Convergência não enviesada em controle extremal q-trigonométrico adaptado por q-exponencial

Robson Wilson Silva Pessoa * **Tiago Roux Oliveira** **

* *Programa de Pós-Graduação em Energia e Ambiente (PGEnAm) da Escola Politécnica da Universidade Federal da Bahia (UFBA), BA, Brasil (e-mail: robsonpessoa@ufba.br)*
** *Departamento de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações (DETEL) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), RJ, Brasil (e-mail: tiagoroux@uerj.br)*

Abstract: Classical extremum seeking (ES) algorithms keep active the permanent search for the presence of a periodic and limited probing signal. However, this structure generates a small periodic bias of the map output to be optimized. In this paper, we propose an algorithm structure perturbed by an adaptive signal with monotonically decreasing amplitude through the Borges q-trigonometry. This structure solves in a simple way the divergences of the increasing adaptation gain of other existing approaches while generating results equivalent to the bias of the signal output without adopting hyperbolic chirps. Furthermore, the proposed methodology has as special cases in the generalized extremum seeking (ES_q), classical extremum seeking and unbiased extremum seeking.

Resumo: Os algoritmos de busca extremal clássicos mantêm ativa a busca permanente pela presença de um sinal de perturbação periódico e limitado. Contudo, esta estrutura gera um pequeno viés periódico da saída do mapa a ser otimizado. Neste artigo propomos uma estrutura de algoritmo perturbada por um sinal de excitação adaptativo com amplitude monotonicamente decrescente por meio da q-trigonometria de Borges. Essa estrutura resolve de maneira simples as divergências do ganho de adaptação crescente em outras abordagens da literatura existente, enquanto gera resultados equivalente em relação ao viés de convergência do sinal de saída do mapa a ser otimizado sem adoção de *hyperbolic chirps*. Além disso, a metodologia proposta tem como casos particulares o controle extremal generalizado (ES_q), controle extremal clássico e controle extremal não enviesado.

Keywords: extremum seeking, q-trigonometria, vanishing oscillations.
Palavras-chaves: busca extremal, q-trigonometry, oscilações decrescentes.

1. INTRODUÇÃO

O controle por busca extremal é classificado no contexto da teoria de controle adaptativo como uma estratégia de otimização em tempo real sem conhecimento de modelos matemáticos. Apesar da ampla variedade de algoritmos desenvolvidos nesta área, recentemente tem sido realizado um conjunto de modificações da versão clássica desse algoritmo que combina a aceleração da busca da região ótima e a eliminação do viés do sinal de saída (também chamadas oscilações em estado estacionário) (Yilmaz et al., 2023). Desde a prova rigorosa de estabilidade desenvolvida por Wang and Krstic (2000), e para sistemas de dimensão infinita em Oliveira and Krstic (2022), o objetivo de projetistas desses tipos de controladores tem sido alcançar um ajuste de sintonia que estabeleça uma relação entre a busca rápida pela região de valor extremo da variável de saída e reduzir o viés resultado da perturbação periódica. Destaca-se ainda a necessidade de sistemas reais em manter a menor perturbação possível da variável manipulada. Esta perspectiva amplia-se ao longo das últimas duas décadas e muitos autores dedicaram-se também à abordagem de busca de extremos não locais, semi-globais ou a busca de extremos globais por Tan et al. (2006, 2009). A evolução dessa abordagem tem origem na proposta de Tan et al. (2009) que envolve uma modificação da amplitude do sinal de perturbação por meio de uma função exponencialmente decrescente com o objetivo de uma busca global, enquanto reduz a perturbação ao longo do tempo. Contudo, a abordagem de Tan et al. (2009) não inclui qualquer alteração do ganho, ou seja, ele permanece constante e sintonizado com valor muito pequeno em comparação à frequências da função de perturbação do controlador extremal clássico.

Mais recentemente, Wang et al. (2016) propuseram uma abordagem que envolve a amplitude adaptativa do sinal de perturbação, governado por um sinal do filtro passa-baixas e oriundo de um filtro passa-altas sobre a saída do sistema, enquanto o ganho permanece inalterado, assim como na proposta de Tan et al. (2009).

Apesar dos avanços obtidos pelos trabalhos supracitados, há espaço para novos desenvolvimentos, especialmente focados na sintonia dos controladores para alcançar a atenuação de oscilações do sinal de saída. A proposta de

(Pokhrel and Eisa, 2023) consiste na estimativa dos estados por filtro de Kalman via sistemas representados por *Lie Bracket* que levam à atenuação do sinal. A estratégia adotada por (Abdelgalil and Taha, 2020) também aplica as aproximações dos *Lie Bracket* que resulta na atenuação do sinal, sendo necessário relaxar hipóteses desta teoria, contudo, sem limitar as amplitudes e frequências dos sinais de excitação.

A necessidade de obter respostas mais rápidas associadas à atenuação de oscilações para o estado estacionário ótimo tem promovido a criação de alternativas ao algoritmo de controle extremal clássico. Assim, novos algoritmos foram desenvolvidos com funções com amplitude de perturbações adaptativas, que possuem comportamento monotonicamente decrescente, flexibilizando a sintonia de controladores, seja pela redução da amplitude do sinal de perturbação ou quanto à adaptação do ganho para acelerar a busca das vizinhanças do valor extremo. Pessoa et al. (2019) elaboraram uma nova estrutura inicialmente inspirada na abordagem de Tan et al. (2009) e associada à q-trigonometria de Borges (1998). Tal estrutura é constituída da adição do sinal da função $a_q \sin_q(\cdot)$ à estrutura clássica do controle extremal, seja no sinal de perturbação aditiva, seja no sinal de um demodulador. Essa abordagem resulta para tempos longos na recuperação do algoritmo clássico do ES, uma vez que a função $a_q \sin_q(\cdot)$ é formada pelo produto de uma lei de potência decrescente ($q > 1$) e função periódica, tendo comportamento geral com número de ciclos limitados e redução da amplitude ao longo do tempo. Como veremos nas seções seguintes, esta estratégia permite ampliar o domínio de busca, acelerar a busca pela vizinhança do extremo e atenuar as oscilações em torno do valor extremo ou mesmo eliminá-la.

Assim, uma nova classe de algoritmos de ES é proposta neste artigo com o objetivo de reduzir o viés na busca pelo estado ótimo. É utilizada uma abordagem de tempo prescrito inspirada em Yilmaz et al. (2023), por meio da aplicação de uma função exponencialmente decrescente α na adaptação da amplitude da função de perturbação e α^{-1} para o sinal demodulador. Contudo, a proposta não permite convergência assintótica ou exponencial no sentido clássico de Lyapunov. Tal problema ocorre devido à divergência do ganho crescente assumido no controle extremal. Neste trabalho, apresentamos uma nova proposta que soluciona este problema, mantendo os objetivos investigados por Yilmaz et al. (2023), contudo, sem limitação do tempo total de validade da solução. Por meio do formalismo oriundo da mecânica estatística não aditiva de Tsallis (2009), particularmente apoiado em argumentos da álgebra, funções e q-trigonometria, nós propomos um algoritmo capaz de atingir a convergência para um tempo determinado.

2. ASPECTOS DA q-TRIGONOMETRIA

A trigonometria generalizada desenvolvida por Borges (1998) define funções circulares e hiperbólicas sobre formas generalizadas derivadas da estatística de Tsallis (1988). As principais definições e propriedades de q-funções e q-álgebra podem ser encontradas em Yamano (2002), Naudts (2002), Tsallis (2009), e outras citadas por eles. Nesta seção, são apresentadas apenas algumas funções da trigonometria generalizada que podem ser aplicadas a uma classe de métodos de otimização de sistemas dinâmicos (Pessoa et al., 2019).

A função q-exponencial é definida por:

$$\exp_q x = [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, \tag{1}$$

onde o símbolo $[A]_+$ como $[A]_+ = A$, se $A > 0$, e $[A]_+ \equiv 0$ se $A \leq 0$. A diferença entre a função q-exponencial e exponencial está no comportamento da cauda da função, sendo a primeira com caimento lento para $q > 1$, e abrupto com desaparecimento para $q < 1$, enquanto a segunda tem cauda exponencial.

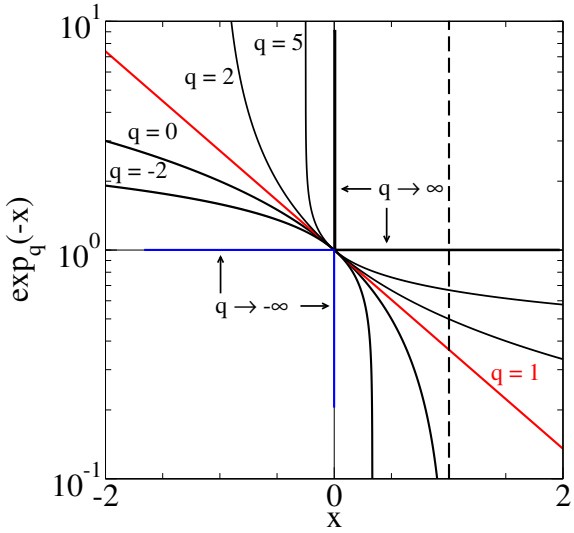

Figura 1. Comportamento da função q-exponencial $\exp_q(\beta x)$, com $\beta = -1$.

Na Figura 1 são apresentados gráficos da função q–exponencial para diferentes valores do parâmetro q, que inclui o caso particular para $q = 1$ (linha vermelha), recuperando-se $\exp_1(-x) = \exp(-x)$. A condição de *cut-off* para $q > 1$ é $x > 1/(1-q)$ e para $q < 1$ é $x < 1/(1-q)$. Por exemplo, a linha vertical tracejada representa a divergência para $q = 0$. Para o limite $q \to -\infty$, a q-exponencial é representada pela linha azul e para $q \to \infty$ pela linha preta.

A função seno generalizada pode ser apresentada pela expansão

$$\sin_q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j Q_{2j} x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad q > 1, \tag{2}$$

onde Q é a função:

$$Q_n(q) = 1q(2q-1)(3q-2)\ldots[nq-(n-1)], \quad q > 1. \tag{3}$$

As equações (2) e (3) tem garantia de convergência para

$$|x| = |1-q|^{-1}, \quad q > 1. \tag{4}$$

A equação (2) pode ainda ser apresentada na sua forma compacta

$$\sin_q(x) = \rho_q(x) \sin_1[\phi_q(x)], \tag{5}$$

com $\rho_q(x)$ dado por:

$$\rho_q(x) = \exp_q((1-q)x^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

O argumento da função seno generalizada é definido como:

$$\phi_q(x) = \frac{\arctan_1[(1-q)x]}{1-q}. \tag{7}$$

O índice 1 representa o caso usual, isto é, $\sin_1(x) = \sin(x)$. De forma similar à função seno, a função $\cos_q(x)$ é associada a trigonometria generalizada por:

$$\cos_q(x) = \rho_q(x)\cos_1[\phi_q(x)]. \tag{8}$$

A Figura 2 ilustra o comportamento da relação $\sin_q(\omega t)$ e $\cos_q(\omega t)$ para diferentes valores de q (note que $q > 1$). Diferente do círculo formado para a relação trigonométrica usual ($q = 1$), para valores de $q > 1$ esta função reduz sua amplitude à medida que aumenta a variável t e tem o número de ciclos limitados, como destacado por Borges (1998). Estas características são mais evidentes para valores de q cada vez maiores.

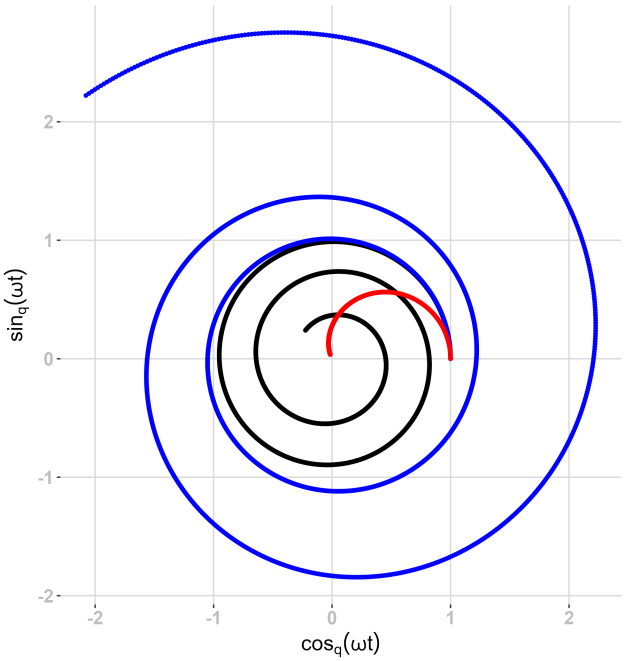

Figura 2. A função $\sin_q(\omega t)$ versus $\cos_q(\omega t)$. A curva preta representa $q = 1.01$, a azul $q = 0.99$ e a curva vermelha $q = 1.75$. Todas as curvas iniciam em $t = 0$.

3. DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

A priori, definiremos um conjunto de notações que são necessárias para o desenvolvimento do algoritmo de *controle extremal* clássico. Aqui, é definido um sistema não linear genérico como $\frac{dx}{dt} = f(t, x, \epsilon)$ onde $x \in \Re^n$, $f(t, x, \epsilon)$ é periódica em t com o período T e domínio $D \subset \Re$, como segue:

$$f(t+T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon), \quad \forall (t, x, \epsilon) \in [0, \infty) \times D \times [0, \epsilon_0]\,. \tag{9}$$

Como provado por Khalil (2002), tomando a média de $f(t, x, \epsilon)$ para um ϵ suficientemente pequeno e positivo, é possível aproximar a solução deste sistema para a solução do seguinte sistema médio:

$$\frac{dx_{avg}}{dt} = f_{avg}(x)\,, \tag{10}$$

$$f_{avg}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, \epsilon)d\tau\,. \tag{11}$$

Como definido por Khalil (2002), um função vetorial $f(t, \epsilon) \in \Re^n$ é da ordem de $\mathcal{O}(\epsilon)$ sobre um intervalo $[t_1, t_2]$ enquanto houver uma constante positiva C e ϵ^* tal que a desigualdade a seguir seja válida:

$$f(t, \epsilon) \leq C|\epsilon|, \quad \forall |\epsilon| \in [0, \epsilon^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{12}$$

Será possível quantificar $\mathcal{O}(\epsilon)$ conhecendo os valores estimados de C e ϵ^* , caso contrário é aceito que $\mathcal{O}(\epsilon)$ é uma relação de ordem de grandeza, válida para ϵ suficientemente pequeno.

4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema descrito por uma dinâmica $\dot{x} = f(x, \delta(x(t), \theta(t)))$, onde $x(t)$ representa os estados do sistema e $\delta(x(t), \theta(t))$ uma lei de controle suave que depende da adaptação da variável $\theta(t)$. Associado ao sistema é definida uma função custo de saída do sistema $y = h(x(t))$, também definida como mapa de saída. O ajuste da lei de controle para o extremo da função custo y ocorre pela adaptação de $\theta(t)$ para um valor desconhecido θ^*.

Ao longo desse trabalho, será adotado um sistema com dinâmica aproximada a uma função custo estática de comportamento quadrático:

$$y := f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2\,, \tag{13}$$

onde as condições de convergência para a dinâmica do sistema são dadas pelo equilíbrio $x = l(\theta)$, que possui um extremo em $\theta^* \in \Re$ tal que

$$\frac{\partial(h \circ l)(\theta^*)}{\partial\theta} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2(h \circ l)(\theta^*)}{\partial\theta^2} = f'' < 0\,.$$

5. CONTROLE EXTREMAL GENERALIZADO ES_q

Nesta seção é proposta uma alternativa para uma função de perturbação geral, para promover flexibilidade aos movimentos do sinal do *dither* da busca extremal, enquanto atenua a oscilação da entrada e saída e assim alcança o estado ótimo. A trigonometria proposta por Borges (1998) apresenta um conjunto de funções que possuem as propriedades necessárias e justificadas por Tan et al. (2010). A função $\sin_q(\cdot)$ apresentada na Seção 2 é utilizada aditivamente a uma função $\sin(\cdot)$, compondo o sinal de perturbação como apresentado no diagrama da Figura 3.

Portanto, de acordo com Pessoa et al. (2019), considerando a aplicação desse algoritmo a equação da taxa de atualização do parâmetro de controle θ obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= k(a_q \sin_q(\omega_q t) + \ldots \\ &a_1 \sin_1(\omega t))[f^* + \frac{f''}{2}(\tilde{\theta} + \ldots \\ &(a_q \sin_q(\omega_q t) + a_1 \sin_1(\omega t)))^2]\,,\end{aligned} \tag{14}$$

com parâmetros $a_q = a_1$, $\omega_q = \omega_1$ e $q > 1$. O limite quando t tende ao infinito é dado por:

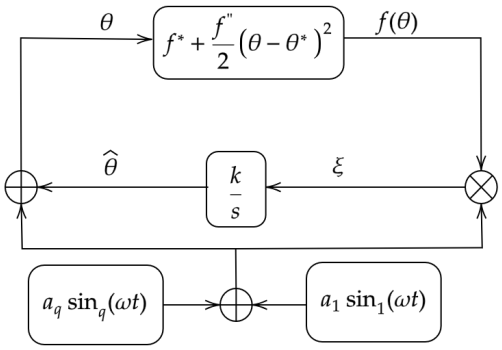

Figura 3. Diagrama do controle extremal generalizado.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d\theta}{dt} \approx f^* k a_1 \sin_1(\omega t) + \ldots$$
$$\frac{f''}{2} k a_1 \sin_1(\omega t)\tilde{\theta}^2 + f'' k a_1^2 \sin_1^2(\omega t)\tilde{\theta} + \ldots$$
$$\frac{f''}{2} k a_1^3 \sin_1^3(\omega t). \qquad (15)$$

Retomamos ao caso clássico fazendo os parâmetros de amplitude $a_q = \frac{a}{2}$, $a_1 = \frac{a}{2}$ e $q \to 1$, obtém-se a expressão:

$$\lim_{q\to 1} \frac{d\theta}{dt} = k\frac{a}{2}(\sin_1(\omega t) + \ldots$$
$$\sin_1(\omega t)) \left[f^* + \frac{f''}{2}(\tilde{\theta} + \frac{a}{2}(\sin_1(\omega t) + \sin_1(\omega t)))^2 \right] . (16)$$

Rigorosamente, a modificação proposta do controle extremal deve atender não somente às propriedades da abordagem clássica, mas também garantir a convergência exponencial. Para compreender as contribuições desta proposta, a Equação (14) foi expandida e reagrupada em termos de $\sin(\cdot)$ e θ de mesma potência:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = f^* k a_q \sin_q(\omega t) + f^* k a_1 \sin_1(\omega t) + \ldots$$
$$\frac{f''}{2}\tilde{\theta}^2 k a_q \sin_q(\omega t) + \frac{f''}{2}\tilde{\theta}^2 k a_1 \sin_1(\omega t) + \ldots$$
$$f''\tilde{\theta} k a_q^2 \sin_q^2(\omega t) + f''\tilde{\theta} k a_1^2 \sin_1^2(\omega t) + \ldots$$
$$2f''\tilde{\theta} k a_q \sin_q(\omega t) a_1 \sin_1(\omega t) + \ldots$$
$$\frac{f''}{2} k a_q^3 \sin_q^3(\omega t) + \frac{f''}{2} k a_1^3 \sin_1^3(\omega t) + \ldots$$
$$\frac{3f''}{2} k a_q^2 \sin_q^2(\omega t) a_1 \sin_1(\omega t) + \ldots$$
$$\frac{3f''}{2} k a_1^2 \sin_1^2(\omega t) a_q \sin_q(\omega t). \qquad (17)$$

A função de perturbação proposta deve atender a propriedades específicas do controle extremal, como listadas por Liu and Krstic (2012), com média zero ($1/T \int_0^T f(\omega t)dt = 0$) e função média quadrada positiva ($1/T \int_0^T f^2(\omega t)dt > 0$). Para aplicar o teorema da média temporal sobre a Equação (17), entre outros procedimentos, deve-se calcular $\int_0^T \sin_q(\omega t)dt$. O teorema generalizado de De Moivre proposto por (Borges, 1998) pode ser utilizado para demonstrar como obter essa integral.

Assim, foi analisado o comportamento da equação (17) quando submetido ao sistema à média temporal. Pessoa et al. (2019) apresentam a média do sistema através de uma abordagem numérica. A integração numérica do $\sin_q(\omega t)$ equivale ao resultado analítico de uma função $\cos_{q*}(.)$, em que o termo de frequência aparece no denominador:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin_q(\omega t)dt = -\frac{1}{\omega T(2-q)} \cos_{\frac{1}{2-q}}((2-q)\omega t)|_0^T . \qquad (18)$$

A função $\cos_{q^*}(\omega t)$ (onde $q^* = 1/(2-q)$) tem os componentes,

$$\rho_{q^*}(\omega t) = [1 + (1-q^*)^2(\omega t)^2]^{1/(2(1-q^*))}$$

e

$$\cos_1(\phi_{q^*}(\omega t)).$$

Considerando um valor de $t^l >> 1$, as funções $\rho_{q^*}(\omega t)$ e $\phi_{q^*}(\omega t)$ podem ser aproximadas respectivamente por:

$$\lim_{t\to t^l} \rho_{q^*}(\omega t) \approx |(1-q^*)(\omega t)|^{\frac{1}{1-q^*}}$$
$$\lim_{t\to\infty} \phi_{q^*}(\omega t) = \frac{\pi}{2}\left|\frac{1}{1-q^*}\right|. \qquad (19)$$

O decaimento da função $\rho_{q^*}(\omega t)$ é governado por uma lei de potência, enquanto $\phi_{q^*}(\omega t)$ será um valor constante, que implica num valor finito para a função $\cos_1(\phi_{q^*}(\omega t))$. Portanto, as parcelas do sistema médio dependentes da função $\sin_q(\cdot)$ com ordens ímpares tendem a zero, redudindo a Equação (17) ao termos quadráticos:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} \approx f''\tilde{\theta} k(a_q \sin_q(\omega t) + a_1 \sin_1(\omega t))^2. \qquad (20)$$

O modelo médio de Equação (20) na escala temporal $\tau = \omega t$ é governado essencialmente por $a_q \exp_q((1-q)\tau^2)$ e a_1^2, respectivamente resultado da simplificação dos termos $(a_q \sin_q(\omega t))^2$ e $(a_1 \sin_1(\omega t))^2$:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{avg}}{d\tau} = kcf'' \left[a_q^2 \exp_q((1-q)\tau^2) + a_1^2\right] \tilde{\theta}_{avg} , \qquad (21)$$

para uma constante apropriada $c > 0$. Observe-se que ao fazer o limite $q \to 1$, os termos entre colchetes recuperam o caso clássico, com convergência exponencial.

A análise da Equação (21) demonstra que o novo projeto de controlador aplicando o conceito de *dithers* generalizados permite acelerar a taxa de convergência (dominada pelo fase transitória) pelo termo $\exp_q((1-q)\tau^2) > 0$, dado que o termo é monotonicamente decrescente para algum instante de tempo finito τ^*. Existe solução analítica para a Equação (21) por meio da representação das funções q–exponential e q-gaussiana em termos de funções hipergeométricas (Gradshteyn and Ryzhik, 2007).

A $\exp_q((1-q)\tau^2)$ deve ser expressada em termos das funções hipergeométrica generalizadas ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ [1] :

[1] ver equação nº9.121 1.[8] na referência Gradshteyn and Ryzhik (2007)

$$\exp_q((1-q)\tau^2) = {}_2F_1\left(\frac{1}{q-1}, b; b; -(1-q)^2\tau^2\right). \quad (22)$$

A abordagem deste trabalho requer a representação integral para resolver a integral da equação de convergência do parâmetro $\tilde{\theta}_{avg}$. Isto é possível pelo uso da equação hipergeométrica [2] para resolver o primeiro termo dentro dos colchetes da equação diferencial (21).

A integração do primeiro termo da Equação (21) foi calculada pelo rearranjo dos termos numa representação integral das funções hipergeométricas (Gradshteyn and Ryzhik, 2007), com $x = \tau^2$, $\nu = 1/(q-1)$, $\beta = (1-q)^2$ and $\mu = 1/2$:

$$\int_0^{\tau^*} \exp_q((1-q)\tau^2)d\tau = \ldots$$
$$\tau^*{}_2F_1\left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(1-q)^2\tau^{*2}\right),$$
$$\left|1 + (q-1)^2\tau^{*2}\right| < \pi\,, \quad (23)$$

tal que

$$\left|\frac{\tilde{\theta}_{avg}(\tau) - \theta^*}{\tilde{\theta}_{avg}(0) - \theta^*}\right| \leq$$
$$\exp\left(\tau kcf''\left(a_q^2{}_2F_1\left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(1-q)^2\tau^2\right) + a_1^2\right)\right),$$
$$0 \leq \tau < \tau^*\,. \quad (24)$$

O argumento da função $\exp(\cdot)$ em Equação 24 é negativo, que prova a convergência em termos de Lyapunov, adicionalmente, o termo $a_q^2{}_2F_1\left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(1-q)^2\tau^2\right)$ é positivo e decresce ao longo do tempo, que implica na asceleração da convergência e atenuação do sinal quando comparado ao caso clássico que não possui esta parcela.

6. SINTONIA E ADAPTABILIDADE À PERTURBAÇÕES

Tan et al. (2005) propuseram métodos para sintonizar os controladores de busca extremal que permitiriam ampliar o domínio de busca das condições iniciais, entretanto, aqui é demonstrado que é possível controlar o comportamento de regime, varrendo grandes regiões da variável de decisão. A função $\sin_q(\omega_q t)$ tem um número de ciclos limitado que depende dos parâmetros ω_q e q. Neste sentido, é possível projetar o intervalo de tempo de dissipação do sinal.

Dado o sistema sob a qual serão realizados os testes do algoritmo de controle extremal generalizado, o próximo passo envolve a sua sintonia. Inicialmente, a abordagem segue a sintonia do algoritmo de controle extremal clássico Wang and Krstic (2000). Sendo que todo sistema realimentado, ou seja, sistema (neste caso modelo nominal), e sinais de perturbação e filtros devem seguir escalas de tempo, mais rápida e mais lenta, respectivamente. Portanto, a planta com a estabilização do controlador deve ter a escala de tempo mais rápida, enquanto a função de perturbação periódica obedece uma escala de tempo mais lenta. Esta descrição pode ser resumida em termos matemáticos como $\mathcal{O}(1) >> \omega >> a\,, k$ (ver Figura 3). Ou seja, para o caso clássico, os parâmetros tem os valores $q = 1$ e $a_q = 0$. Assim, com as devidas provas apresentadas por (Krstić and Wang, 2000) define-se o resultado principal das discussões apresentadas no Teorema 1 para o caso clássico do ES:

Teorema 1: Considere o sistema realimentado apresentado na Figura 3. Assume-se que a velocidade da dinâmica do sistema $f(\theta)$ é mais rápida que as perturbações senoidais e a sintonia dos parâmetros satisfaz:

$$\mathcal{O}(1) >> \omega >> a\,, k\,, \quad (25)$$

ou seja, limitados pela mesma ordem de grandeza e relações dos parâmetros para o caso clássico. De acordo com a lei de adaptação para o parâmetro de entrada dada por:

$$\dot{\theta}(t) = ka\sin(\omega t)\xi(t) + a\sin(\omega t) \quad (26)$$

garante-se a maximização da variável de saída satisfazendo-se as seguintes propriedades:

(1) O ponto θ^* é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento $\mathcal{O}(kf''a^2)$ e conjunto residual da ordem $\mathcal{O}(\omega + a)$,
(2) a saída converge para uma vizinhança da ordem $\mathcal{O}(\omega^2 + a^2)$ do ponto de extremo f^*.

Baseado no *Teorema 1* como referência à sintonia supracitada do algoritmo de controle extremal clássico, é possível estabelecer de forma comparativa os benefícios gerados pela aplicação do algoritmo de controle extremal generalizado.

Assim, é proposta uma avaliação na qual apenas a parcela da perturbação generalizada é considerada, ou seja, fazendo $a_q \neq 0$ e $a_1 = 0$ para o algoritmo. E uma última investigação extra que é constituída da combinação da contribuição das duas funções de perturbação com $a_q \neq 0$ e $a_1 \neq 0$.

É importante notar que o valor de sintonia da amplitude a para o controle extremal clássico deve ser usada como referência para manter a ordem da magnitude do domínio da variável de decisão, portanto, é estabelecida a condição $a_q + a_1 \approx a$. Enquanto que para promover o efeito de aceleração, reduzindo a amplitude de oscilação da resposta entorno do valor extremo, uma segunda condição é estabelecida, $a_q \gg a_1$. Logo, deve-se respeitar a um procedimento de ajuste prévio do esquema do controle extremal clássico e incorporar o efeito do sinal dissipativo sem violar as condições limítrofes da variável de decisão. Então, é possível alcançar mais rápido a vizinhança do ponto máximo e mantê-lo nesta região reduzida, em última análise limitada por a_1 ao invés de a, devido a dissipação do $sin_q(\omega t)$ e a persistência do sinal $\sin_1(\omega t)$.

Os principais resultados obtidos na Seção 5 são destacados no Teorema 2 para o controle extremal generalizado (ES_q).

Teorema 2: Dado que as condições do Teorema 1 sejam atendidas para um sistema em malha fechada apresentado na Figura 3, assume-se que a velocidade da dinâmica do sistema é mais rápida que a soma das perturbações senoi-

[2] ver equação nº3.194 1. na referência Gradshteyn and Ryzhik (2007)

dais clássica e generalizada, e a sintonia dos parâmetros deve satisfazer as relações:

$$\mathcal{O}(1) >> \omega >> a\,, k\,, \tag{27}$$

$$q \geq 1\,, \tag{28}$$

enquanto que os parâmetros das perturbações devem ser limitados pela sintonia da busca extremal clássica que são apresentadas como:

$$a_q + a_1 \approx a\,, \tag{29}$$

$$a_q >> a_1\,, \tag{30}$$

$$\omega_q = \omega_1 = \omega\,. \tag{31}$$

Então, a lei de adaptação para o parâmetro de entrada é dada por:

$$\dot{\theta}(t) = k(a_1 \sin_1(\omega_1 t) + a_q \sin_q(\omega_q t))\xi(t) + (a_1 \sin_1(\omega_1 t) + a_q \sin_q(\omega_q t)) \tag{32}$$

que garante a maximização da saída e as seguintes propriedades:

(1) O ponto θ^* é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento $\mathcal{O}(kf^{''}(a_q^2+a_1^2))$ e conjunto residual da ordem $\mathcal{O}(\omega + a_1)$,
(2) a saída converge para uma vizinhança da ordem $\mathcal{O}(\omega^2 + a_1^2)$ do ponto de extremo f^*.

7. CONTROLE EXTREMAL GENERALIZADO NÃO ENVIESADO DE TEMPO NÃO PRESCRITO

A proposta de algoritmo apresentada neste artigo associa as propriedades do ES_q (Pessoa et al., 2019) com uma estrutura inspirada na primeira proposta elaborada por Yilmaz et al. (2023) para o *unbiased extremum seeker (uES)*, que possui uma função de adaptação monótona decrescente α para a amplitude da função de perturbação e α^{-1} para adaptação da amplitude do sinal demodulador que influencia indiretamente no comportamento do ganho. Seguindo uma linha similar àquela adotada para a análise da lei de resposta do sistema para o projeto de um controlador ES_q na seção anterior (Teorema 2), toma-se como referência o diagrama da Figura 4 que representa a ideia principal dessa nova generalização que adotaremos pelo nome de algoritmo de busca extremal q-trigonométrico adaptado por q-exponencial.

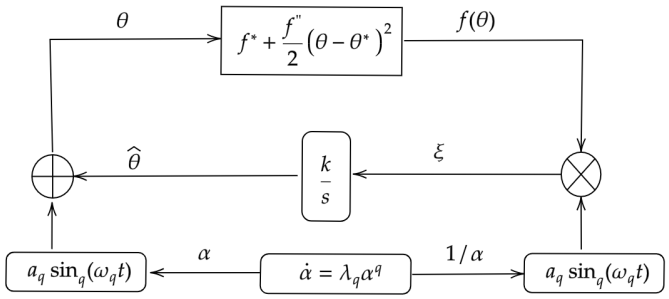

Figura 4. Diagrama esquemático do algoritmo de busca extremal q-trigonométrico adaptado por q-exponencial.

É possível a partir de alguns passos simples demonstrar que essa abordagem é capaz além dos objetivos acima citados, ter os seguintes casos particulares:

- **Condição 1:** O limite de $q \to 1$ para a função $\sin_q(\cdot)$ e para a equação $\exp_q(\cdot)$ representa o *uES*.;
- **Condição 2:** Para o caso em que além da **Condição 1:** é feito o parâmetro $\lambda_q = 0$ para a solução de $\dot{\alpha} = \lambda_q \alpha$ $\alpha = [1 - (1-q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}$, implicará em $\alpha = 1$ e consequentemente será recuperado o caso do controle extremal clássico.
- **Condição 3:** Enquanto que para o caso em que apenas a equação $\alpha = [1 - (1-q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}$ é submetida ao limite de $q \to 1$ com $\lambda_q = 0$ é obtido um dos casos particulares do algoritmo ES_q no qual apenas o $sin_q(\cdot)$ gera perturbação ou demodula o sinal.

Partindo-se do sistema simplificado, apenas considerando um mapa estático e como objetivo dessa análise, pode-se obter:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{ka_q}{\alpha}\sin_q(\omega t) f^* + \dots \\ &\frac{ka_q}{\alpha}\sin_q(\omega t)\frac{f^{''}}{2}\tilde{\theta}^2 + \dots \\ &\frac{ka_q}{\alpha}\sin_q(\omega t)\frac{f^{''}}{2}2\tilde{\theta}\alpha a_q \sin_q(\omega t) + \dots \\ &\frac{ka_q}{\alpha}\sin_q(\omega t)\frac{f^{''}}{2}a_q^2 \sin_q^2(\omega t)\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Aplicando o teorema da média, assim como feito para análise da convergência da Equação (33), com apenas um passo simples, fazendo $a_1 = 0$, obtém-se um resultado para a convergência da nova proposta que não aparece a dependência com α para o termo $\sin_q^2(\cdot)$:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{avg}}{d\tau} = kcf^{''}\left[a_q^2 \exp_q((1-q)\tau^2)\right]\tilde{\theta}_{avg}\,. \tag{34}$$

Portanto, obtém-se a convergência exponencial acelerada por q-exponencial com erro residual decrescente dado por:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\tilde{\theta}_{avg}(\tau) - \theta^*}{\tilde{\theta}_{avg}(0) - \theta^*}\right| \leq \\ &\exp\left(\tau kcf^{''}\left(a_q^2 {}_2F_1\left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(1-q)^2\tau^2\right)\right)\right) \\ &0 \leq \tau < \tau^*\,.\end{aligned} \tag{35}$$

respeitando, portanto, os argumentos a respeito da velocidade convergência bem como os resultados referentes a atenuação das oscilações.

Na Figura 5 é apresentada a investigação numérica das relações da quarta parcela da Equação (33), evidenciando que para valores de $q = 1$, caso do controlador *uES*, apresenta uma parcela que leva ao ganho infinito, enquanto que valores de $q > 1$ apresentam valores dentro limites finitos. Além disso, para valores elevados de t é alcançado um comportamento de cauda como lei de potência. Dessa forma, soluciona-se o problema do ganho infinito sem aplicação dos *hyperbolic chirps*.

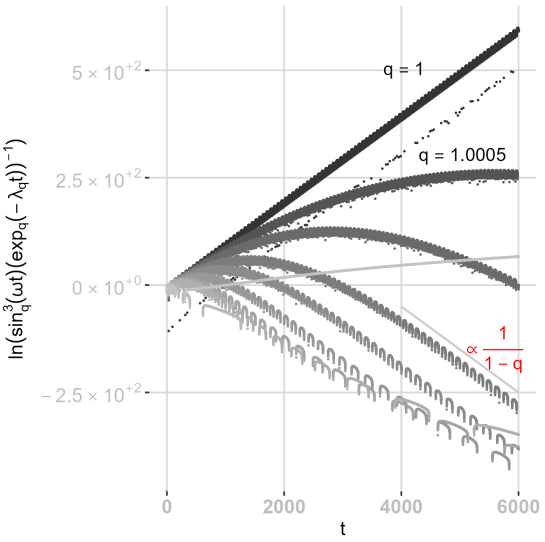

Figura 5. Comportamento entre $\sin_q^3(\omega t)/\exp_q(-\lambda_q t)$ ao longo tempo.

8. CONCLUSÃO

Apresentamos uma nova classe de controlador extremal modificada pela q-trigonometria e funções da mecânica estatística não aditiva. Esse algoritmo é capaz reduzir as oscilações em estado estacionário e torna finito o valor do ganho assumido no controlador extremal. A sintonia do parâmetro q estabelece o número de ciclos do sinal de perturbação e tem consequência sobre a frequência. Apesar da validade da solução para um tempo infinito, o desaparecimento do sinal de perturbação pode gerar desvio diferente de zero. Esse problema foi resolvido pela proposta do controle extremal generalizado que inclui um sinal de perturbação clássico com amplitude de valor de ordem de grandeza inferior à do sinal dissipativo. A proposta desse trabalho tem como casos particulares o controle extremal não enviesado e o caso clássico. Esta linha de trabalho explora a escolha da trigonometria adequada para o tratamento de uma classe de problemas de atenuação de sinal frente à proposta baseadas em tratamentos clássicos. As provas rigorosas para os teoremas e exemplos numéricos serão apresentados num trabalho de periódico.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq e FAPERJ pelo apoio. Este estudo também foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001.

REFERÊNCIAS

Abdelgalil, M. and Taha, H. (2020). Extremum seeking with vanishing control oscillations.

Borges, E. (1998). On a q-generalization of circular and hyperbolic functions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31, 5281.

Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2007). *Table of Integrals, Series, and Products Seventh Edition.*

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall. The book can be consulted by contacting: PH-AID: Wallet,Lionel.

Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36, 595–601.

Liu, S.J. and Krstic, M. (2012). Stochastic averaging and stochastic extremum seeking. 9286. doi:10.1007/978-1-4471-4087-0.

Naudts, J. (2002). Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1-4), 323–334. doi:10.1016/S0378-4371(02)01018-X.

Oliveira, T.R. and Krstic, M. (2022). *Extremum Seeking Through Delays and PDEs.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA. doi:10.1137/1.9781611977356. URL `https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611977356`.

Pessoa, R.W., Mendes, F., Oliveira, T.R., Oliveira-Esquerre, K., and Krstic, M. (2019). Numerical optimization based on generalized extremum seeking for fast methane production by a modified adm1. *Journal of Process Control*, 84, 56–69. doi:10.1016/j.jprocont.2019.09.006.

Pokhrel, S. and Eisa, S.A. (2023). *Control-Affine Extremum Seeking Control with Attenuating Oscillations: A Lie Bracket Estimation Approach **, 133–140. Society for Industrial and Applied Mathematics. URL `https://epubs.siam.org/doi/10.1137/1.9781611977745.18`.

Tan, Y., Moase, W.H., Manzie, C., Nešić, D., and Mareels, I.M.Y. (2010). Extremum seeking from 1922 to 2010. 14–26.

Tan, Y., Nešić, D., and Mareels, I.M.Y. (2005). On non-local stability properties of extremum seeking control. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 16, 550–555. doi:10.1016/j.automatica.2006.01.014.

Tan, Y., Nešić, D., Mareels, I.M.Y., and Astolfi, A. (2009). On global extremum seeking in the presence of local extrema. *Automatica*, 45, 245–251. doi:https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.06.010.

Tan, Y., Nešić, D., and Mareels, I. (2006). On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, 42, 889–903.

Tsallis, C. (1988). Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52, 479–487. doi:10.1007/BF01016429.

Tsallis, C. (2009). *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World.* Springer, 1 edition.

Wang, H.H. and Krstic, M. (2000). Extremum seeking for limit cycle minimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45, 2432–2436. doi:10.1109/9.895589.

Wang, L., Chen, S., and Ma, K. (2016). On stability and application of extremum seeking control without steady-state oscillation. *Automatica*, 68, 18–26.

Yamano, T. (2002). Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in Tsallis statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 305(3-4), 486–496. doi:10.1016/S0378-4371(01)00567-2.

Yilmaz, C.T., Diagne, M., and Krstic, M. (2023). Exponential and prescribed-time extremum seeking with unbiased convergence. URL `http://arxiv.org/abs/2401.00300`.