Gerador de Eventos para Minimização de Transmissões em Sistemas LPV Saturantes ⋆

Miguel L. Rodrigues * **Luís F. P. Silva** ** **Valter J. S. Leite** **

* *Graduação em Engenharia Mecatrônica,* Campus *Divinópolis, CEFET-MG, MG (e-mail: miguellukas52@gmail.com)*
** *Departamento de Engenharia Mecatrônica,* Campus *Divinópolis, CEFET-MG, Divinópolis/MG, (e-mail: luis@cefetmg.br, valter@ieee.org)*

Abstract: This work proposes a strategy for synthesizing event generators to minimize the number of transmissions over the network. The application considers discrete-time systems with saturating actuators and time-varying linear parameters (LPV). The LPV saturating system is controlled by state feedback with parameter-dependent gain and communication via the network. An error criterion between the controller and system parameters is used for new transmissions. The novelty of the approach lies in the direct optimization of the transmission criterion, which is done indirectly in traditional (convex) methods. For this purpose, algorithms with convex certification steps are presented, which are capable of producing better event generators. In the nonlinear stage, the evolutionary differential optimization method is used. Computational experiments were conducted to evaluate the performance of the proposed approach using an LPV system subject to input saturation, illustrating the proposal's effectiveness.

Resumo: Neste trabalho é proposta uma estratégia para a síntese de mecanismos geradores de evento visando a minimização de transmissões de sinais via rede de dados. A aplicação considera sistemas discretos no tempo, com atuadores saturantes e parâmetros lineares variantes no tempo (LPV). O sistema saturante LPV é controlado por realimentação de estado com ganho dependente de parâmetros e comunicação via rede. Um critério de erro entre os parâmetros do controlador e do sistema é usado para novas transmissões. O diferencial da abordagem está na otimização direta do critério de transmissão, que em métodos (convexos) tradicionais é feito de maneira indireta. Para isso, são apresentados algoritmos com etapas de certificação convexa, capazes de produzir melhores geradores de eventos. Na etapa não-linear utiliza-se o método de otimização diferencial evolutivo. Experimentos computacionais foram realizados para avaliar o desempenho da abordagem proposta utilizando um sistema LPV sujeito a saturação de entrada, ilustrando a eficácia da proposta.

Keywords: Networked control; event-trigged mechanism; Saturating systems; LPV systems; Discrete-time systems; Differential evolutive optimization.

Palavras-chaves: Controle via rede; Mecanismo gerador de eventos; Sistemas com saturação; Sistemas LPV; Sistemas Discretos no tempo; Otimização evolutiva diferencial.

1. INTRODUÇÃO

Ao tratar o controle de processos reais, incertezas e restrições tornam a análise de estabilidade e o projeto de controladores mais desafiadores. Sistemas com incertezas são frequentemente encontrados em ambientes industriais, nos quais o modelo utilizado para representar a dinâmica do processo pode não ser o mesmo que o sistema real (Ackermann, 1993). Adicionalmente, restrições estão sempre presentes em sistemas reais, com destaque para a saturação de atuadores que conduz a desafios teóricos e práticos fundamentais (Bernstein and Michel, 1995; Tarbouriech et al., 2011). Atuadores saturantes decorrem de limites intrínsecos de segurança, energia ou outros limites físicos como, por exemplo, as aberturas máxima e mínima de uma válvula, da construção e operação de processos. Essa não linearidade requer uma análise de estabilidade e um projeto de controladores que leve em conta as condições iniciais do sistema. Especialmente para sistema instáveis em malha aberta, um sistema de controle sob restrições não consegue levar as trajetórias para o ponto de equilíbrio (usualmente a origem) para qualquer condição inicial. O projeto de controladores para modelos incertos e sob restrições torna-se ainda mais desafiador no contexto de controle via rede (Hetel et al., 2017). Neste caso, a transmissão de medidas e sinais de controle está sujeita a atrasos, congestionamentos e períodos variáveis de amostragem (Seuret, 2012). Esses problemas podem ser mais significativos no contexto de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV, do inglês *linear parameter varying*) (Briat, 2015). No caso de sistemas LPV controlados via rede, pode

⋆ Este trabalho foi parcialmente financiado por FAPEMIG (APQ-02100-22, BIC-10300-2022), CNPq (311891/2022-5 e 408411/2023-6), Projeto Stic-Amsud/CAPES NetConHybSDP (20/2022).

haver descasamento entre os parâmetros do controlador e os do sistema, necessitando o tratamento dessa diferença (de Souza et al., 2022). Dentre os diversos problemas enfrentados, destaca-se a utilização de mecanismos geradores de eventos que estabelecem uma política de transmissão de dados (medidas ou sinais de controle) de forma a ocupar minimamente a rede, aumentando sua disponibilidade para outros processos que a partilham. Na literatura podem ser encontradas diversas abordagens, para modelar e tratar as restrições de transmissão de dados via rede, atuadores saturantes, etc (Moreira et al., 2016; Wu et al., 2014).

Nesse sentido, a crescente informatização industrial, o uso de geradores de eventos e realimentação de estados para sistemas incertos sujeitos à saturação de atuadores têm ganhado atenção na busca por condições de análise menos conservadoras e projetos mais eficientes (Tabuada, 2007). Em contraste com as técnicas clássicas, as ações de controle são executadas seguindo uma política de transmissão formulada através de restrições pré-estabelecidas. Em geral, há duas abordagens mais frequentemente encontradas na literatura: uma em que a ativação da transmissão ocorre com base nos valores da função de Lyapunov associada ao sistema (Velasco et al., 2009; Marchand et al., 2013; Ghodrat and Marquez, 2023) e outra em que o gerador de eventos depende do erro entre os estados transmitido e estado atual do processo (e/ou sinal de controle transmitido e sinal de controle atual) (Moreira et al., 2020; Wang et al., 2018) (Moreira et al., 2019; de Souza et al., 2021, 2022). Em todos os casos, as abordagens encontradas na literatura buscam aumentar a disponibilidade de comunicação pela minimização do número de transmissões via técnicas indiretas: os critérios de otimização utilizados são baseados em pistas advindas da formulação do problema, mas que não guardam efetiva correlação com o número de transmissões. Nesse contexto, as propostas (em geral) são elegantemente formuladas com base em otimização convexa, porém tratando de maneira indireta um ponto crucial do controle via rede. Além disso, a diferença paramétrica entre o sistema e o controlador é quase sempre vista como uma perturbação a ser rejeitada pelo controlador, não sendo efetivamente tratada. Uma exceção pode ser vista em de Souza et al. (2022). A contribuição principal deste trabalho é a proposição de uma abordagem que trata o desafio do projeto de um gerador de eventos que minimize as transmissões via rede de forma direta. Além disso, a formulação proposta inclui o tratamento explícito do descasamento de parâmetros entre o controlador e o sistema real. Para isso, propõe-se um método em duas etapas: na primeira, um procedimento de otimização não-linear busca os parâmetros do gerador de eventos. Na segunda etapa, formulada em termos de um procedimento de otimização convexa, busca-se um controlador estabilizante que maximize a região de atração da origem e considerando o descasamento de parâmetros entre sistema e controlador. O desenvolvimento é feito em torno de sistemas discretos no tempo, com parâmetros lineares variantes e sujeitos a atuadores saturantes. Na etapa da otimização não-linear, propõe-se o uso de um algoritmo de evolução diferencial para buscar os melhores parâmetros para o gerador de eventos. Essa classe de algoritmo pode lidar com problemas não convexos de forma eficiente e com um número reduzido de indivíduos (Storn and Price, 1997; Souza and Gonçalves, 2017). A etapa convexa baseia-se no trabalho de de Souza et al. (2022) que permite considerar o descasamento de parâmetros entre sistema e controlador. Portanto, trata-se de uma abordagem híbrida, utilizando o algoritmo diferencial evolutivo em conjunto com uma abordagem convexa para sistemas discretos no tempo do tipo LPV sujeitos a atuadores saturantes. O trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é formalizado o problema central deste trabalho. Na Seção 3, são apresentados os resultados preliminares utilizados na Seção 4, que descreve as principais contribuições desta proposta. Um exemplo numérico é apresentado na Seção 5, ilustrando a eficácia da abordagem. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões e sugestões para continuidade desta pesquisa.

Notações: O conjunto de matrizes com entradas reais e dimensões $n \times n$ é denotado por $\mathbb{R}^{n\times n}$, e $\mathbb{R}^n$ denota os vetores de entradas reais e dimensões $n \times 1$. A função sinal é definida como $\texttt{sign}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ e $\texttt{sign}(x) = 0$, para $x = 0$. O conjunto dos números naturais no intervalo $[a,\ b]$, $b > a$, é denotado por $\mathcal{I}[a,\ b]$. $S_{(\ell)}$ denota a ℓ-ésima linha de S. $\mathbb{S}^n$ representa o conjunto de matrizes simétricas de ordem n. O desvio padrão para um conjunto de amostras x é denotado por $\texttt{std}(\mathrm{x})$.

2. O PROBLEMA DE CONTROLE

Considere o seguinte sistema discreto no tempo com parâmetros lineares variantes e sujeito à ação de atuadores saturantes:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\texttt{sat}\left(u_k\right), \tag{1}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle e $\texttt{sat}\left(u_k\right)$ é a função de saturação simétrica padrão, definida por: $\texttt{sat}\left(u_{k(\ell)}\right) = \texttt{sign}(u_{k(\ell)})\min(|u_{k(\ell)}|, \rho_\ell)$, sendo $\rho_\ell > 0$, com $\ell \in \mathcal{I}[1, n_u]$, a amplitude da saturação simétrica relativa à ℓ-ésima entrada do sistema. O vetor de parâmetros incertos e variantes no tempo $\alpha_k \in \mathbb{R}^N$ pertence ao simplex unitário dado por $\Lambda \triangleq \left\{\alpha_k \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} = 1, \alpha_{k(i)} \geq 0, i \in \mathcal{I}[1, N]\right\}$. As matrizes $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ são dadas na forma politópica, isto é, $[A(\alpha_k)\ B(\alpha_k)] = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)}\,[A_i\ B_i]$.

Para estabilizar o sistema (1), propõe-se a utilização da seguinte lei de controle de realimentação de estados baseada em eventos:

$$u_k = K(\tilde{\alpha}_k)\tilde{x}_k, \tag{2}$$

em que $\tilde{x}_k$ e $\tilde{\alpha}_k$ são os últimos vetores de estado e de parâmetros, respectivamente, transmitidos. A matriz de ganhos do controlador $K(\tilde{\alpha}_k)$ é dada na forma politópica, ou seja, $K(\tilde{\alpha}_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_{ki}K_i$, sendo $K(\tilde{\alpha}_k) \in \mathbb{R}^{n_u\times n}$ e $\tilde{\alpha}_k \in \Lambda$. O uso do controlador (2) em (1) resulta no seguinte sistema LPV saturante em malha fechada:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\texttt{sat}\left(K(\tilde{\alpha}_k)\tilde{x}_k\right). \tag{3}$$

Note que o sistema em malha fechada (3) depende tanto dos valores correntes, x_k e α_k, quanto dos últimos valores transmitidos, $\tilde{x}_k$ e $\tilde{\alpha}_k$, do estado e dos parâmetros. Essa dependência é consequência do uso do mecanismo gerador de eventos (ETM, do inglês *Event-Trigger-mechanism*), introduzido para reduzir a ocupação da rede de dados.

Assume-se a topologia apresentada no diagrama da Figura 1, que apresenta o sistema LPV, dado por (1), sujeito ao atuador saturante (bloco azul), um bloco de ETM, a rede de dados (*a priori* partilhada por outros processos) e a lei de controle dependente de parâmetros. No bloco ETM podem ser observadas duas estruturas responsáveis pela decisão de transmissão de dados. Uma estrutura avalia necessidade de transmissão considerando o comportamento do estado, enquanto a outra avalia a necessidade de transmissão a partir do comportamento do parâmetro LPV. Portanto, é necessário projetar essas duas estruturas e o controlador $K(\tilde{\alpha}_k)$ para prover uma solução para o seguinte problema.

Problema *1.* Determinar $K(\tilde{\alpha}_k)$ para a lei de controle (2) dado mecanismo de geração de eventos de modo a garantir a estabilidade local assintótica do sistema em malha fechada resultante (3) e garantindo uma dada estimativa da região de atração da origem (RAO), mediante o descasamento de parâmetros entre controlador e sistema.

Problema *2.* Buscar os parâmetros do mecanismo gerador de eventos de forma a resolver o Problema 1 com a minimização do número de transmissões de dados via rede.

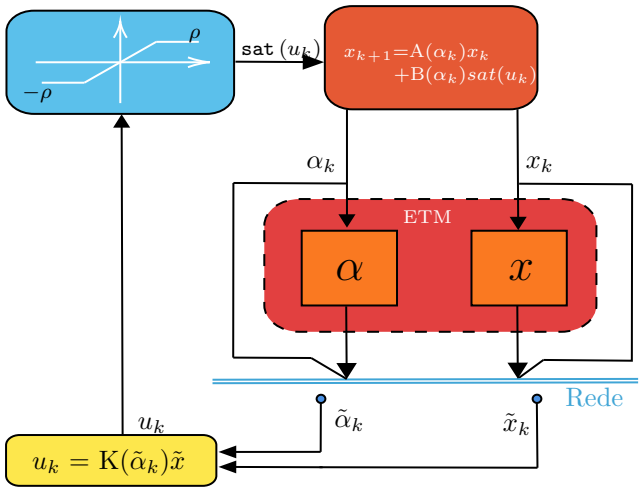

Figura 1. Esquemático do Gerador de Eventos

3. RESULTADOS PRELIMINARES

Seguindo de Souza et al. (2022), a política de transmissão de dados pode ser projetada de forma independente para estados e parâmetros. No caso dos estados, adota-se o seguinte critério:

$$\tilde{x}_k := \begin{cases} x_k, & \text{se } ||\tilde{x}_k - x_k||^2_{\mathcal{Q}_\Delta(\tilde{\alpha}_k)} > ||x_k||^2_{\mathcal{Q}_\mathcal{X}(\tilde{\alpha}_k)} \\ \tilde{x}_{k-1}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4)$$

em que as matrizes $\mathcal{Q}_\Delta(\tilde{\alpha}_k) = \mathcal{Q}_\Delta^\top(\tilde{\alpha}_k) > 0$ e $\mathcal{Q}_\mathcal{X}(\tilde{\alpha}_k) = \mathcal{Q}_\mathcal{X}^\top(\tilde{\alpha}_k) > 0$ ponderam a combinação linear dos produtos dos estados, impactando de forma direta a quantidade de transmissões ativadas pelo ETM. Essas matrizes são dadas na forma politópica por $[\mathcal{Q}_\Delta(\tilde{\alpha}_k)\ \mathcal{Q}_\mathcal{X}(\tilde{\alpha}_k)] = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_{ki}\,[\mathcal{Q}_{\Delta i}\ \mathcal{Q}_{\mathcal{X}i}]$. A transmissão dos parâmetros é ativada em função do erro entre o valor atual do parâmetro e o último valor transmitido. Para isso é utilizada a abordagem proposta em da Cunha et al. (2022) em que é possível reescrever $\tilde{\alpha}_k$ como:

$$\tilde{\alpha}_{k(i)} = (1-e)\alpha_{k(i)} + eh_{k(i)} \quad (5)$$

para um vetor $h_k \in \Lambda$, sendo que $\tilde{\alpha}_{k(i)}$ é o parâmetro do controlador, $\alpha_{k(i)}$ o do sistema e e refere-se a uma medida de erro máximo admitido entre esses vetores. Com isso, é necessário assegurar que $\tilde{\alpha}_k$ pertença ao intervalo:

$$\alpha_k(1-e) \le \tilde{\alpha}_k \le \alpha_k(1-e) + e. \quad (6)$$

Note que, se $e = 0$ nenhuma diferença é admissível entre os parâmetros do controlador e do sistema. Essa é a hipótese comum em trabalhos com sistemas LPV. Portanto, pode-se usar a política de transmissão de parâmetros dada por:

$$\tilde{\alpha}_k := \begin{cases} \alpha_k, & \text{se (6) não for verificada} \\ \tilde{\alpha}_{k-1}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7)$$

O sistema (3) em malha fechada com (2), com o ETM proposto, (4) e (6)-(7) resultam no seguinte modelo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = &(A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\tilde{\alpha}_k))x_k \\ &+ B(\alpha_k)K(\tilde{\alpha}_k)\Gamma_k - B(\alpha_k)\Psi(K(\tilde{\alpha}_k)\tilde{x}_k) \end{aligned} \quad (8)$$

em que $\Gamma_k = \tilde{x}_k - x_k$ é o vetor de diferença entre os estados transmitidos e os do sistema e $\Psi(K(\tilde{\alpha}_k)\tilde{x}_k) = u_k - \texttt{sat}\,(u_k)$ é a função de zona morta. Sabendo da estrutura politópica das matrizes em (8) e usando a relação (5) pode-se obter:

$$x_{k+1} = \sum_{q=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \sigma_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{kj}\varphi_q 0.5 A_{ijq} \quad (9)$$

em que $A_{ijq} = 0.5\Big((A_i + A_j)x_k - (B_i + B_j)\Psi_k + (1-e)(B_iK_j + B_jK_i)x_k + e(B_i + B_j)K_q(x_k + \Gamma_k)\Big)$, com $\sigma_{ij} = 1$ quando $i = j$, e 2 caso contrário. Para assegurar a estabilidade assintótica local de (9), propõe-se a seguinte candidata à função de Lyapunov: $V(x_k, \tilde{\alpha}_k) = x_k^\top P(\tilde{\alpha}_k)x_k$, $P(\tilde{\alpha}_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_{k(i)}P_i$, e $P(\tilde{\alpha}_k) = P^\top(\tilde{\alpha}_k) > 0$. As condições propostas em de Souza et al. (2022), resolvem o Problema 1 via métodos de otimização convexa, realizando o co-design (projeto simultâneo do controlador e do ETM). Essas condições são retomadas no lema a seguir.

Lema *3.* Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $W_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{Q}_{\mathcal{X}i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\tilde{Q}_{\Delta i} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uma matriz diagonal definida positiva $L_i \in \mathbb{R}^{m\times m}$, matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $S_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, e $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, além de um escalar $0 \le e \le 1$, tal que as LMIs (10) (próxima página) e

$$\begin{bmatrix} \bar{e}W_i + eW_q - U - U^\top & \bar{e}S_i^\top + eS_q^\top \\ \star & -\rho_\ell^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

são factíveis para $i, q \in \mathcal{I}[1, N]$, e $\ell \in \mathcal{I}[1, n_u]$, sendo $\bar{e} = (1-e)$. Então, o sistema (8) com a lei de controle (2), sujeito aos ETMs (4) e (7), além de matrizes $Q_{\Delta i} = U^{-\top}\tilde{Q}_{\Delta i}U^{-1}$, $Q_{\mathcal{X}i} = U^{-\top}\tilde{Q}_{\mathcal{X}i}U^{-1}$ e $K_i = Z_iU^{-1}$ é assintoticamente estável.

Prova. Veja (de Souza et al., 2022, p. 4).

Para garantir uma região de atração adequada, pode-se utilizar a seguinte restrição:

$$P_i^{-1} = W_i \ge \gamma I, \quad \gamma > 0, \quad (12)$$

em que I é a matriz identidade e a restrição (12) assegura que a estimativa da região de atração da origem está internamente limitada por uma bola de raio $\sqrt{\gamma}$.

3.1 Algoritmo Diferencial Evolutivo

O algoritmo Diferencial Evolutivo (DE) é uma técnica de otimização pertencente à classe dos algoritmos evolutivos.

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}0.5\bar{e}\Big(Qx_i+Qx_j+W_i+W_j\Big)\\ +e(Qx_q+W_q)-U-U^\top\end{matrix} & \star & \star & \star \\ 0 & -0.5\bar{e}(\tilde{Q}_{\Delta i}+\tilde{Q}_{\Delta j})-e\tilde{Q}_{\Delta q} & \star & \star \\ \begin{matrix}0.5\bar{e}\Big(Z_i+Z_j-S_i-S_j\Big)\\ +e(Z_q-S_q)\end{matrix} & 0.5\bar{e}(Z_i+Z_j)+eZ_q & -\bar{e}(L_i+L_j)-2eL_q & \star \\ \begin{matrix}0.5\Big((A_i+A_j)U+\bar{e}(B_iZ_j+B_jZ_i)\\ +e(B_i+B_j)Z_q\Big)\end{matrix} & \begin{matrix}0.5\Big(\bar{e}(B_iZ_j+B_jZ_i)\\ +e(B_i+B_j)Z_q\Big)\end{matrix} & \begin{matrix}0.5\Big(\bar{e}(B_iL_j+B_jL_i)\\ +e(B_i+B_j)L_q\Big)\end{matrix} & -\bar{e}W_r-eW_s \end{bmatrix} < 0 \qquad (10)$$

$$i,q,r,s\in\mathcal{I}[1,N],\quad j\in\mathcal{I}[i,N]$$

Este método foi proposto por Storn and Price (1997) para resolver problemas de otimização global, principalmente em espaços de busca contínuos e de grandes dimensões. O DE trabalha com um conjunto de vetores de parâmetros que representam potenciais soluções do problema de otimização. Cada vetor é um indivíduo, composto por valores reais. A principal característica desse algoritmo é a mutação diferencial, que confere à busca com otimalidade de melhores possibilidades de sucesso. Essa operação é responsável por gerar novas soluções através da diferença entre vetores de parâmetros na população. Dessa forma, no algoritmo DE trabalha-se com N_p indivíduos por uma sequência de no máximo N_G gerações e uma função objetivo $\mathcal{O}(x)$ que deseja-se minimizar. Basicamente, o algoritmo constitui-se por 4 etapas. Inicialmente é criada uma população inicial $Z_{t=1}$, em que t é o número da geração ($t=1,\ldots,N_G$). O i-ésimo indivíduo da população Z_t é indicado por $z_{t,i}$, em um total de N_p indivíduos. A seguir o DE repete uma sequência de 3 etapas: mutação, recombinação e seleção. Na *mutação* é formada uma população mutante V_t com N indivíduos a partir de operações realizadas sobre os indivíduos de Z_t. A etapa seguinte consiste na *recombinação* para a formação de uma população de teste U_t, em que são sorteados indivíduos entre as populações Z_t e V_t. Finalmente, na etapa de *seleção* os indivíduos da população de teste U_t são confrontados com os da população Z_t via função objetivo, selecionando-se os de melhor desempenho, ou seja, candidatos resultando nos menores valores da função objetivo. Esse procedimento se repete por até $t=N_G$ gerações ou até que algum critério de convergência da função objetivo seja atingido: por exemplo, a redução do $\min_{i=1,\ldots N_p}(\mathcal{O}(z_{k,i}))$, $t-\kappa\le k\le t$, seja inferior a $\varepsilon>0$ nas últimas κ iterações. Para mais detalhes sobre as operações realizadas em cada etapa do DE veja Storn and Price (1997).

4. RESULTADOS PRINCIPAIS

Como mencionado anteriormente, os métodos encontrados na literatura para reduzir o número de transmissões são indiretos, e por isso muitas vezes não estão efetivamente reduzindo o número de transmissões. Dessa forma, propõe-se a seguinte função de custo:

$$\mathcal{J}(\alpha,x)=\frac{1}{2N_\alpha}\sum_{i=1}^{N_\alpha}\left(\max\left(\mathcal{F}(\alpha_i,x)\right)+\min\left(\mathcal{F}(\alpha_i,x)\right)\right) \quad (13)$$

em que $\mathcal{F}(\alpha_i,x_i)$, que representa o número de transmissões realizadas para um determinado perfil de parâmetro e condição inicial. Para cada perfil de parâmetro, são realizadas N_x simulações com diferentes condições iniciais. Dessa forma, se tivermos N_α perfis diferentes, o número total de simulações será $N_{\text{sim}}=N_\alpha N_x$. Pode-se então escrever o problema de otimização como $\min_{\mathcal{Q}_\mathcal{X},\mathcal{Q}_\Delta}\mathcal{J}(\alpha,x)$, minimizando a função custo $\mathcal{J}$ pela escolha das matrizes $\mathcal{Q}_{\mathcal{X}i}$, $\mathcal{Q}_{\Delta i}$, $i=1,\ldots,N$, considerando um conjunto de condições iniciais x_0 e sequências de parâmetros α_k. Assim, o algoritmo diferencial evolutivo deverá encontrar as matrizes do ETM responsáveis por minimizar o número de transmissões. Como as matrizes são simétricas, o número de variáveis totaliza $N_v=N(n^2+n)$. Dessa forma, o projeto das matrizes do ETM se faz considerando diretamente diferentes configurações de condição inicial e sequências de parâmetro, reduzindo efetivamente o número de transmissões. Em cada iteração, o algoritmo diferencial evolutivo produz um vetor de variáveis que compõem as matrizes do ETM. Com essas variáveis, as matrizes são montadas e então tenta-se encontrar uma solução factível para as LMIs (10)–(12). Em caso de factibilidade, são realizadas 32 simulações com diferentes condições iniciais distribuídas na borda da região de atração, e 8 diferentes sequências de α_k. O caso com maior número de transmissões é guardado. Ao final das simulações para os diferentes perfis de α_k, a função de custo é calculada como a soma do pior de todos os casos adicionado da média dos piores casos de cada perfil, como dado em (13). Por outro lado, em caso de infactibilidade, o custo é calculado como o maior autovalor das LMIs (maior violação), multiplicado por um fator de escala (neste trabalho, 10^4). O Algoritmo 1 estrutura o do cômputo do custo. Etapa relevante do Algoritmo 1 está em seu passo 2, tratando da montagem das matrizes relacionadas ao ETM. Essa etapa é detalhada no Algoritmo 2. A relevância desse algoritmo consiste em apresentar uma solução simples e de baixo custo computacional para assegurar matrizes semi-definidas positivas no ETM. Sendo as matrizes simétricas, apenas $n(n+1)/2$ elementos de cada uma são sequencialmente armazenados em indivíduos $h_{t,i}$, com h podendo ser um indivíduo das populações V_t, Z_t ou U_t. Além disso, é interessante observar que a busca feita pelo DE não se dá diretamente no espaço dos parâmetros das matrizes $Q_\mathcal{X}$ e Q_Δ, mas num espaço correspondente à decomposição *Cholesky* dessas matrizes. Finalmente, observe que ao realizar o procedimento de cômputo do custo, as matrizes obtidas a partir do Algoritmo 2 precisam passar por uma transformação de congruência, assim como os ganhos K_i, $i=1,\ldots,N$, para a implementação do gerador de eventos (4). Veja passos 10-11 no Algoritmo 1 e Lema 3. Dessa forma, o

Algoritmo 3 sumariza a proposta de otimização híbrida deste trabalho. Esse algoritmo implementa os passos do DE para buscar as melhores matrizes $Q_{\mathcal{X}i}$ e $Q_{\Delta i}$ para minimizar as transmissões, enquanto o Lema 3 com (12) são usados para o projeto dos ganhos K_i e certificação da estabilidade local via otimização convexa.

Algoritmo 1 Cômputo do custo associado ao indivíduo $h_{t,i}$.

função $custo(h_{t,i})$
  $\tilde{Q}_{\mathcal{X}}, \tilde{Q}_{\Delta} \leftarrow$ *estrutura_matrizes*$(h_{t,i})$;
  $N_x \leftarrow$ Número de Cond. Iniciais;
  $N_\alpha \leftarrow$ Número de Perfis de Parâmetro;
  $\alpha \leftarrow$ Conjunto de perfis de parâmetro;
  $x \leftarrow$ Conjunto de condições iniciais;
  $\sqrt{\gamma} \leftarrow$ Raio da região de interesse;
  Resolve Lema 3 sujeito a (12).
  se Problema é factível **então**
    $K_i \leftarrow Z_i U^{-1}$;
    $Q_{\Delta i} \leftarrow U^{-\top}\tilde{Q}_{\Delta i}U^{-1}$, $Q_{\mathcal{X}i} \leftarrow U^{-\top}\tilde{Q}_{\mathcal{X}i}U^{-1}$;
    para $\alpha \leftarrow i = 1$ até N_α **faça**
      para $x \leftarrow j = 1$ até N_x **faça**
        Simule o sistema com $(Q_{\mathcal{X}}, Q_{\Delta}, K, \alpha, x)$
        Guarde número de transmissões
    Custo $\leftarrow$ (13)
  senão
    Calcule as violações das LMIs
    Custo $\leftarrow 10^4 \max$(violações)
retorne Custo

Algoritmo 2 Estrutura matrizes ETM para $h_{t,i}$

função *estrutura_matrizes*$(h_{t,i})$
  $N \leftarrow$ Número de Vértices, $n \leftarrow$ dimensão do vetor de estado, $\vartheta \leftarrow n(n+1)/2$;
  para $i \leftarrow 1$ até N_v **faça**
    Tome os elementos de $2(i-1)\vartheta+1$ a $2i\vartheta$ de $h_{t,i}$ e monte $\tilde{Q}_{\Delta i} \in \mathbb{S}^n$ e $\tilde{Q}_{\mathcal{X}i} \in \mathbb{S}^n$;
    $\tilde{Q}_{\Delta,i} \leftarrow (\tilde{Q}_{\Delta,i})(\tilde{Q}_{\Delta,i})$;
    $\tilde{Q}_{\mathcal{X},i} \leftarrow (\tilde{Q}_{\mathcal{X},i})(\tilde{Q}_{\mathcal{X},i})$;
retorne $\tilde{Q}_{\mathcal{X}}, \tilde{Q}_{\Delta}$

Algoritmo 3 Solução para Problema 2.

função *main*(0)
  $L_b \leftarrow z_{jl}$ (limites inferiores), $j = 1, \ldots, N_p$.
  $U_b \leftarrow z_{jh}$ (limites superiores), $j = 1, \ldots, N_p$.
  $t \leftarrow 0$
  $Z_t \leftarrow$ população inicial(L_b, U_b)
  para $i \leftarrow 1$ até N_G **faça**
    se Critério de Parada **então** Fim.
    Realiza Mutação(Z_t)
    Realiza Recombinação(Z_t)
    Para cada indivíduo de Z_t: Custo $\leftarrow custo(h_{t,i})$
    Realiza Seleção(Z_t)
    $t \leftarrow t+1$
retorne $Q_{\mathcal{X}i}$, $Q_{\Delta i}$, K_i, P_i, $i = 1, \ldots, N$.

5. EXEMPLOS

Considere o sistema LPV saturante:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6+\delta_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1-0.8\delta_k \\ 0 \\ 1-\delta_k \end{bmatrix} u_k \quad (14)$$

em que o parâmetro variante no tempo está sujeito ao intervalo $0 \leq \delta_k \leq 0.5$, e o limite simétrico de saturação é $\rho = 0.5$. Pode-se obter uma representação politópica com dois vértices desse sistema usando $\alpha_{k(1)} = 1 - 2\delta_k$, e $\alpha_{k(2)} = 2\delta_k$, resultando nos vértices $A_1 = A(\delta_k = 0)$, $A_2 = A(\delta_k = 0.5)$, $B_1 = B(\delta_k = 0)$, $B_2 = B(\delta_k = 0.5)$. Para realizar os experimentos, o parâmetro referente ao erro admissível entre as funções de pertinência foi fixado em $e = 0.8$. Além disso, a população inicial foi gerada utilizado uma distribuição uniforme de valores entre -1 e 1, sendo que cada variável de otimização pode excursionar de -10 até 10. A região de atração mínima foi estabelecida escolhendo $\gamma \geq 0.8$ em (12). Dessa forma, foram realizados um total de 40 experimentos, sujeitos á diferentes populações iniciais, dentro dos limites especificados. Os experimentos foram realizados utilizando o Algoritmo 3. Para isso, foram usadas as seguintes configurações: Taxa de recombinação $C_R = 0.5$, $N_G = 500$, e tamanho da população $N_p = 32$. Como critério de parada, além de N_G, foi utilizada a redução da função objetivo em menos de 0.01 nas últimas $\kappa = 10$ iterações. Os ganhos K_1 =- $[-0.7\ -5.4\ -29.4]\times 10^{-2}$, $K_2 = [-0.2\ -4.4\ -44.4]\times 10^{-2}$ foram obtidos e as matrizes do mecanismo gerador de eventos encontradas:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{X}(1)} = \begin{bmatrix} 2.4 & -3.8 & 0.9 \\ -3.8 & 9.5 & -0.7 \\ 0.9 & -0.7 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{\Delta(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.9 & 4.7 \\ 0.6 & 4.7 & 25.2 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{Q}_{\mathcal{X}(2)} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.2 & -0.5 \\ -0.2 & 4.2 & 1.6 \\ -0.5 & 1.6 & 1.6 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{\Delta(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 4.9 \\ 0.2 & 4.9 & 50.2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

A simulação do sistema utilizando os resultados obtidos pode ser vista na Figura 2, em que são mostrados na parte superior os estados do sistema (x_k, à esquerda), os estados transmitidos ($\tilde{x}_k$, à direita) e na parte inferior, à esquerda, os sinais de controle calculado (u_k) e o sinal saturado ($\texttt{sat}\,(u_k)$) e à direita, as diferenças nas componentes dos estados. Esses gráficos mostram apenas até o instante $k = 35$ visualizando melhor o transitório. Na Figura 3, tem-se os instantes em que ocorreram transmissões, sendo que pontos vermelhos indicam transmissão devido à ativação do gerador de eventos em (7). De forma semelhante, os pontos em verde indicam a ativação do gerador de eventos em (4).

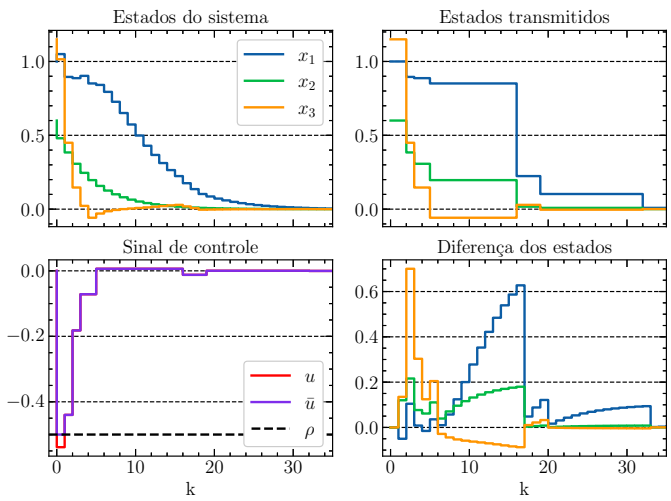

Figura 2. Simulação do sistema em malha fechada para $X_0 = [1, 0.6, 1.15]$

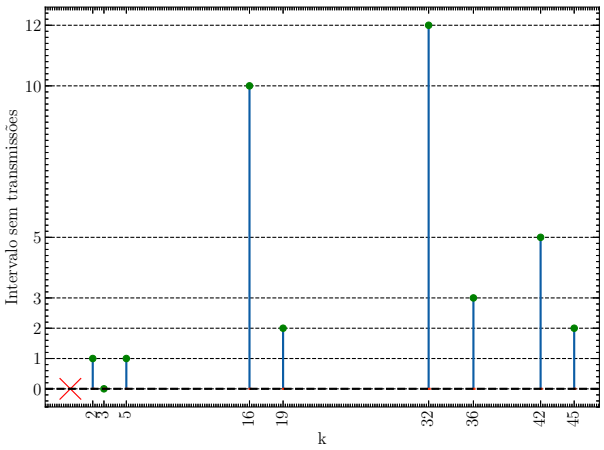

Figura 3. Instantes de ativação dos geradores de evento para transmissão do estado, ●, e dos parâmetros, ×.

Apresenta-se na Tabela 1 um comparativo entre o desempenho alcançado com esta proposta e o obtido por de Souza et al. (2022). A variável Θ representa o número médio de transmissões por perfil de parâmetro realizadas pela ativação da política de transmissão de dados (4). Os dados foram obtidos realizando um conjunto de 1000 simulações para diferentes condições iniciais, usando os geradores de evento obtidos pelo Algoritmo 3 e por de Souza et al. (2021), tomadas sobre a bola de raio $\sqrt{\gamma}$. As médias apresentadas referem-se aos valores obtidos para diferentes perfis de α_k simulados. Observa-se que a média do número máximo de transmissões por perfil de α_k com o uso do Algoritmo 3 é inferior à média do número mínimo de transmissões para o caso usando a otimização proposta em de Souza et al. (2021). A média de transmissões alcançada com esta proposta é da ordem de 64% da verificada com o método de otimização convexa. Além disso, o desvio padrão verificado é menor (da ordem de 44%) para os resultados obtidos com o Algoritmo 3, indicando menor dispersão do comportamento dos geradores de evento.

Tabela 1. Comparação entre os resultados obtidos pelo Algoritmo 3 e de Souza et al. (2021).

Método	$\Theta_{\min}$	$\Theta_{\max}$	Θ_{med}	$\texttt{std}(\Theta)$
Alg. 3	8.433	9.428	8.846	0.354
de Souza et al. (2022)	12.706	15.395	13.859	0.8

6. CONCLUSÕES

Foi apresentada uma metodologia para projeto de um mecanismo gerador de eventos (ETM) visando a minimização das transmissões de dados em um sistema controlado via rede. O sistema considerado é discreto no tempo com parâmetros variantes. O descasamento dos parâmetros entre o sistema e o controlador é considerado, assegurando robustez à malha fechada para certos limites de erro entre o valor atual do parâmetro e o último valor transmitido e em uso pelo controlador. A metodologia proposta envolve uma etapa não-linear, baseada no algoritmo diferencial evolutivo, usada para buscar os parâmetros do ETM e outra convexa para obter o controlador e a certificação de estabilidade da malha fechada. A vantagem dessa metodologia é que, diferentemente dos resultados encontrados na literatura, a redução das transmissões é otimizada diretamente. Exemplos numéricos ilustram a aplicação da técnica, estabelecendo comparações com resultados da literatura.

REFERÊNCIAS

Ackermann, J. (1993). *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer Verlag, London, UK.

Bernstein, D.S. and Michel, A.N. (1995). Special issue on saturating actuators. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 5, 375540.

Briat, C. (2015). *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems — Analysis, Observation, Filtering and Control*, volume 3 of *Advances in Delays and Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

da Cunha, I.H., Castro, C.P., Silva, L.F.P., and Leite, V.J.S. (2022). Análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com premissas parcialmente combinadas. *XXIV CBA*, 3, 865–871.

de Souza, C., Leite, V.J.S., Tarbouriech, S., Castelan, E.B., and Silva, L.F.P. (2022). A direct parameter-error co-design approach of discrete-time saturated LPV systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 67, 4870–4876.

de Souza, C., Leite, V.J.S., Tarbouriech, S., and Castelan, E.B. (2021). Event-triggered policy for dynamic output stabilization of discrete-time LPV systems under input constraints. *Syst. Control Lett.*, 153, 104950.

Ghodrat, M. and Marquez, H.J. (2023). A new lyapunov-based event-triggered control of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 68, 2599–2606.

Hetel, L., Fiter, C., Omran, H., Seuret, A., Fridman, E., Richard, J.P., and Niculescu, S.I. (2017). Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling: An overview. *Automatica*, 76, 309–335.

Marchand, N., Martinez, J., Durand, S., and Guerrero-Castellanos, J. (2013). Lyapunov event-triggered control: a new event strategy based on the control. *IFAC Proc. Vol.*, 46, 324–328.

Moreira, L.G., Gomes da Silva Jr., J.M., Tarbouriech, S., and Seuret, A. (2020). Observer-based event-triggered control for systems with slope-restricted nonlinearities. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 30, 7409–7428.

Moreira, L.G., Groff, L.B., Gomes da Silva Jr, J.M., and Tarbouriech, S. (2016). Event-triggered PI control for continuous plants with input saturation. In *ACC 2016*, 4251 – 4256.

Moreira, L.G., Groff, L.B., Jr., J.M.G., and Tarbouriech, S. (2019). PI event-triggered control under saturating actuators. *Int. J. Control*, 92, 1634–1644.

Seuret, A. (2012). A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*, 48(1), 177–182.

Souza, M.C. and Gonçalves, E.N. (2017). Análise de estabilidade robusta pelo método de evolução diferencial para sistema em tempo discreto. *XIII SBAI*, 424–429.

Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J. Global Opt.*, 11, 341–359.

Tabuada, P. (2007). Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52, 1680–1685.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer, London, UK.

Velasco, M., Martí, P., and Bini, E. (2009). On Lyapunov sampling for event-driven controllers. In *Proc. of the 48h IEEE CDC & 28th CCC*, 6238–6243.

Wang, Y., Jia, Z., and Zuo, Z. (2018). Dynamic event-triggered and self-triggered output feedback control of networked switched linear systems. *Neurocomputing*, 314, 39–47.

Wu, W., Reimann, S., and Liu, S. (2014). Event-triggered control for linear systems subject to actuator saturation. *IFAC Proc. Vol.*, 9492–9497.