Controle adaptativo de sistemas discretos baseado em aproximadores fuzzy Takagi-Sugeno: Mínimos quadrados recursivo com regularização da covariância

Víctor Costa da Silva Campos * **Mariella Maia Quadros** **

* *Departamento de Engenharia Eletrônica, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, MG (e-mail: kozttah@ufmg.br)*
** *Área de Controle e Processos Industriais, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – IFMG Campus Sabará, MG, (e-mail: mariella.quadros@ifmg.edu.br)*

Abstract: In order to deal with the parameter drift problem in discrete-time adaptive control, this work proposes a time-varying regularization of the covariance matrix in the recursive least squares method with a forgetting factor. A set of synthesis conditions, based on Linear Matrix Inequalities, is presented for the control law that guarantees that the closed loop system is uniformly ultimately bounded when employed together with the proposed adaptation law. Throughout all of the analysis, the approximation error is taken into consideration, since it always exists in the context of universal approximators. Computational simulations are performed to assess the efficacy of the proposed approach, by means of comparisons against traditional recursive least squares methods.

Resumo: De forma a lidar com o problema de deriva dos parâmetros no contexto de controle adaptativo de sistemas a tempo discreto, este trabalho propõe uma regularização variante no tempo para a matriz de covariância do método de mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento. É apresentado um conjunto de condições de síntese, baseadas em desigualdades matriciais lineares, para a lei de controle que garante que o sistema em malha fechada seja uniformemente finalmente limitado quando utilizado em conjunto com a lei de adaptação proposta. Em toda a análise, é levado em consideração o erro de aproximação, que sempre existe no contexto de aproximadores universais. Simulações computacionais são realizadas para verificar a eficiência da abordagem proposta, por meio de comparações com métodos tradicionais de mínimos quadrados recursivos.

Keywords: Adaptive Approximation Based Control; Recursive Least Squares; Covariance Regularization; Linear Matrix Inequalities.

Palavras-chaves: Controle Adaptativo Baseado em Aproximação; Mínimos Quadrados Recursivo; Regularização da Covariância; Desigualdades Matriciais Lineares.

1. INTRODUÇÃO

Apesar de serem muito úteis para a estimação de funções não-lineares desconhecidas, o uso de aproximadores universais sempre incorre em um erro de aproximação, que pode levar à deriva dos parâmetros estimados (Farrell and Polycarpou, 2006; Ioannou and Fidan, 2006). Quando consideramos sua aplicação no contexto do controle adaptativo de sistemas lineares a tempo discreto, uma lei de adaptação muito utilizada é o mínimos quadrados recursivo (Åström and Wittenmark, 2013), que também está sujeita à deriva dos parâmetros. Uma forma usual de se combater a deriva de parâmetros neste caso, é o uso de um fator de esquecimento combinado com a exigência da persistência de excitação dos regressores, o que garante a convergência dos parâmetros estimados para os parâmetros ótimos.

Entretanto, apesar de esta suposição ser facilmente atendida no controle de sistemas lineares adicionando-se um pequeno ruído ao sinal de controle, este não é o caso quando consideramos aproximadores universais pois a persistência de excitação exige que os sinais do sistema percorram *de tempos em tempos* todo o universo de discurso das variáveis de entrada do aproximador universal.

No contexto da falta de persistência de excitação, diversas estratégias podem ser empregadas, como a modificação para perturbações constantes (de Wit and Carrillo, 1990), em que o fator de esquecimento é encontrado por meio da

⋆ Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) por meio do Programa de Excelência Acadêmica (PROEX), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por meio do processo 308597/2023-0, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG) Campus Sabará/Pró-Reitoria de Inovação, Pesquisa e Pós-Graduação (PRIPPG), e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG)

solução de um problema de otimização com restrição; o método dos elipsoides limitantes ótimos (*OBE - Optimal Bounding Ellipsoids*) (Dasgupta and Huang, 1987), em que o fator de esquecimento é encontrado por uma abordagem de elipsoides que garantem que o parâmetro está contido dentro daquela região; e o método do fator de esquecimento de direção variável (Goel et al., 2020), que reduz a inversa da matriz de covariância apenas nas direções em que os regressores estão introduzindo novas informações.

Como muitas dessas estratégias podem ser complexas ou custosas computacionalmente, neste artigo propomos uma regularização variante no tempo, *de simples implementação*, para a matriz de covariância que, mesmo na falta de persistência de excitação, evita que a matriz de covariância cresça sem limites e evita a deriva dos parâmetros. Mostramos também que o seu uso no contexto do controle adaptativo baseado em aproximação com modelos Takagi-Sugeno (TS) garante que o sistema em malha fechada seja uniformemente finalmente limitado. Um exemplo numérico é apresentado para ilustrar o comportamento e a eficiência da lei de adaptação proposta.

2. METODOLOGIA

Por simplicidade, neste trabalho consideramos sistemas a tempo discreto que são linearizáveis por realimentação sem a necessidade do uso de uma transformação dos estados (uma vez que tal transformação seria difícil no contexto em que parte das não-linearidades são desconhecidas) e com apenas uma entrada de controle. Dessa forma, consideramos que os sistemas são descritos por

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\left(\left(g_0(\boldsymbol{x}_k) + g(\boldsymbol{x}_k)\right)u_k + f_0(\boldsymbol{x}_k) + f(\boldsymbol{x}_k)\right) \tag{1}$$

em que $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle, as funções $f_0(\boldsymbol{x}_k)$ e $g_0(\boldsymbol{x}_k)$ são precisamente conhecidas, enquanto que as funções $f(\boldsymbol{x}_k)$ e $g(\boldsymbol{x}_k)$ são desconhecidas.

De modo a lidar com estas funções desconhecidas, faremos uso de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS) com consequentes constantes. Considerando um sistema de inferência nebulosa definido por um defuzzificador de média central, inferência do produto e fuzzificador *singleton*, se as funções de pertinência utilizadas forem gaussianas (Wang, 1993, 1997) ou de suporte limitado (como triangulares ou trapezoidais) (Castro, 1995), estes modelos representam aproximadores universais (em uma região compacta). Esta aproximação é dada por

$$f(\boldsymbol{x}_k) = \left(\sum_{i=1}^{r_f}\left(\frac{\bar{h}_{fi}(\boldsymbol{x}_k)}{\sum_{j=1}^{r_f}\bar{h}_{fj}(\boldsymbol{x}_k)}\right)\boldsymbol{\theta}_{fi}\right) + \varepsilon_f(\boldsymbol{x}_k)$$
$$g(\boldsymbol{x}_k) = \left(\sum_{i=1}^{r_g}\left(\frac{\bar{h}_{gi}(\boldsymbol{x}_k)}{\sum_{j=1}^{r_g}\bar{h}_{gj}(\boldsymbol{x}_k)}\right)\boldsymbol{\theta}_{gi}\right) + \varepsilon_g(\boldsymbol{x}_k)$$

em que r_f e r_g são, respectivamente, o número de regras utilizadas no modelo TS para aproximar f e g, $\bar{h}_{fi}$ e $\bar{h}_{gi}$ são as funções de pertinência (gaussianas ou de suporte limitado), ε_f e ε_g são os erros de aproximação, e $\boldsymbol{\theta}_{fi}$ e $\boldsymbol{\theta}_{gi}$ são os parâmetros ótimos *desconhecidos* do modelo que minimizam o máximo erro de aproximação dentro da região de análise. Normalmente, definem-se as funções de pertinência normalizadas

$$h_{fi}(\boldsymbol{x}_k) = \frac{\bar{h}_{fi}(\boldsymbol{x}_k)}{\sum_{j=1}^{r_f}\bar{h}_{fi}(\boldsymbol{x}_k)}, \quad h_{gi}(\boldsymbol{x}_k) = \frac{\bar{h}_{gi}(\boldsymbol{x}_k)}{\sum_{j=1}^{r_g}\bar{h}_{gi}(\boldsymbol{x}_k)}$$

com as propriedades

$$h_{fi}(\boldsymbol{x}_k) \geq 0,\ \forall i, \qquad \sum_{i=1}^{r_f} h_{fi}(\boldsymbol{x}_k) = 1,$$
$$h_{gi}(\boldsymbol{x}_k) \geq 0,\ \forall i, \qquad \sum_{i=1}^{r_g} h_{gi}(\boldsymbol{x}_k) = 1.$$

Considerando a notação compacta

$$\boldsymbol{\theta}_f = \begin{bmatrix}\theta_{f_1}\\ \vdots \\ \theta_{f_{r_f}}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_g = \begin{bmatrix}\theta_{g_1}\\ \vdots \\ \theta_{g_{r_g}}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{h}_f(\boldsymbol{x}_k) = \begin{bmatrix}h_{f_1}(\boldsymbol{x}_k)\\ \vdots \\ h_{f_{r_f}}(\boldsymbol{x}_k)\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}_g(\boldsymbol{x}_k) = \begin{bmatrix}h_{g_1}(\boldsymbol{x}_k)\\ \vdots \\ h_{g_{r_g}}(\boldsymbol{x}_k)\end{bmatrix},$$

podemos então escrever

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}_f^T\boldsymbol{h}_f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_f(\boldsymbol{x}),$$
$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}_g^T\boldsymbol{h}_g(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_g(\boldsymbol{x}).$$

Como as funções a serem aproximadas são desconhecidas, não é possível de se determinar exatamente os parâmetros ótimos $\boldsymbol{\theta}_f$ e $\boldsymbol{\theta}_g$, e empregamos estimativas destes parâmetros, representadas como $\hat{\boldsymbol{\theta}}_f$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_g$.

Considerando uma lei de controle da forma

$$u_k = \frac{-f_0(\boldsymbol{x}_k) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_f^T\boldsymbol{h}_f(\boldsymbol{x}) + K\boldsymbol{x}_k}{g_0(\boldsymbol{x}_k) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^T\boldsymbol{h}_g(\boldsymbol{x})} \tag{2}$$

e que a dinâmica do sistema pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k &+ B\left(\left(g_0(\boldsymbol{x}_k) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^T\right)u_k + f_0(\boldsymbol{x}_k) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_f^T\boldsymbol{h}_f(\boldsymbol{x})\right)\\ &+ B\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_g^T\boldsymbol{h}_g(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_g(\boldsymbol{x})\right)u_k + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_f^T\boldsymbol{h}_f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_f(\boldsymbol{x})\right),\end{aligned}$$

com $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_f = \boldsymbol{\theta}_f - \hat{\boldsymbol{\theta}}_f$ e $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_g = \boldsymbol{\theta}_g - \hat{\boldsymbol{\theta}}_g$, a dinâmica de malha fechada pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1} &= (A + BK)\,\boldsymbol{x}_k + B\left[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_f^T\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_g^T\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_f(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{h}_g(\boldsymbol{x})u_k\end{bmatrix}\\ &\quad + B\left(\varepsilon_f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_g(\boldsymbol{x})u_k\right)\\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= (A + BK)\,\boldsymbol{x}_k + B\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_k,u_k) + B\delta(\boldsymbol{x}_k,u_k),\end{aligned}$$

em que $\tilde{\Theta}_k^T = \left[\tilde{\boldsymbol{\theta}}_f^T\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_g^T\right]$, $\boldsymbol{\varphi}^T(\boldsymbol{x}_k,u_k) = \left[\boldsymbol{h}_f^T(\boldsymbol{x})\ u_k\boldsymbol{h}_g^T(\boldsymbol{x})\right]$ e $\delta(\boldsymbol{x}_k,u_k) = \varepsilon_f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_g(\boldsymbol{x})u_k$. De modo a simplificar a representação, quando não for causar confusão, escreveremos $\boldsymbol{\varphi}_k$ e δ_k.

2.1 Lei de Adaptação - Mínimos Quadrados Recursivo

Uma lei de adaptação muito comum utilizada no contexto de sistemas a tempo discreto, no caso em que os parâmetros a serem estimados aparecem de forma linear no modelo, é o mínimos quadrados recursivo. Definindo a *inovação* do sistema em malha fechada como

$$\boldsymbol{\upsilon}_{k+1} = \boldsymbol{x}_{k+1} - (A + BK)\,\boldsymbol{x}_k$$

e considerando uma ponderação, ζ, ele poderia ser escrito como (Kanellakopoulos, 1994)

$$\begin{aligned}P_{k+1}^{-1} &= P_k^{-1} + \zeta\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{\varphi}_k^T\\ \hat{\Theta}_{k+1} &= \hat{\Theta}_k + \zeta P_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{\upsilon}_{k+1}^T B\left(B^TB\right)^{-1}\end{aligned} \tag{3}$$

em que P_k é a matriz de covariância da estimação.

Entretanto, devido ao erro de aproximação, δ_k, a estabilidade deste estimador não é garantida e os parâmetros estimados podem divergir ao longo do tempo, *i.e.* pode ocorrer a *deriva dos parâmetros*. Uma forma de se combater este problema, muito utilizada na literatura, é o uso de um fator de esquecimento, $\alpha \in (0,1)$, de modo que a dinâmica da matriz de covariância passa a ser escrita como

$$P_{k+1}^{-1} = \alpha P_k^{-1} + \zeta \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T.$$

Entretanto, tal modificação exige que o sinal $\boldsymbol{\varphi}_k$ seja *persistentemente excitante*, pois se $\zeta \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T$ não variar bastante dentro do nosso universo de discurso, corremos o risco de $P_k^{-1} \to 0$ em certas direções (o que implica que $P_k \to \infty$ em certas direções).

No caso da estimação de modelos lineares, esta consideração não costuma ser um problema, pois pode ser atendida, na maioria dos casos, adicionando-se um pequeno ruído à lei de controle que garanta esta persistência. Entretanto, no contexto de modelos não lineares, com uma ênfase ainda maior para o caso de aproximadores universais, a persistência de excitação exige que o sistema esteja sempre excursionando todo o universo de discurso da aproximação, de modo que tal suposição é inviável.

No contexto da falta de persistência de excitação, uma estratégia muito utilizada, conhecida como regularização da matriz de covariância, faz uso da dinâmica

$$P_{k+1}^{-1} = \alpha P_k^{-1} + \zeta \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T + \lambda I$$

em que o termo λI garante que a inversa da matriz de covariância nunca tenda a zero. Entretanto, como apresentado em (3), a atualização dos parâmetros depende da matriz de covariância P_{k+1} e não de sua inversa, e esta forma de regularização sempre exige a inversão da matriz para ser calculada exatamente (o que é custoso computacionalmente se o número de parâmetros for elevado).

Dessa forma, vamos considerar uma estratégia um pouco diferente. Consideramos a existência de um pequeno termo variante no tempo adicional na dinâmica da inversa da matriz de covariância

$$P_{k+1}^{-1} = \alpha P_k^{-1} + \lambda \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T + \zeta \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \tag{4}$$

com $\lambda > 0$, e $\|\boldsymbol{\eta}_k\| = 1$ utilizados para evitar que a dinâmica tenda a zero em certas direções. Os vetores de regularização, $\boldsymbol{\eta}_k$ podem ser escolhidos de várias formas distintas, desde que variem de modo que garantam que a soma dos elementos $\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T$ gere uma matriz quadrada de posto completo (semelhante à uma condição de persistência de excitação, mas neste caso para os termos de regularização). Uma vez que $P_k^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e que os vetores $\boldsymbol{e}_\ell$ base do espaço $\mathbb{R}^r$ são definidos como

$$\boldsymbol{e}_{\ell i} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = \ell \\ 0, \text{ se } i \neq \ell \end{cases},$$

de modo a simplificar a implementação (e nossa análise), consideramos o sinal periódico

$$\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{e}_{\mathrm{mod}(k,r)+1},$$

em que mod(k,r) representa o resto da divisão inteira de k por r.

Ignorando o efeito de $\boldsymbol{\varphi}_k$ sobre a dinâmica da inversa da matriz de covariância, podemos escrever (considerando um período do sinal $\boldsymbol{\eta}_k$)

$$\begin{aligned} P_k^{-1} &\geq \alpha^r P_{k-r}^{-1} \\ &\quad + \lambda \left(\boldsymbol{\eta}_{k-1} \boldsymbol{\eta}_{k-1}^T + \alpha \boldsymbol{\eta}_{k-2} \boldsymbol{\eta}_{k-2}^T + \cdots + \alpha^{r-1} \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T \right) \end{aligned} \tag{5}$$

Como, para $P_0 > 0$, temos $P_{k-r}^{-1} \geq 0$, e

$$\sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T = I$$

temos que

$$P_k^{-1} \geq \left(\lambda \alpha^{r-1}\right) I, \quad P_k \leq \frac{1}{\lambda \alpha^{r-1}} I.$$

Logo, podemos ver que a estratégia proposta é capaz de garantir que a matriz de covariância seja sempre limitada.

O interessante desta proposta, é que ainda conseguimos equações de atualização da matriz de covariância que não necessitam da operação de inversão de matrizes. Utilizando o Lema da Inversão em (4), temos que

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \left(\alpha P_k^{-1} + \lambda \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T\right)^{-1} \\ &\quad - \frac{\zeta \left(\alpha P_k^{-1} + \lambda \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T\right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \left(\alpha P_k^{-1} + \lambda \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T\right)^{-1}}{1 + \zeta \boldsymbol{\varphi}_k^T \left(\alpha P_k^{-1} + \lambda \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T\right)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_k} \end{aligned}$$

e, uma vez que

$$\left(\alpha P_k^{-1} + \lambda \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \left(P_k - \frac{\lambda P_k \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T P_k}{\alpha + \lambda \boldsymbol{\eta}_k^T P_k \boldsymbol{\eta}_k} \right)$$

definindo

$$\bar{P}_k = P_k - \frac{\lambda P_k \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T P_k}{\alpha + \lambda \boldsymbol{\eta}_k^T P_k \boldsymbol{\eta}_k} \tag{6}$$

podemos escrever que

$$P_{k+1} = \frac{1}{\alpha} \left(\bar{P}_k - \frac{\zeta \bar{P}_k \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k \bar{P}_k}{\alpha + \zeta \boldsymbol{\varphi}_k^T \bar{P}_k \boldsymbol{\varphi}_k} \right). \tag{7}$$

Dessa forma, a dinâmica do erro de adaptação passa a ser dada por

$$\tilde{\Theta}_{k+1} = \tilde{\Theta}_k - \zeta P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^T \tilde{\Theta}_k - \zeta P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k \delta_k^T$$

e, escolhendo a função de Lyapunov do erro de adaptação como

$$V_{\theta_k} = \mathrm{tr}\left(\tilde{\Theta}_k^T P_k^{-1} \tilde{\Theta}_k \right)$$

sua diferença será dada por

$$\begin{aligned} \Delta V_\theta &= \mathrm{tr}\left(\tilde{\Theta}_{k+1}^T P_{k+1}^{-1} \tilde{\Theta}_{k+1} \right) - \mathrm{tr}\left(\tilde{\Theta}_k^T P_k^{-1} \tilde{\Theta}_k \right) \\ \Delta V_\theta &= \left(-2\zeta + \zeta^2 \boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k\right) \boldsymbol{\varphi}_k^T \tilde{\Theta}_k \tilde{\Theta}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \\ &\quad + \left(-2\zeta + 2\zeta^2 \boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k\right) \delta_k^T \tilde{\Theta}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \\ &\quad + \zeta^2 \boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k \delta_k^T \delta_k + \mathrm{tr}\left(\tilde{\Theta}_k^T \left(P_{k+1}^{-1} - \alpha P_k^{-1} \right) \Theta_k \right) \\ &\quad - (1-\alpha)\, \mathrm{tr}\left(\tilde{\Theta}_k^T P_k^{-1} \tilde{\Theta}_k \right) \\ \Delta V_\theta &= \left(-\zeta + \zeta^2 \boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k\right) \boldsymbol{\varphi}_k^T \tilde{\Theta}_k \tilde{\Theta}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \\ &\quad + 2\left(-\zeta + \zeta^2 \boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k\right) \delta_k^T \tilde{\Theta}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k + \zeta \delta_k^T \delta_k \\ &\quad + \left(-\zeta + \zeta^2 \boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1} \boldsymbol{\varphi}_k\right) \delta_k^T \delta_k \\ &\quad - (1-\alpha) V_\theta + \lambda\, \mathrm{tr}(\tilde{\Theta}_k^T \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T \tilde{\Theta}_k). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\zeta^2\boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_k = \frac{1}{\alpha}\left(\zeta^2\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k - \frac{\zeta^3\left(\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k\right)^2}{\alpha+\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k}\right) = \frac{\zeta^2\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k}{\alpha+\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k}$$

temos que

$$-\zeta+\zeta^2\boldsymbol{\varphi}_k^T P_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_k = -\zeta + \frac{\zeta^2\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k}{\alpha+\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k} = \frac{-\alpha\zeta}{\alpha+\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k}$$

de modo que

$$\Delta V_\theta = \frac{-\alpha\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\tilde{\Theta}_k\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k - 2\alpha\zeta\delta_k^T\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k - \alpha\zeta\delta_k^T\delta_k}{\alpha+\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k} + \zeta\delta_k^T\delta_k - (1-\alpha)\,V_\theta + \lambda\,\mathrm{tr}(\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_k^T\tilde{\Theta}_k).$$

Além disso, de (5), temos que

$$P_k^{-1} \geq \alpha^r P_{k-r}^{-1} + \lambda\alpha^{r-1}\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_k^T,$$

o que implica que, em regime permanente,

$$\lambda\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_k^T \leq \frac{1-\alpha^r}{\alpha^{r-1}}P_k^{-1}.$$

De (4), podemos escrever que

$$P_{k+1}^{-1} \leq \alpha P_k^{-1} + \lambda I + \zeta\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T,$$

mas como $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T \leq \boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\varphi}I$, e $\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\varphi} \leq 1+\beta$, com β sendo o valor máximo que o quadrado da ação de controle, u_k, pode assumir,

$$P_{k+1}^{-1} \leq \alpha P_k^{-1} + (\lambda+\zeta(1+\beta))\,I,$$

o que implica que, em regime permanente,

$$P_k^{-1} \leq \frac{\lambda+\zeta(1+\beta)}{1-\alpha}I, \quad P_k \geq \frac{1-\alpha}{\lambda+\zeta(1+\beta)}I,$$
$$\bar{P}_k \geq \frac{(1-\alpha)(\lambda+\alpha\zeta(1+\beta))-\lambda(1-\alpha)^2}{(\lambda+\zeta(1+\beta))(\lambda+\alpha\zeta(1+\beta))}I.$$

Definindo

$$\bar{\alpha} = \alpha + \frac{\alpha^{r-1}}{1-\alpha^r}$$

e

$$\bar{\zeta} = \frac{\alpha\zeta(\lambda+\zeta\bar{\beta})(\lambda+\alpha\zeta\bar{\beta})}{\alpha(\lambda+\zeta\bar{\beta})(\lambda+\alpha\zeta\bar{\beta})+\zeta\bar{\beta}(\gamma(\lambda+\alpha\zeta\bar{\beta})-\lambda\gamma^2)},$$

com $\bar{\beta} = (1+\beta)$ e $\gamma = (1-\alpha)$, podemos escrever

$$\Delta V_\theta \leq \frac{-\alpha\zeta\left(\boldsymbol{\varphi}_k^T\tilde{\Theta}_k+\delta_k^T\right)\left(\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k+\delta_k\right)}{\alpha+\zeta\boldsymbol{\varphi}_k^T\bar{P}_k\boldsymbol{\varphi}_k} + \zeta\delta_k^T\delta_k - \left(1-\alpha-\frac{\alpha^{r-1}}{1-\alpha^r}\right)V_\theta,$$

$$\Delta V_\theta \leq -\bar{\zeta}\left(\boldsymbol{\varphi}_k^T\tilde{\Theta}_k+\delta_k^T\right)\left(\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k+\delta_k\right) + \zeta\delta_k^T\delta_k - (1-\bar{\alpha})\,V_\theta.$$

2.2 Lei de Controle

Note que se for possível encontrar uma lei de controle de modo que

$$\Delta V_x \leq -(1-\alpha_x)V_{x_k} + \zeta_x\left(\boldsymbol{\varphi}_k^T\tilde{\Theta}_k+\delta_k^T\right)\left(\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k+\delta_k\right),$$

com α_x uma taxa de decaimento para a função de Lyapunov do sistema e ζ_x um ganho, teremos uma dinâmica uniformemente finalmente limitada considerando o sistema adaptativo como um todo em malha fechada (lei de controle em conjunto com a lei de adaptação), pois para $c = \zeta_x/\bar{\zeta}$ e $\alpha_v = \min(\bar{\alpha},\alpha_x)$, podemos escolher a função de Lyapunov

$$V_k = V_{x_k} + cV_{\theta_k}$$

e temos

$$V_{k+1} \leq \alpha_v V_k + \frac{\zeta\zeta_x}{\bar{\zeta}}\delta_k^T\delta_k.$$

Como o modelo nebuloso utilizado é um aproximador universal, temos que $\delta_k^T\delta_k \leq \bar{\delta}$, e

$$V_k \leq \alpha_v^k V_0 + \frac{\zeta\zeta_x(1-\alpha_v^k)}{\bar{\zeta}(1-\alpha_v)}\bar{\delta}$$
$$\lim_{k\to\infty} V_k \leq \frac{\zeta\zeta_x}{\bar{\zeta}(1-\alpha_v)}\bar{\delta}.$$

Considerando uma função de Lyapunov quadrática, com $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, para V_x, temos então

$$V_x = \boldsymbol{x}_k^T Q\boldsymbol{x}_k$$

e desejamos que

$$\boldsymbol{x}_{k+1}^T Q\boldsymbol{x}_{k+1} - \alpha_x\boldsymbol{x}_k^T Q\boldsymbol{x}_k - \zeta_x\left(\boldsymbol{\varphi}_k^T\tilde{\Theta}_k+\delta_k^T\right)\left(\tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k+\delta_k\right) \leq 0.$$

Definindo $z_k = \tilde{\Theta}_k^T\boldsymbol{\varphi}_k + \delta_k$, temos que $\boldsymbol{x}_{k+1} = (A+BK)\boldsymbol{x}_k + Bz_k$, e desejamos que

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ z_k\end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ z_k\end{bmatrix} \leq 0,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix}-\alpha_x Q & 0\\ 0 & -\zeta_x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A^T+K^TB^T\\ B^T\end{bmatrix} Q \begin{bmatrix}A^T+K^TB^T\\ B^T\end{bmatrix}^T.$$

Uma condição que garante que esta desigualdade seja atendida é que $\Lambda < 0$ que, por meio de um complemento de Schur, pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix}-\alpha_x Q & 0 & A^T+K^TB^T\\ 0 & -\zeta_x & B^T\\ A+BK & B & -Q^{-1}\end{bmatrix} \leq 0.$$

Definindo $X = Q^{-1}$ e $Y = KX$, multiplicando à esquerda e à direita por diag(X,I,I), temos

$$\begin{bmatrix}-\alpha_x X & 0 & XA^T+Y^TB^T\\ 0 & -\zeta_x & B^T\\ AX+BY & B & -X\end{bmatrix} \leq 0.$$

Como mostrado nesta seção, esta Desigualdade Matricial Linear (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) pode ser utilizada para se sintonizar um controlador de modo que o sistema adaptativo seja uniformemente finalmente limitado. Além disso, de modo a mitigar o efeito do erro de aproximação (entre os parâmetros ótimos do aproximador universal e a função desconhecida sendo aproximada), pode-se sintonizar o controlador minimizando-se ζ_x (que afeta de forma diretamente proporcional o limite final garantido para o sistema em malha fechada).

De modo a condensar os resultados apresentados nesta seção, podemos então enunciar o teorema a seguir.

Teorema 1. Considere o sistema apresentado em (1), em que as funções f e g são desconhecidas. Se, dados escalares $\alpha_x \in (0,1)$ e $\zeta_x > 0$, existir uma matriz simétrica e definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{1\times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} -\alpha_x X & 0 & XA^T + Y^T B^T \\ 0 & -\zeta_x & B^T \\ AX + BY & B & -X \end{bmatrix} \leq 0,$$

então a lei de controle com aproximação adaptativa, definida por (2), (3), (6) e (7) e com $K = YX^{-1}$, garante que o sistema em malha fechada é uniformemente finalmente limitado, com

$$\|\boldsymbol{x}_k\|^2 \leq \frac{\zeta\zeta_x}{\bar{\zeta}(1-\alpha_v)\lambda_{\min}(Q)}\bar{\delta}$$

com $\lambda_{\min}(Q)$ o menor autovalor da matriz Q.

3. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o modelo simplificado de um pêndulo invertido sobre um carrinho (desconsiderando a dinâmica do carrinho), modificado de (Tanaka and Wang, 2004, seção 2.6) para incluir atrito sobre o pêndulo

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{g\sin(x_1) - \frac{aml}{2}x_2^2\sin(2x_1) - a\cos(x_1)u + v}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1)}$$

em que x_1 representa o ângulo do pêndulo em relação à vertical, x_2 é a velocidade angular, u é a força aplicada sobre o carrinho, v é um torque de atrito (desconhecido) que atua sobre o pêndulo, $m = 0{,}3$ kg é a massa do pêndulo, $M = 1$ kg a massa do carrinho, $l = 0{,}25$ m a metade do comprimento do pêndulo, $g = 9{,}78$ m/s^2 a aceleração da gravidade, e $a = 1/(m+M)$. Nas simulações apresentadas, o atrito empregado será $v = -5\tanh(100x_2) - 2x_2$. Considerando uma discretização de Euler, com $T_s = 0{,}1$ s, descrevemos o sistema em tempo discreto como apresentado na equação (1), com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ T_s \end{bmatrix}, f(x_2) = v(x_2),$$
$$f_0(\boldsymbol{x}) = \frac{g\sin(x_1) - \frac{aml}{2}x_2^2\sin(2x_1)}{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1)},$$
$$g_0(\boldsymbol{x}) = -\frac{\frac{4l}{3} - aml\cos^2(x_1)}{a\cos(x_1)}$$

e considera-se que não existe $g(\boldsymbol{x}_k)$ desconhecido neste exemplo. As condições do Teorema 1 são resolvidas para $\alpha_x = 0{,}707$ com a condição extra $X \geq I$ (de modo a garantir que menor autovalor de Q será pelo menos maior do que a unidade), encontrando-se o valor de $\zeta_x = 0{,}0143$ e $K = [-30 - 13]$.

Simulamos o comportamento do sistema em malha fechada para quatro controladores diferentes: ignorando o efeito do atrito (sem adaptação), utilizando as condições propostas no Teorema 1 (MQR com fator de esquecimento $\alpha = 0{,}707$, fator de regularização $\lambda = 1000$ e ganho $\zeta = 1$, com 30 funções de pertinência triangulares igualmente espaçadas em $x_2 \in [-20, 20]$), utilizando um MQR sem o uso de um fator de esquecimento (equivalente a tomar $\lambda = 0$ e $\alpha = 1$) e utilizando um MQR com fator de esquecimento, mas sem regularização (equivalente a tomar $\lambda = 0$). O comportamento destes sistemas em malha fechada é comparado na Figura 1, em que é apresentada a norma do estado ao longo do tempo para os quatro controladores.

Por meio da Figura 1, podemos observar que o melhor resultado obtido foi com o controlador adaptativo apresen-

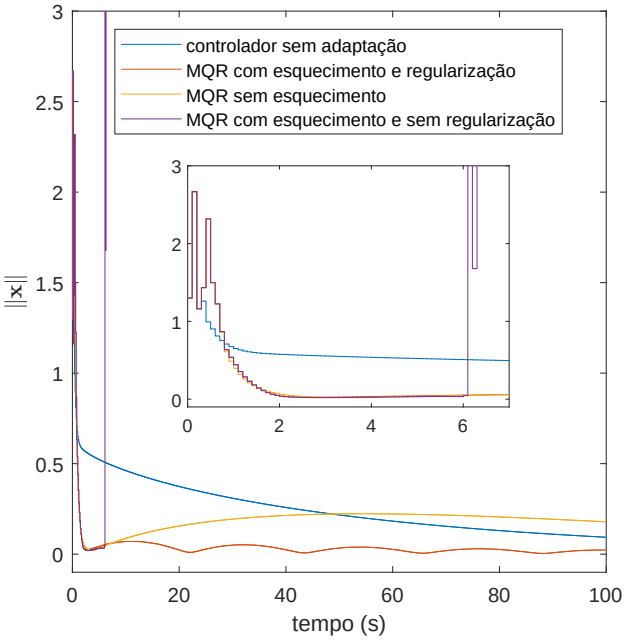

Figura 1. Norma dos estados do sistema em malha fechada ao longo do tempo para os quatro controladores discutidos na Seção 3. Ao centro da figura, é apresentado um zoom nos instantes iniciais do sistema em malha fechada.

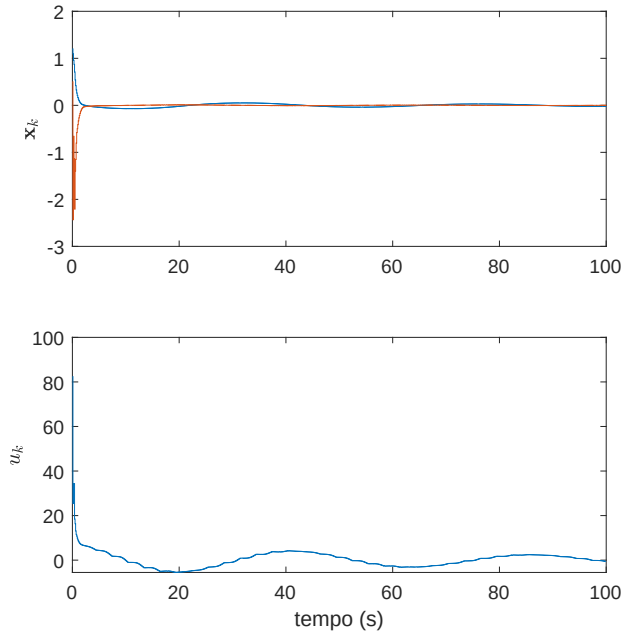

Figura 2. Evolução dos estados (gráfico superior) e da ação de controle (gráfico inferior) do sistema em malha fechada ao longo do tempo para o controlador adaptativo por aproximação utilizando um método dos mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento e regularização variante no tempo proposto no Teorema 1 para o exemplo da Seção 3.

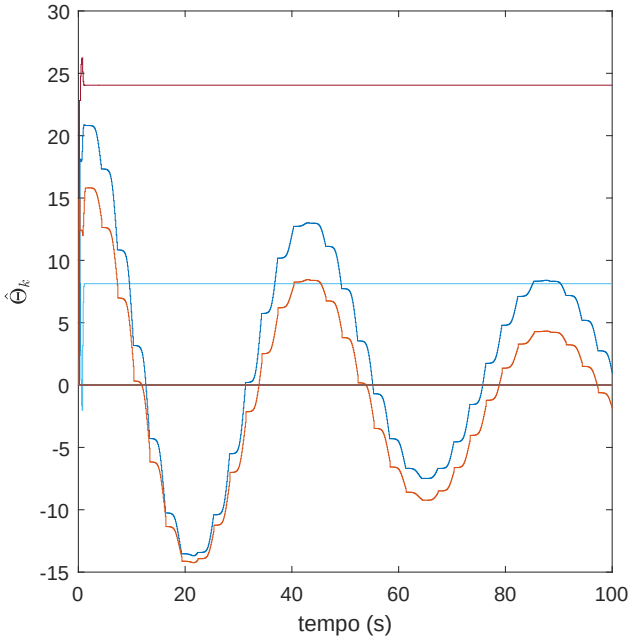

Figura 3. Evolução dos parâmetros estimados ao longo do tempo para o controlador adaptativo por aproximação utilizando um método dos mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento e regularização variante no tempo proposto no Teorema 1 para o exemplo da Seção 3.

tado no Teorema 1. Mesmo o controlador sem adaptação foi capaz de deixar a norma dos estados limitada, porém com uma resposta significativamente lenta. Os três controladores adaptativos tiveram, inicialmente, comportamentos muito parecidos. O controlador sem fator de esquecimento permaneceu com todos os estados/parâmetros limitados em malha fechada, mas teve uma adaptação muito lenta (à medida que o número de dados foi aumentando), o que resultou em uma resposta mais demorada (considerando tempo de "acomodação") em relação ao controlador sem adaptação. O controlador com fator de esquecimento e sem regularização possui um comportamento semelhante ao do controlador proposto no Teorema 1 inicialmente. Entretanto, a falta de persistência de excitação do sinal, levou seus parâmetros a divergirem e, com isso, o sistema em malha fechada ficou instável por volta do 6,1 s. Por fim, o controlador proposto neste artigo, com adaptação utilizando fator de esquecimento e regularização variante no tempo da matriz de covariância, obteve o melhor resultado, garantindo uma resposta mais rápida e com um menor limite final na norma dos estados do que os outros controladores. As Figuras 2 e 3 apresentam a evolução dos estados e dos parâmetros estimados para este controlador, respectivamente, mostrando que ambos ficaram limitados em malha fechada.

4. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho propôs uma regularização variante no tempo simples para a matriz de covariância no método de mínimos quadrados recursivo, evitando a necessidade da inversão de matrizes e fazendo o uso de duas atualizações de posto 1 (consideravelmente mais simples quando o número de parâmetros estimados é grande). Além disso, foi mostrado que essa modificação garante a estabilidade do método de estimação mesmo na ausência da persistência de excitação dos sinais regressores, e que seu uso, no contexto do controle adaptativo baseado em aproximação com modelos TS, garante que o sistema adaptativo em malha fechado é uniformemente finalmente limitado. Um exemplo numérico ilustrou a superioridade, no uso em sistemas de controle adaptativo, da lei de adaptação proposta sobre outras leis de adaptação de mínimos quadrados recursivos mais tradicionais.

Apesar de todas as vantagens mostradas, o artigo se restringiu ao caso do controle de sistemas com uma única entrada de controle e que podem ser linearizáveis por realimentação sem o uso de transformações do espaço de estados. Como direções futuras, almeja-se o estudo de sistemas com múltiplas entradas, assim como sistemas na forma de realimentação estrita (que permitem o uso da técnica de *backstepping*) de forma a generalizar um pouco a classe de sistemas a que se pode aplicar este método.

REFERÊNCIAS

Åström, K. and Wittenmark, B. (2013). *Adaptive Control: Second Edition*. Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications.

Castro, J. (1995). Fuzzy logic controllers are universal approximators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 25(4), 629–635. doi:10.1109/21.370193.

Dasgupta, S. and Huang, Y.F. (1987). Asymptotically convergent modified recursive least-squares with data-dependent updating and forgetting factor for systems with bounded noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33(3), 383–392. doi:10.1109/TIT.1987.1057307.

de Wit, C. and Carrillo, J. (1990). A modified ew-rls algorithm for systems with bounded disturbances. *Automatica*, 26(3), 599–606. doi:10.1016/0005-1098(90)90032-D.

Farrell, J. and Polycarpou, M. (2006). *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. Adaptive and Cognitive Dynamic Systems: Signal Processing, Learning, Communications and Control. Wiley.

Goel, A., Bruce, A.L., and Bernstein, D.S. (2020). Recursive least squares with variable-direction forgetting: Compensating for the loss of persistency [lecture notes]. *IEEE Control Systems Magazine*, 40(4), 80–102. doi:10.1109/MCS.2020.2990516.

Ioannou, P. and Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Kanellakopoulos, I. (1994). A discrete-time adaptive nonlinear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(11), 2362–2365. doi:10.1109/9.333794.

Tanaka, K. and Wang, H.O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.

Wang, L.X. (1993). Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(2), 146–155. doi:10.1109/91.227383.

Wang, L.X. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall PTR.