo, satisfaz (IQC) para $\Psi := \left(\begin{smallmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi \end{smallmatrix}\right)$ e matrizes

$$Z = (\star)\begin{pmatrix} 0 & E^\top \\ E & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \varrho & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} \otimes I_{ln_w}\right) \text{ e} \tag{7}$$
$$M = (\star)\begin{pmatrix} 0 & L^\top \\ L & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \varrho & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} \otimes I_{(l+1)n_w}\right),$$

definidas por $E \in \mathbb{R}^{ln_w \times ln_w}$ e $L \in \mathbb{R}^{(l+1)n_w \times (l+1)n_w}$, com

$$\tilde{L} := (\tilde{L}_{ij}) = L - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0_{n_w\times n_w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n_w\times n_w} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

sendo $\tilde{L}_{ij} \leq 0 \; \forall\, i \neq j$, tal como $\tilde{L}\mathbf{1} \geq 0$ e $\mathbf{1}^\top \tilde{L} \geq 0$.

Agora, podemos conectar o Teorema 2 - que pressupõe que Δ satisfaz (IQC) - com o Teorema 3, usando os multiplicadores O'Shea-Zames-Falb. Desta forma, as proposições a seguir retomam a síntese completa dos ingredientes terminais via IQCs (estáticas e dinâmicas) usando LMIs [4].

Proposição 1. (Multiplicadores estáticos). Considere $M \in \mathbb{S}^{n_z+n_w}$ não-singular. Logo, $\exists \kappa_t$ tal que (6) seja verdadeiro para $\Psi = I$ (estático) se e somente se existir uma matriz simétrica $Y \in \mathbb{S}^{n_x}$ e outra retangular $F \in \mathbb{R}^{n_u\times n_x}$ que satisfaçam (8) para todo $j \in \mathbb{N}_{[1,n_x]}$ e $i \in \mathbb{N}_{[1,n_u]}$. Ademais, se tais desigualdades são factíveis, o ganho estabilizante pode ser calculado da seguinte forma: $\kappa_t := FY^{-1}$.

Proposição 2. (Multiplicadores dinâmicos). As desigualdades em (6) são verificadas para matrizes $\mathfrak{X}$, κ_t, Z e M se e somente se existir uma variável de folga $F \in \mathbb{R}^{n_u\times(n_\nu+n_w+n_u)}$ que satisfaça (9) $\forall j \in \mathbb{N}_{[1,n_x]}, i \in \mathbb{N}_{[1,n_u]}$.

3. REPRESENTAÇÕES LPV

Uma vez retomados os principais elementos de (Morato et al., 2023), propomos, a seguir, uma metodologia de modelagem para incorporar o caso LPV - tipicamente mais abrangente que sistemas Lur'e. Especificamente, para tal, re-colocamos (1) sob o seguinte formalismo LPV:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\text{LPV}}(\rho(k)) & B_u \\ C_{\text{LPV}}(\rho(k)) & D_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(k) \\ u(k) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

para o qual consideramos o sinal de agendamento $\rho \in \ell_{2e}^{n_\rho}$ através da função $f_\rho : \ell_{2e}^{n_z} \times \ell_{2e}^{n_z} \to \ell_{2e}^{n_\rho}$. Em particular, para Δ do tipo (3), tomamos $n_\rho = n_z$ e o agendamento

$$f_\rho\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n_z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_x} \end{pmatrix}\right) := \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \frac{\phi(z_1)}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\phi(z_{n_z})}{x_{n_x}} \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{P}. \tag{11}$$

Por fim, uma vez definido $\rho := f_\rho(z, x)$ em (11), derivamos um modelo LPV em (10) com matrizes $A_{\text{LPV}}(\rho) := (A + B\rho)$ e $C_{\text{LPV}}(\rho) := (C + D\rho)$. Ao agruparmos (10) com (2), obtemos o seguinte sistema LPV aumentado:

$$\begin{pmatrix} \nu(k+1) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\text{LPV}}(\rho(k)) & \mathcal{B}_u \\ \mathcal{C}_{\text{LPV}}(\rho(k)) & \mathcal{D}_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu(k) \\ u(k) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$(\mathcal{A}_{\text{LPV}}(\rho)|\mathcal{C}_{\text{LPV}}(\rho)) := (\mathcal{A} + \mathcal{B}\rho|\mathcal{C} + \mathcal{D}\rho).$$

Incorporamos, por conseguinte, o modelo LPV nas predições do MPC em si, visando aproveitar das facilidades do ferramental LPV. Assim, a otimização (5) é torna-se:

$$\min_{U_k} \; J(\nu(k), U_k), \tag{13}$$
$$\text{s.t.}: \begin{cases} \nu(k+j+1|k) = \mathcal{A}_{\text{LPV}}(\rho(k+j|k))\nu(k+j|k) \\ \qquad\qquad + \mathcal{B}_u u(k+j|k), \forall\, j \in \mathbb{N}_{[0,N_p-1]}, \\ x(k+j|k) \in \mathcal{X}, \forall\, j \in \mathbb{N}_{[1,N_p]}, \\ u(k+j-1|k) \in \mathcal{U}, \forall\, j \in \mathbb{N}_{[1,N_p]}, \\ u(k+N_p-1|k) = \kappa_t \nu(k+N_p-1|k), \\ \nu(k+N_p|k) \in \mathbf{X}_t. \end{cases}$$

A otimização (13) é consideravelmente mais simples que (5): mantendo o custo J_k e conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{U}$, a otimização é um problema quadrático (QP), a cada amostra. O problema original (5) envolve não linearidades e, portanto, tem custo numérico mais elevado. Todavia, há uma mudança significativa: (13) requer os valores "futuros" (estimados) de agendamento, ao longo do horizonte de predição, i.e. $\rho(k+j|k)$, $\forall j \in \mathbb{N}_{[1,N_p-1]}$. Objetivamente, para que possamos resolver a nova otimização online, utilizaremos uma **estimativa local** para a *trajetória de agendamento* $P_k := \text{col}\big(\rho(k), \ldots, \rho(k+N_p-1)\big)$, dada por $\hat{P}_k$.

Nota 1. Importa ressaltar que seguimos uma abordagem ligeiramente diferente de outras apresentadas na literatura: aqui, transformamos um modelo não linear tipo Lur'e em um modelo LPV com n_x parâmetros de agendamento; tipicamente, transforma-se um modelo LPV em um modelo Lur'e usando transformadas fracionais (LFT, LFR). Nosso método visa aproveitar tanto os ingredientes terminais usando IQCs (menos conservadores), tal como a otimização LPV MPC em formato QP (simples).

Para gerar a estimativa local $\hat{P}_k$, durante a implementação do MPC, consideramos as três abordagens típicas da literatura: o *congelamento* dos parâmetros (Alcalá et al., 2019), a técnica iterativa de Cisneros et al. (2016) e a extrapolação com base uma aproximação local de primeira ordem (Taylor), apresentada em (Morato et al., 2022). As ideias centrais de cada estratégia, espectivamente, são:

(1) A abordagem de *ganho agendado/congelamento* é a mais utilizada em aplicações práticas, cf. (Morato et al., 2020). Ela consiste, simplesmente, em considerar que os parâmetros de agendamento pouco variam ao longo das predições e, portanto, que P_k pode ser aproximado diretamente por:
$$\hat{P}_k = \text{col}\big(\rho(k), \rho(k), \ldots, \rho(k)\big), \tag{14}$$
tal como se o parâmetro de agendamento medido na amostra k fosse mantido *congelado* ao longo das próximas N_p amostras (do ponto-de-vista das predições).

(2) A estratégia qLPV MPC de (Cisneros et al., 2016) compreende os seguintes aspectos:
   (i) O problema de otimização (5) é resolvido *múltiplas* vezes por amostras, inicialmente tomando como base [5] a seguinte estimativa para a trajetória de agendamento $\hat{P}_k^0 = f_\rho(\hat{X}_{k-1}^0)$, relacionada a seguinte trajetória predita de estados:
$$\hat{X}_k = \text{col}\big(x(k+1|k), \ldots, x(k+N_p|k)\big);$$

[4] De fato, as condições (8a), (9) não são convexas, requerendo soluções via LMIs iterativas, cf. (Veenman et al., 2016).

[5] Aqui, usamos o superíndice para indicar a l-ésima iteração (subamostra) do algoritmos durante a amostra k.

$$(\star)\left(\begin{array}{cc|c|cc} Y & 0 & & & \\ 0 & -Y^{-1} & & & \\ \hline & & M^{-1} & & \\ \hline & & & Q^{-1} & 0 \\ & & & 0 & R^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & 0 \\ -(AY+B_uF)^\top & -(CY+D_uF)^\top & -Y & -F^\top \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \\ -B^\top & -D^\top & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right) > 0\,, \tag{8a}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} Y & YI_{n_x,j} \\ \hline \star & \bar{x}_j^2 \end{array}\right) > 0 \;\text{ e }\; \left(\begin{array}{c|c} Y & F^\top I_{n_u,i} \\ \hline \star & \bar{u}_i^2 \end{array}\right) > 0\,. \tag{8b}$$

$$(\star)\left(\begin{array}{cc|c|cc} \mathfrak{X} & 0 & & & \\ 0 & -\mathfrak{X} & & & \\ \hline & & M & & \\ \hline & & & Q & 0 \\ & & & 0 & R \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{B}_u \\ I & 0 & 0 \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{D}_u \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & I_{n_x} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right) + (\star) + F^\top \begin{pmatrix} 0_{n_u\times n_\xi} & \kappa_t & 0_{n_u\times n_w} & -I \end{pmatrix} < 0\,, \tag{9a}$$

$$\begin{pmatrix} X_\Psi - Z & W \\ \star & X \end{pmatrix} > 0 \text{ tal como } \left(\begin{array}{cc|c} X_\Psi - Z & W & 0 \\ \star & X & I_{n_x,j} \\ \hline 0 & \star & \bar{x}_j^2 \end{array}\right) > 0\,, \text{ e } \left(\begin{array}{cc|c} X_\Psi - Z & W & 0 \\ \star & X & \kappa_t^\top I_{n_u,i} \\ \hline 0 & \star & \bar{u}_i^2 \end{array}\right) > 0\,. \tag{9b}$$

(ii) Durante as iterações subsequentes, aplica-se a função de agendamento (entrada-a-entrada) sobre o vetor de estados preditos, ou seja: $P_k^l = f_\rho\left(\mathrm{col}\big(x(k), \hat{X}_k^{l-1}\big)\right)$;

(iii) Uma vez que uma condição limítrofe é satisfeita, as iterações param; tipicamente, impomos como argumento de parada $\|\hat{P}_k^l - \hat{P}_k^{l-1}\| \leq \epsilon$, ou, simplesmente, $l = n_{\text{iter}}$.

(iv) Cisneros and Werner (2020) demonstram que esta estratégia é *convergente*, ou seja $\hat{P}_k^l \to P_k$. A grande desvantagem do método é requerer n_{iter} soluções de (5) por amostra, o que eleva a carga numérica resultante do MPC para um patamar de um programa quadrático sequencial (SQP).

(3) A estratégia proposta em (Morato et al., 2022) consiste no uso de uma expansão de Taylor local da função $f_\rho(\cdot)$, ao longo da trajetória de estados preditos. A grande vantagem do método (Morato et al., 2022), em comparação a abordagem iterativa de Cisneros et al. (2016), é que a incerteza de predição dos parâmetros limitada, além de usar apenas operadores lineares para o cômputo de $\hat{P}_k$ (ou seja, o método não é numericamente custoso) - mantendo o custo numérico do MPC no patamar de um QP. Resumimos os elementos principais da abordagem:

(i) Consideramos que seguinte expansão é válida:

$$f_\rho(x) = f_\rho(x)|_{\breve{x}} + \overbrace{\left.\frac{\partial f_\rho(x)}{\partial x}\right|_{\breve{x}}}^{f_\rho^\partial}(x - \breve{x}) + \xi_\rho\,, \tag{15}$$

sendo $\breve{x}$ o ponto (estado) de expansão e ξ_ρ um resíduo (que engloba os termos de mais alta ordem).

(ii) Logo, sendo $f_\rho(\cdot)$ duas vezes diferenciável, podemos assumir que as derivadas parciais f_ρ^∂ são limitadas para todo $\breve{x} \in \mathcal{X}$. Assim, há como inferir que a seguinte lei de recursão é localmente válida:

$$\rho(k+j+1|k) = \rho(k+j|k) + f_\rho^\partial(k+j)\delta x(k+j|k) + \xi_\rho(k+j|k),\ \forall j \in \mathbb{N}_{[0,N_p-2]}\,. \tag{16}$$

(iii) Assumimos, logo, que taxa de variação dos parâmetros de agendamento (ao longo do horizonte de predição) é uniforme e, portanto, que $f_\rho^\partial(k+j) \approx f_\rho^\partial(k)\,, \forall j \in \mathbb{N}_{[1,N_p-2]}$;

(iv) Recuperamos valores estimados para $\delta x(k+j|k)$, $\forall j \in \mathbb{N}_{[1,N_p-2]}$ da última iteração do MPC, ou seja, usando $\hat{X}_{k-1}^\star = \mathbf{A}(\hat{P}_{k-1})x(k-1) + \mathbf{B}(\hat{P}_{k-1})U_{k-1}^\star$ e as medições disponíveis na amostra k;

(v) Por fim, obtemos a seguinte lei recursiva, em forma vetorial:

$$\hat{P}_k = \hat{P}_{k-1} + f_\rho^\partial(k)\delta\hat{X}_{k-1}^\perp\,, \tag{17}$$

sendo que cada parâmetro de agendamento predito $\rho(k+j|k)$ é estimado com base na última estimativa disponível $\rho(k+j-1|k-1)$ somada a um termo de atualização $+f_\rho^\partial(k)\delta x(k+j-1|k)$.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para que possamos, por fim, discutir o método proposto - usando modelagem LPV, as três distintas estratégias para gerar $\hat{P}_k$ e a síntese de ingredientes terminais via IQCs - consideramos um sistema não linear instável do tipo Lur'e, cujas matrizes referentes a Eq. (1) são dadas por:

$$A := \begin{bmatrix} 0.7831 & 0.4894 & 0.9789 \\ -0.3916 & 1.1747 & 0.9789 \\ 0 & 0.2937 & 0.8810 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$B := \begin{bmatrix} -0.054 & 0.012 & 0.090 \\ 0.15 & 0.15 & 0.06 \\ 0 & 0 & -0.15 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$C := \begin{bmatrix} -0.0753 & -1.3554 & 0 \\ 0.753 & 0.753 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7530 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$(\,B_u|D_u|D\,) := \left[\begin{array}{c|c|c} 0.3 & -0.02 & \\ 0.2 & 0.01 & 0_{3\times 3} \\ -0.5 & 0.005 & \end{array}\right]. \tag{21}$$

Neste estudo de caso numérico[6], o operador Δ é uma senoide, i.e. $w(k) := \sin(x(k))$ - sendo esta uma função real, contínua e limitada por setor. Ao reconfigurarmos a representação usando o formalismo LPV apresentado nas Eqs.(10)-(11), obtemos três sinais de agendamento:

[6] Resultados obtidos em um Macintosh M1 Pro de 16 GB RAM, com Matlab e yalmip e *solvers* SDPT3 (LMIs) e Gurobi (QPs).

$$\begin{cases} \rho_1(k) := \text{sinc}(x_1(k)) = \frac{\sin(x_1(k)}{x_1(k)}, \\ \rho_2(k) := \text{sinc}(x_2(k)) = \frac{\sin(x_2(k)}{x_2(k)}, \\ \rho_3(k) := \text{sinc}(x_3(k)) = \frac{\sin(x_3(k)}{x_3(k)}. \end{cases} \tag{22}$$

Ademais, assumimos, que os estados $x(k)$ devem estar contidos dentro de uma caixa $\mathcal{X}$ no $\mathbb{R}^3$, centrada na origem, tal que $|x_j| \leq 2, \forall j \in \mathbb{N}_{[1,3]}$, ao passo que o sinal de controle $u(k)$ deve estar contido em $\mathcal{U} := \{u \in \mathbb{R} \,|\, |u| \leq 3\}$. Para fins da regulação das dinâmicas deste sistema (estabilização), aplicaremos uma estratégia de controle preditivo, levando em conta a abordagem LPV e a otimização apresentada na Eq. (13). Para tanto, considerando ponderações quadráticas $Q = \text{diag}\,(0.5, 0.5, 0.6)$ e $R = 0.8$, projetamos ingredientes terminais usando IQCs, com $\mathbf{X}_t = V(\cdot) \leq 1$, seguindo o Teorema 3 e a Proposições 1 (IQCs estáticas), com $V(x) = x^\top Y^{-1} x$ e $\kappa_t = FY^{-1}$, sendo Y^{-1} solução de (8), e 2 (IQCs dinâmicas), com: $V(\nu) = \begin{pmatrix} X_\Psi - Z & W \\ \star & X \end{pmatrix} \nu$, sendo $\mathfrak{X}$, κ_t, Z, W, e X soluções de (9).

Compararemos três abordagens de síntese:

- IQCs com multiplicadores estáticos tipo bloco-inteiro (Proposição 1), replicando condições de setor impostas sobre laço Lur'e $w = \sin(x)$ - abordagem típica da literatura para não linearidades limitadas, cf. (Palmeira et al., 2022) e (Morato et al., 2023, *Remark 3*);
- IQCs com multiplicadores estáticos tipo bloco-inteiro (Proposição 1), cf. (Morato et al., 2023, *Lemma 3*);
- IQCs ponto-a-ponto com multiplicadores dinâmicos tipo O'Shea-Zames-Falb (Teorema 3, Proposição 2).

Levando em conta essas três abordagens de projeto, apresentamos as elipsoides resultantes $\mathbf{X}_t$ - que constituem os conjuntos terminais para a implementação dos três MPCs - na Figura 1. As IQCs estáticas e as condições de setor resultam em conjuntos muito similares - resultado já observado em (Morato et al., 2023). Como esperado, levando em conta o menor conservadorismo imposto pelas IQCs ponto-a-ponto, observamos uma região terminal de maior volume usando os multiplicadores dinâmicos tipo O'Shea-Zames-Falb. É de importância enfatizar que tal região terminal resulta, por conseguinte, em algoritmos MPCs com regiões de atrações maiores - ou seja, que estabilizam um conjunto maior de condições iniciais. Na Tabela 1, apresentamos o traço das elipsoides (no caso, traço do argumento Y da LMI (8a) para multiplicadores estáticos, e do argumento $\mathfrak{X}$ da LMI (9) para multiplicadores dinâmicos), visando quantificar a diferença de volume entre tais conjuntos.

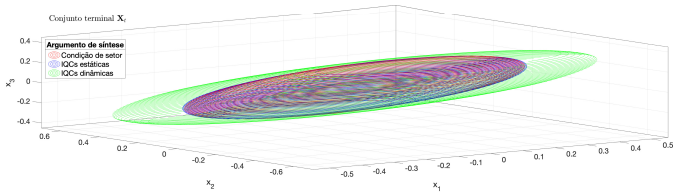

Figura 1. Região terminal $\mathbf{X}_t$.

Tabela 1. Volume da região terminal $\mathbf{X}_t$.

Método	Traço
Condição de setor	53.12
Multiplicadores estáticos (bloco-inteiro)	27.74
Multiplicadores dinâmicos (O'Shea-Zames-Falb)	33.01

Levando em conta os ingredientes terminais obtidos com as IQCs ponto-a-ponto usando multiplicadores dinâmicos (O'Shea-Zames-Falb), prosseguimos avaliando as diferenças quanto aos controladores preditivos usando as três abordagens detalhadas na Seção 4 quanto à estimativa das trajetórias futuras de agendamento. Especificamente, nomeamos:

(i) *Frozen-guess* o algoritmo que toma como base uma estimativa constante, cf. Eq. (14);
(ii) *Taylor-based* a abordagem proposta em (Morato et al., 2022), tomando como base as estimativas recursivas, cf. Eq. (17); e
(iii) *Iterative-SQPs* a implementação proposta em Cisneros et al. (2016), com base na resolução iterativa do programa de otimização com a função de agendamento $f_\rho(\cdot)$, usando um critério de parada de cinco iterações.

Visando avaliar o desempenho de cada abordagem LPV MPC, consideramos dez segundos de simulação, a mesma condição inicial $x(0) = \text{col}\big(1, 0.9, 0.26\big)$ e uma perturbação de carga repentina (Fig. 2), somada aos três estados.

Na Figura 3, apresentamos as trajetórias dos estados obtidas com as três abordagens. Notavelmente, o algoritmo *Frozen-guess LPV MPC* está associado ao pior resultado, uma vez que há mais incerteza associada às predições quando consideramos parâmetros *congelados* tal como dita Eq. (14). Os outros dois controladores impõe desempenhos visualmente similares, com pequenas diferenças numéricas - cf. os índices *RMS* do custo J_k e das trajetórias dos três estados, além da métrica TV [7], apresentados na Tabela 2. Não obstante, a Figura 5 ilustra os três sinais de agendamento ρ ao longo da simulação, além de amostras das estimativas das trajetórias futuras de agendamento $\hat{P}_k$, com cada estratégia. A abordagem *congelada* apresenta maior grau de erro, ao passo que as outras duas resultam em estimativas convergentes (e similares).

Apesar do método iterativo *Iterative-SQPs* (Cisneros et al., 2016) apresentar um desempenho de controle ligeiramente superior, cabe uma consideração pertinente: o tempo de cômputo para gerar o sinal de controle $u(k)$, a cada amostra k, é, por vezes, **superior** ao período de amostragem do processo - o que significa que, em uma aplicação realística, em tempo real, tal abordagem não seria factível. Na Figura 4, apresentamos o sinal de controle de cada estratégia junto com o tempo de cômputo (real e médio) necessário para determinar $u(k)$. A abordagem de (Morato et al., 2022) é, aproximadamente, sete vezes mais rápida - propriedade que pode ser crucial para a operação de sistemas complexos críticos (embarcados, operando em ambientes tempo-real).

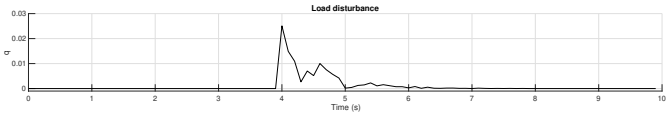

Figura 2. Perturbação.

[7] Dada pela soma das normas dos incrementos de controle ao longo da simulação. Um índice TV maior indica mais variação de controle, ou seja, um sinal de controle menos suave.

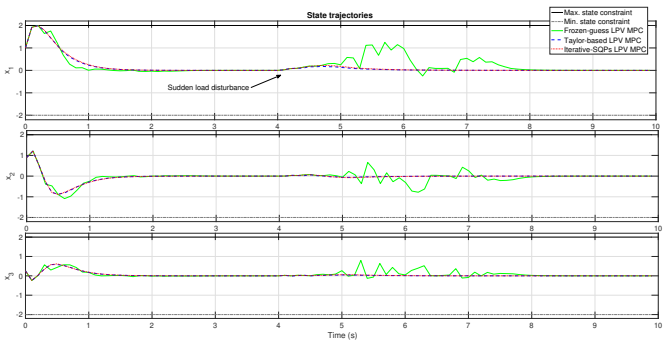

Figura 3. Trajetória dos estados.

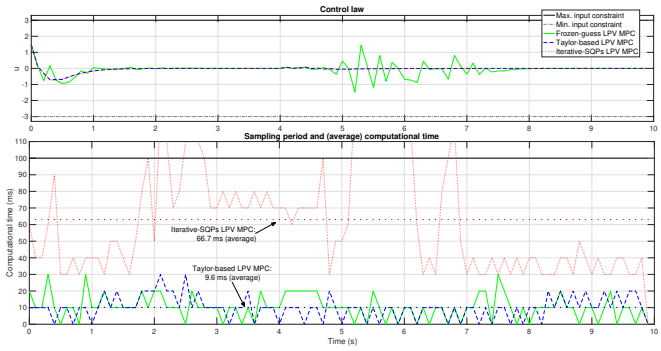

Figura 4. Sinal de controle LPV MPC e tempo médio para o cômputo.

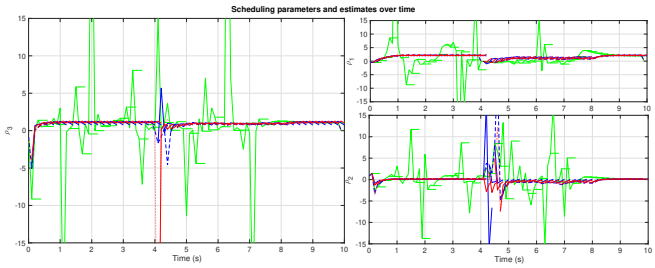

Figura 5. Sinais de agendamento ρ e estimativas $\hat{P}_k$.

Tabela 2. Desempenhos de controle.

Método	$\{J_k\}$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	TV
Frozen-guess	3.91	0.52	0.31	0.19	28.96
Taylor-based	2.02	0.41	0.24	0.13	3.48
Iterative-SQPs	1.96	1.96	0.24	0.13	3.35

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, adaptamos resultados recentes quanto ao projeto de ingredientes terminais de MPCs usando IQCs, considerando sistemas LPV. Por enquanto, limitamos as análises meramente ao caso de não linearidades estáticas limitadas por setor, incorporadas através de funções de agendamento diagonais. Discutimos, também, os efeitos práticos de diferentes abordagens para a estimativa dos parâmetros de agendamento. A mensagem principal é a seguinte: a abordagem LPV facilita significativamente o projeto de algoritmos MPC para o caso não linear, ao passo que o uso de ingredientes terminais projetados via IQCs (especialmente, dinâmicas, tipo O'Shea-Zames-Falb) possibilita que a região de atração destes controladores seja maior - abarcando mais condições iniciais admissíveis.

Advogamos que a teoria da dissipatividade (e o uso de IQCs) merece investigação mais profunda no nexo quanto ao projeto de controle preditivo baseado em modelo com **certificados teóricos** - garantias de estabilidade e factibilidade recursiva.

Em trabalhos futuros, almejamos estender as análises para mais variados tipos de operadores não lineares, como também possibilitar a síntese de ingredientes terminais paramétrico-dependentes usando IQCs. Desta forma, podemos evitar possíveis limitações de representação do formato do agendamento diagonal da Eq. (11), abarcando outras classes de sistemas LPV. Ademais, pretendemos comparar o método proposto com algoritmos MPC robustos, seja via IQCs robustas, argumentos min-max, ou com base em otimização semi-definida (LMIs online).

REFERÊNCIAS

Alcalá, E., Puig, V., and Quevedo, J. (2019). LPV-MPC control for autonomous vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28), 106–113.

Camacho, E.F. and Bordons, C. (2013). *Model predictive control*. Springer Science & Business Media.

Cisneros, P.S.G., Voss, S., and Werner, H. (2016). Efficient nonlinear model predictive control via quasi-LPV representation. In 55th *CDC*, 3216–3221. IEEE.

Cisneros, P.S.G. and Werner, H. (2020). Nonlinear model predictive control for models in quasi-linear parameter varying form. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(10), 3945–3959.

Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Scokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814.

Morato, M.M., Holicki, T., and Scherer, C.W. (2023). Stabilizing model predictive control synthesis using integral quadratic constraints and full-block multipliers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 33(18), 11434–11457.

Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2020). Model predictive control design for linear parameter varying systems: A survey. *Annual Reviews in Control*, 49, 64–80.

Morato, M.M., Normey-Rico, J.E., and Sename, O. (2022). Sufficient conditions for convergent recursive extrapolation of qLPV scheduling parameters along a prediction horizon. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1–12. doi:10.1109/TAC.2022.3183534.

Palmeira, A.H., da Silva Jr, J.M.G., Flores, J.V., and Seuret, A. (2022). Aperiodic sampled-data MPC strategy for LPV systems. *Journal of the Franklin Institute*, 359(2), 786–815.

Scherer, C.W. (2022). Dissipativity and Integral Quadratic Constraints: Tailored Computational Robustness Tests for Complex Interconnections. *IEEE Control Sys. Mag.*, 42(3), 115–139.

Seiler, P. (2014). Stability analysis with dissipation inequalities and integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6), 1704–1709.

Veenman, J., Scherer, C.W., and Köroğlu, H. (2016). Robust stability and performance analysis based on integral quadratic constraints. *European Journal of Control*, 31, 1–32.