MPC para Rastreamento de Referência com Evitamento de Obstáculos Usando Funções de Barreira de Controle ⋆

Brener Gaspar Ferreira * **Marcelo Alves dos Santos** *,** **Guilherme Vianna Raffo** *,**

* *Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG 31270-901, Brasil*
** *Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG 31270-901, Brasil*

Abstract: In this work, a finite horizon optimal control approach is presented to address the tracking problem while adding avoidance characteristics to the closed-loop system. Inspired by the Model Predictive Control (MPC) framework for tracking, we explore the idea of introducing artificial variables into the control problem. This allows us to integrate avoidance features into MPC without compromising the properties of feasibility in the face of changing references. Additionally, we consider these artificial variables together with control barrier functions to formulate avoidance constraints. Finally, a numerical example is presented to demonstrate the controller's behavior, ensuring avoidance of multiple obstacles within the admissible space while tracking the reference.

Resumo: Neste trabalho, é apresentada uma abordagem de controle ótimo de horizonte finito para resolver o problema de rastreamento e, ao mesmo tempo, incorporar características de evitamento ao sistema em malha fechada. Inspirados no arcabouço de Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC) para rastreamento de referência, exploramos a ideia de introduzir variáveis artificiais ao problema de controle ótimo. Isso nos permite integrar capacidade de evitamento ao MPC para rastreamento de referência, sem comprometer as propriedades de factibilidade diante de referências variantes. Além disso, utilizamos essas variáveis artificiais em conjunto com funções de barreira de controle para formular restrições que garantam o evitamento de obstáculos. Por fim, um exemplo numérico é apresentado para explicitar o comportamento do controlador, garantindo o evitamento de múltiplos obstáculos dentro do espaço admissível enquanto rastreia a referência.

Keywords: MPC; barrier functions; obstacle avoidance;
Palavras-chaves: MPC; funções de barreira; evitamento de obstáculo;

1. INTRODUÇÃO

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Control*) é uma técnica de controle avançada para sistemas dinâmicos. Envolve predizer o comportamento futuro de um sistema com base em um modelo dinâmico e usa essa predição para tomar decisões de controle ótimas. Além disso, o MPC é uma das poucas técnicas de controle capaz de considerar as restrições nas entradas e estados do sistema em tempo de execução, sendo sua principal vantagem (Camacho et al., 2007).

O MPC é uma estratégia de controle que resolve online, a cada instante de amostragem, um problema de controle ótimo de horizonte finito, em que a condição inicial é o estado atual do sistema. A solução do problema de otimização produz uma sequência de controle finita, sendo a primeira ação de controle desta sequência aplicada ao sistema. De uma maneira geral o MPC difere, portanto, de estratégias de controle convencionais em que a lei de controle é pré-computada off-line ou através de soluções analíticas usando funções de barreira (Ames et al., 2016), no entanto há formulações com soluções off-line (Bemporad et al., 2002).

Em estratégias de controle, a capacidade de rastrear referências que alcancem condições estacionárias é essencial. Tais condições podem ser obtidas em camadas superiores do sistema de controle por meio de otimizadores de estado estacionário. Para resolver o problema de rastreamento, uma abordagem é considerar diretamente o erro entre os estados do sistema e a condição estacionária desejada. Porém, esse método tem limitações, pois, para referências variantes, não garante-se que o sistema controlado seja estável para todas condições. Nesses cenários, particularmente para controladores baseados na resolução iterativa

⋆ Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto INCT para Sistemas Autônomos Cooperativos através dos auxílios CNPq 465755/2014-3 e FAPESP 2014/50851-0, e pelas agências brasileiras CAPES através do Programa de Excelência Acadêmica (PROEX) e projetos CNPq 317058/2023-1 e 422143/2023-5.

de um problema de otimização, surge o problema de factibilidade recursiva (Rossiter, 2017).

O problema de rastreamento de referência variantes foi abordado por diferentes estratégias em Mayne (2014), incluindo estratégias de escalonamento para garantir a factibilidade e estratégias baseadas em governador de comando (Bemporad, 1998). Na abordagem do governador de comando, garante-se que o sistema vai evoluir de forma factível em direção à referência desejada incorporando um filtro passa-baixa para a referência. Uma lei de controle é então definida para estabilizar o sistema com base em uma referência auxiliar, que é continuamente ajustada pelo governador de comando para convergir em direção ao ponto de referência desejado. Inspirados nas ideias do governador de comando, esquemas de controle preditivo para rastreamento de referências variantes foram propostos buscando lidar com o problema de perda de factibilidade recursiva, formulando estratégias com um maior domínio de atração quando comparadas às obtidas com os esquemas de controle preditivo para regulação. Essas estratégias de rastreamento compartilham com os governadores de comando a mesma ideia central de adicionar uma referência artificial ao problema (Limón et al., 2008; Limon et al., 2018).

Nestas estratégias, o controlador é projetado para garantir a convergência assintótica para qualquer referência admissível. Caso contrário, deverá garantir a convergência para um estado estacionário admissível que minimize alguma métrica de distância até a referência desejada. As estratégias de controle são formuladas usando variáveis de estado e entrada artificiais para descrever um estado estacionário artificial para o qual a convergência assintótica é garantida. Além disso, são consideradas condições terminais para estabilidade ao incluir um termo de penalidade terminal no funcional de custo e uma restrição terminal, certificando-se que o sistema alcance um conjunto invariante para rastreamento.

Em Ferramosca et al. (2009), os autores analisaram o desempenho em malha fechada para o controlador proposto em Limón et al. (2008) e mostraram a importância do custo de *offset* no desempenho geral do controlador. No trabalho, o funcional de custo de *offset* foi estendido para uma função convexa, definida positiva e sub-diferenciável para a qual a convergência para um ponto de equilíbrio que minimiza esse custo é demonstrada. Além disso, os autores estabeleceram condições para o custo terminal e o funcional de custo de *offset* para os quais é possível garantir a otimalidade local, o que leva a um desempenho em malha fechada localmente ótimo.

Em algumas aplicações, além do rastreamento de referências, evitar regiões específicas em um espaço admissível conhecido é um requisito importante. Por exemplo, na navegação autônoma, a capacidade de evitar colisões com obstáculos é fundamental. Pesquisas recentes têm investigado diferentes abordagens para integrar evitamento de obstáculos ao MPC, com o objetivo de assegurar que um sistema robótico possa navegar de forma segura em ambientes complexos e dinâmicos. Em Thirugnanam et al. (2022), o problema de evitamento entre politopos foi abordado usando restrições de função de barreira de controle para gerar dinamicamente trajetórias viáveis livres de colisão. No trabalho de Nascimento et al. (2023), propõe-se a divisão da área segura em sub-regiões convexas que são convertidas em zonotopos polinomiais gerando restrições para o problema de controle ótimo com evitamento. Em Sani et al. (2021), o controlador preditivo baseado em modelo é formulado como restrições explícitas para evitar colisões com os obstáculos. Essas restrições são incorporadas ao problema de otimização, assegurando que as trajetórias geradas pelo MPC sejam seguras. Em outra perspectiva, no trabalho desenvolvido por Santos et al. (2024), o funcional de custo do controlador é adaptado para penalizar a proximidade do sistema às regiões que se deseja evitar, fazendo com que o MPC gere trajetórias que garantam o evitamento enquanto alcançam o objetivo desejado. Conforme discutido em Hermans et al. (2018), os autores consideraram um MPC não linear dentro de uma estrutura de método de penalidade projetada para satisfazer a prevenção de colisão ao calcular a trajetória a ser seguida pelo sistema. No trabalho de Pereira et al. (2021), é formulada um problema de controle ótimo não linear no grupo especial euclidiano SE(3) para o rastreamento de trajetória de quadricópteros em ambientes com obstáculos desconhecidos. A abordagem considera restrições nos estados e entradas, com rejeição constante de perturbações e capaz de executar manobras agressivas.

As Funções de Barreira de Controle (CBFs do inglês *Control Barrier Functions*) são funções capazes de fornecer restrições de segurança para o problema de controle ótimo, garantindo que ele não entre em regiões indesejadas do espaço de estado, mesmo quando sujeito a incertezas e perturbações. Ao fornecer uma barreira contra movimentos não desejados, as CBFs permitem que os controladores garantam a segurança do sistema enquanto buscam satisfazer objetivos de controle específicos (Ames et al., 2016). O conceito básico das funções de barreira é fornecer limites para as trajetórias do sistema controlado, garantindo que permaneçam dentro de uma região segura, mesmo na presença de perturbações externas ou incertezas no modelo do sistema. Isso é especialmente importante em aplicações onde a segurança é crítica, como em sistemas autônomos (Jian et al., 2023). Em Minh et al. (2022), é proposto um esquema de controle para segurança de um robô não holonômico, com o objetivo de gerar sinais de controle que resultem em trajetórias ótimas livres de colisões com obstáculos em ambientes dinâmicos. Uma função de barreira é utilizada para obter um envelope de segurança.

Neste trabalho, investigou-se o MPC com evitamento de obstáculos através de restrições duras e através de funções de penalidade. Entretanto, as formulações dos problemas de evitamento foram concebidas com base na teoria das funções de barreira, em virtude de sua capacidade de assegurar operações seguras. Esta escolha foi feita visando garantir não apenas o desvio dos obstáculos, mas também, para induzir o controlador a operar com a maior distância possível deles. Neste contexto as contribuições deste trabalho são:

(i) A formulação de uma estratégia de MPC para evitamento de obstáculos utilizando o arcabouço de rastreamento proposto por Limón et al. (2008) e funções de barreira, como proposta em Minh et al. (2022) para regulação.

(ii) A utilização de funções de barreira por meio de funções de penalidades, garantindo que o sistema tenha estabilidade entrada-estado, como demonstrado em Santos et al. (2024).

2. CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

O MPC é uma metodologia de controle avançada que utiliza modelos dinâmicos do sistema, predições futuras e otimização para gerar sinais de controle que levem o sistema a seguir uma referência desejada, respeitando as restrições do sistema. Portanto, considere o sistema dinâmico linear invariante no tempo, definido por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{1}$$

com $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, sendo respectivamente os vetores de estados e entradas do sistema. Além disso, os estados e as entradas são restritos por

$$(x_k, u_k) \in X \times U, \forall k \in \mathbb{I}_{\geq 0}. \tag{2}$$

Sendo $\mathbb{I}_{\geq 0}$ o conjunto de números inteiros maior que zero. Com isso, pode-se formular um funcional de custo para minimizar o erro de rastreamento de referência, sendo ele

$$V_N(x;\boldsymbol{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \|x_j - x_t\|_Q^2 + \|u_j - u_t\|_R^2 + \|x_N - x_t\|_P^2, \tag{3}$$

com N sendo o comprimento do horizonte de predição, x_t e u_t sendo o estado e controle de referência, $\boldsymbol{u}$ o vetor de controle ótimo. Para o funcional, temos o custo de etapa, representado pela primeira e segunda parcela do funcional e o custo terminal, representado pelo terceiro termo. Além disso, as matrizes de ponderação Q, R e P são parâmetros de ajuste. É importante ressaltar que Q deve ser semi-definida positiva, R deve ser difinida positiva e P deve ser escolhida adequadamente para que o sistema tenha garantias de estabilidade (Mayne et al., 2000).

Desse modo, utilizando-se o modelo dinâmico (1), a restrição (2) e o funcional de custo (3), o controlador preditivo pode ser expresso pelo problema de otimização

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{u}} V_N(x;\boldsymbol{u}) \\ &\text{s.t. } x_0 = x, && \text{(4a)}\\ &\quad x_{j+1} = Ax_j + Bu_j, j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, && \text{(4b)}\\ &\quad (x_j, u_j) \in X \times U, j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, && \text{(4c)}\\ &\quad x_N \in \Omega, && \text{(4d)} \end{aligned}$$

sendo (4a), (4b) e (4c), respectivamente, restrições de condição inicial, predição e estados e entradas. A restrição (4d) força que o estado final pertença a um conjunto invariante Ω, assegurando-se a estabilidade assintótica do problema de controle ótimo (Mayne et al., 2000). Ainda, $\mathbb{I}_{0:N-1}$ denota o conjunto de inteiros $\{0, 1, .., N-1\}$.

Seja Z_s o conjunto de estados e entradas estacionárias definidos por

$$Z_s = \{(x_s, u_s) : x_s = Ax_s + Bu_s, x_s \in X, u_s \in U\}. \tag{5}$$

Considere-se, também um funcional de custo de *offset*, $V_{of}(\cdot)$, sendo uma função contínua, convexa e definida positiva, de modo que

$$\arg\min_{x_a \in Z_s} V_{of}(x_a, x_t) \tag{6}$$

é único, com x_a descrevendo um estado estacionário artificial, para o qual a convergência assintótica é garantida. Portanto, o funcional de custo para o rastreamento pode ser definido como

$$\begin{aligned} V_N(x, x_t; \boldsymbol{u}, x_a, u_a) = &\sum_{j=0}^{N-1} \|x_j - x_a\|_Q^2 + \|u_j - u_a\|_R^2 \\ &+ \|x_N - x_a\|_P^2 + \|x_a - x_t\|_T^2, \end{aligned} \tag{7}$$

onde T é a matriz que pondera o erro quadrático entre o estado artificial e a referência, formando o termo conhecido por custo de *offset*.

Quando utilizado para resolver problemas de rastreamento, a estratégia para regulação apresentada em (4), pode ter problemas de factibilidade. Para resolver este problema, pode-se considerar a formulação de MPC para rastreamento, sendo,

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{u}, x_a, u_a} V_N^t(x, x_t; \boldsymbol{u}, x_a, u_a) \\ &\text{s.t. } x_0 = x, && \text{(8a)}\\ &\quad x_{j+1} = Ax_j + Bu_j, j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, && \text{(8b)}\\ &\quad (x_j, u_j) \in X \times U, j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, && \text{(8c)}\\ &\quad (x_a, u_a) \in \lambda Z_s, && \text{(8d)}\\ &\quad x_N \in \Omega^t, && \text{(8e)} \end{aligned}$$

as restrições definidas por (8a)-(8c) são as mesmas do problema (4). Além disso, (8d) garante que as variáveis auxiliares pertençam ao conjunto de estados e entradas estacionários e a restrição (8e) garante que o estado final pertença a um conjunto invariante para rastreamento, Ω^t, garantindo a estabilidade assintótica do problema de controle (Limón et al., 2008). Além disso, para evitar a perda de controlabilidade relacionada a restrições ativas (Rao and Rawlings, 1999), é adicionado ao conjunto de estados e entradas estacionárias (5) a variável $\lambda \in (0, 1)$.

3. EVITAMENTO DE OBSTÁCULOS USANDO FUNÇÕES DE BARREIRA

Utiliza-se nesta seção, CBFs para derivar restrições que garantem a segurança do sistema em malha fechada com um MPC para rastreamento. O objetivo é encontrar uma sequência de controle ótima assegurando-se que os estados do sistema sempre permaneçam em um conjunto seguro definido como $\mathscr{L} \in \mathbb{R}^n$. Para tanto, pede-se que $\mathscr{L}$ seja invariante, ou seja, se $x_0 \in \mathscr{L}$, então $x = x_j \in \mathscr{L}, \forall k$. O conjunto $\mathscr{L}$ é definido como:

$$\mathscr{L} = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n | h(x) \geqslant 0\}, \tag{9}$$

$$\partial\mathscr{L} = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n | h(x) = 0\}, \tag{10}$$

$$\text{Int}(\mathscr{L}) = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n | h(x) > 0\}. \tag{11}$$

Considere L_f e L_g os operadores de Lie, que estão relacionados às derivadas de $h(x)$ ao longo das trajetórias do vetor de estados. Assuma que $\mathscr{L}$ seja o conjunto onde uma função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável de forma contínua. Nesse caso, $h(x)$ é considerada uma função de barreira de controle se for possível encontrar uma função γ de classe $\mathcal{K}_\infty$ [1] , tal que

$$\sup_{\boldsymbol{u} \in U} [L_f h(x) + L_g h(x) u] \geqslant -\gamma(h(x)), \tag{12}$$

[1] (Funções de comparação - funções-$\mathcal{K}$ (Khalil, 2002)). Uma função contínua $\alpha(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, diz-se que pertence a uma classe $\mathcal{K}$ se for positiva definida e estritamente crescente. Diz-se que pertence a uma classe $\mathcal{K}_\infty$ se for de classe $\mathcal{K}$ e não estiver limitado acima, ou seja, $\alpha(s) \to \infty$ como $s \to \infty$.

para todo $x \in X$. Pode-se considerar o conjunto de todos os valores de controle em um ponto $x \in X$ que tornam $\mathscr{L}$ seguro, dado por

$$\mathcal{K}_{cbf}(x) = \{u \in U : L_f h(x) + L_g h(x)\, u + \gamma(h(x)) \geq 0\}. \quad (13)$$

De acordo com Ames et al. (2019), se a função h atua como uma barreira de controle em X e sua derivada parcial $\partial h/\partial x(x)$ não é nula para todos os pontos x na fronteira de $\mathscr{L}$, então qualquer sinal de controle u pertencente ao conjunto $\mathcal{K}_{cbf}$ garante a segurança do conjunto $\mathscr{L}$.

3.1 Evitamento de Obstáculos através de Restrições

Considere os obstáculos representados por corpos rígidos e com centroides o_i e raios fixos r_i, como visto na Figura 1 para um caso bidimensional. Além disso, adiciona-se uma margem de segurança considerando o raio $r_{is} = r_i + r_s$, para $r_s > 0$.

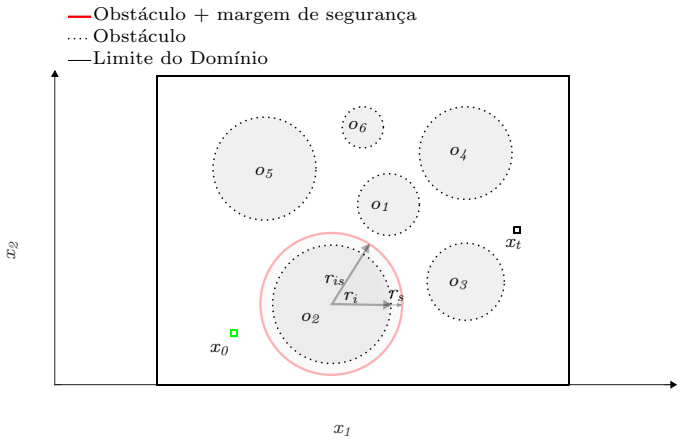

Figura 1. Representação do domínio com os obstáculos.

Assim, pode-se definir uma restrição para o evitamento de obstáculos, como

$$\|x_j - o_i\| \geq r_{is} \quad (14)$$

para todo $j \in \mathbb{I}_{1:N}$ e $i \in \mathbb{I}_{1:N_o}$, com N_o sendo a quantidade de obstáculos. Consequentemente, pode-se definir h como

$$h_i(x_j; o_i, r_i) = \|x_j - o_i\|^2 - (r_{is})^2. \quad (15)$$

Desse modo, para que h_i seja uma CBF, deve-se ter

$$h_i(x_{j+1}; o_i, r_{is}) \geq \delta h_i(x_j; o_i, r_{is}),\ 0 < \delta < 1. \quad (16)$$

Note que (16) é verdade sempre que x_j e o_i estejam separados por mais do que r_{is}, e essa distância aumente ou se mantenha no instante $j+1$.

A equação (12) assegura que a derivada de Lie da CBF tem um limite inferior controlado, permitindo que ela seja não crescente. Assim, ao impor a nova CBF com o fator δ, garantimos que a função no próximo passo será igual ou menor, mantendo a coerência com a ideia de decrescimento ou estabilização progressiva dentro da dinâmica controlada do sistema.

Com a restrição de evitamento de obstáculos via funções de barreira de controle (16), pode-se reformular o MPC para rastreamento e desvio de obstáculos como

$$\min_{\boldsymbol{u}, x_a, u_a} V_N^t(x, x_t, o_i; \boldsymbol{u}, x_a, u_a),$$

$$\text{s.t.},\ x_0 = x, \quad (17a)$$

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j, j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, \quad (17b)$$

$$(x_j, u_j) \in X \times U, j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, \quad (17c)$$

$$(x_a, u_a) \in Z_s, \quad (17d)$$

$$x_N = x_a, \quad (17e)$$

$$h_i(x_{j+1}; o_i, r_i) \geq \delta h_i(x_j; o_i, r_i), \quad (17f)$$

no qual as restrições são dadas por (17a) para a condição inicial, (17b) para a predição, (17c) representando a restrição ao domínio admissível, (17d) garante que as variáveis auxiliares pertençam ao conjunto de estados e entradas estacionários e as restrições CBF em (17f) são projetadas para garantir a invariância do conjunto seguro $\mathscr{L}$ e o evitamento de obstáculos associado à função de barreira de controle em tempo discreto. Além disso, a restrição (17e) substitui a restrição terminal (8e), fornecendo uma maneira simplificada para implementação do MPC para rastreamento, como discutido em Limon et al. (2018).

A factibilidade recursiva do problema do MPC com funções de barreira é discutido em Zeng et al. (2021), considerando-se uma formulação para regulação. Ao se introduzir os conceitos de conjunto alcançável e conjunto de estados que satisfaça as restrições da CBF, pode-se explorar como a interseção desses conjuntos pode determinar a viabilidade do problema de otimização em diferentes etapas do horizonte de predição. Como a otimização pode ser inviável, procura-se encontrar sob quais circunstâncias esse problema de otimização se torna viável, ou seja, o conjunto viável sob as restrições (17c) e (17f) não esteja vazio.

Se δ for relativamente pequeno, o valor numérico da expressão (15) relacionada ao conjunto seguro diminuirá. Nesse cenário, o sistema tende a ser menos seguro, pois a taxa de acréscimo da função de barreira se torna menor. No entanto, a interseção entre (17c) e (16) pode se tornar vazia. Por outro lado, quando δ aumenta, a região definida por (16) no espaço de estados aumenta. Isso aumenta a possibilidade de que a otimização seja viável.

A escolha apropriada de δ é essencial para garantir que a interseção entre esses dois conjuntos não seja vazia, tornando-se um subconjunto adequado de (17c). Esse processo requer um equilíbrio entre segurança e viabilidade na escolha de δ. No entanto, ainda é um desafio obter uma maneira automática de selecionar δ.

3.2 Evitamento de Obstáculos através de Penalidades

Com a função de barreira desenvolvida, pode-se investigar a elaboração de estratégias para evitamento de obstáculos, adicionando termos de penalização ao problema de otimização. Como descrito em Santos et al. (2024), o MPC com funções de penalidades para o evitamento de obstáculos é obtido considerando-se o problema

$$\min \quad V(x) + \mu F(x_j, o_i), \quad (18)$$

onde μ é uma constante positiva e $F(x, o_i)$ é uma função tal que $F(x_j, o_i) \geq 0$ se restrições do tipo $g_i \leq 0$ não são satisfeitas, caso contrário $F(x_j, o_i) = 0$.

Uma classe geral de penalização é dada por

$$F(x_j, o_i) = \sum_{i=1}^{q} (\max\{0, g_i(x_j, o_i)\})^{\epsilon}, \quad (19)$$

para algum $\epsilon > 0$. Conforme $\mu \to \infty$, a solução do problema com penalidades converge para a solução do

problema com restrições duras. Além disso, se $\epsilon = 1$, a penalização exata pode ser obtida se μ for escolhido para ser maior que o maior multiplicador de Lagrange associado ao problema (Luenberger and Ye, 2021).

Considerando a condição de função de barreira (16), desenvolve-se a seguinte desigualdade

$$h_i(x_{j+1}; o_i, r_{is}) - \delta h_i(x_j; o_i, r_{is}) \leq 0, \tag{20}$$

de modo que

$$g_i(x_j, o_i) = -\delta h_i(x_j; o_i, r_{is}) + h_i(x_{j+1}; o_i, r_{is}). \tag{21}$$

Assim, obtém-se funções de penalidade que serão adicionadas ao funcional de custo (7), levando a

$$\begin{aligned} &V_N(x, x_t, o_i; \boldsymbol{u}, x_a, u_a) = \\ &\sum_{j=0}^{N-1} \|x_j - x_a\|_Q^2 + \|u_j - u_a\|_R^2 + \|x_N - x_a\|_P^2 \\ &+ \|x_a - x_t\|_T^2 + \sum_{i=1}^{N_o} \left[\mu F(x_a, o_i) + \sum_{j=0}^{N} \mu F(x_j, o_i)\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Portanto, considerando-se o funcional de custo (22), pode-se reescrever o problema de otimização (17) para que o evitamento de obstáculos seja obtido com funções de penalidade. Assim temos

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{u}, x_a, u_a} \; V_N(x, x_t, o_i; \boldsymbol{u}, x_a, u_a), \\ &\text{s.t. (17a)-(17e).} \end{aligned} \tag{23}$$

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Com o objetivo de ilustrar os benefícios do MPC para rastreamento de referência com evitamento de obstáculos usando-se funções de barreira, considere o sistema dinâmico duplo integrador descrito por

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} u_k, \tag{24}$$

com $x = [x_1 \; x_2]'$ e $u = [u_1 \; u_2]'$.

As restrições de estados e entrada são definidas, respectivamente, por $X = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq [8 \; 6]'\}$ e $U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq [7 \; 7]'\}$. Além disso, em termos dos parâmetros nominais do MPC, o comprimento do horizonte é $N = 8$, e as matrizes de ponderação são dadas para os estados $Q = 10I_2$, entradas $R = 10I_2$, custo de *offset* $T = 10I_2$, sendo I_2 uma matriz identidade 2×2. Além disso, o custo terminal P é encontrado resolvendo a equação de Riccati associada a um regulador linear quadrático.

Os obstáculos são definidos por $o_1 = [1 \; 1]'$ e $r_1 = 1{,}4$, $o_2 = [4 \; 3]'$ e $r_2 = 1{,}8$, $o_3 = [-2 \; -3]'$ e $r_3 = 2{,}5$, $o_4 = [4 \; -2]'$ e $r_4 = 1{,}5$, $o_5 = [-4 \; -2]'$ e $r_5 = 2{,}5$, $o_6 = [0 \; 4]'$ e $r_6 = 0{,}8$. Além disso, têm-se a região de segurança sendo $r_s = 0{,}5$.

Os resultados de simulações foram obtidos usando o *software* Matlab com auxilio do *toolbox* CasADi.

4.1 MPC com Funções de Barreira como Restrições para Evitamento de Obstáculos

Os resultados apresentados nessa seção usam a abordagem descrita na Seção 3.1, com os valores do estado inicial

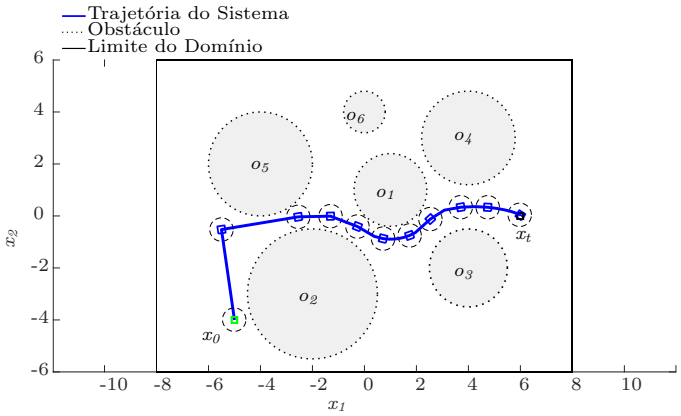

Figura 2. Trajetória realizada pelo sistema (linha azul). Os obstáculos estão representados pelos círculos o_i, $\forall i \in \mathbb{I}_{1:N_o}$, as posições de início e destino estão localizadas em $(-5, -4)$ e $(6, 0)$, marcadas como um quadrado verde e preto, respectivamente.

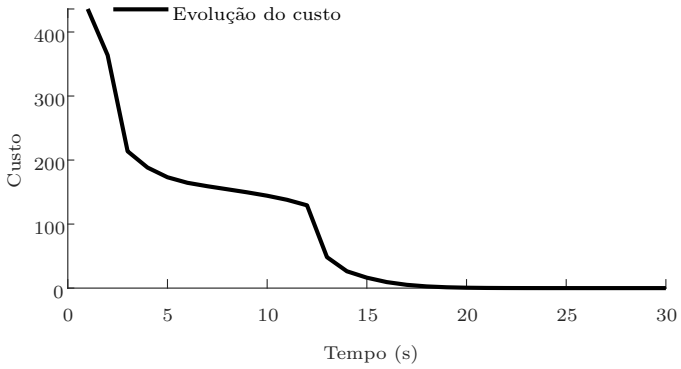

Figura 3. Evolução do funcional de custo ao longo do tempo.

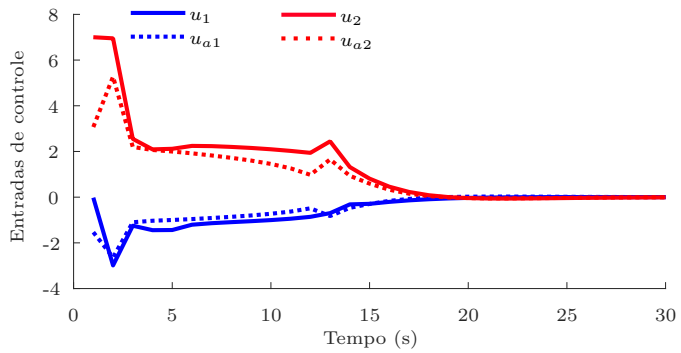

Figura 4. Evolução das entradas de controle ao longo do tempo. As linhas sólidas azul e vermelha representam as entradas de controle u_1 e u_2 e as pontilhadas representam entradas de controle artificiais u_{a1} e u_{a2}.

$x_0 = [-5 \; -4]'$, alvo $x_t = [6 \; 0]'$, $\delta = 0{,}01$, tempo de simulação $T_{max} = 35\,\text{s}$ e período de amostragem de $0.1\,\text{s}$.

Na Figura 2, evidencia-se o desvio dos obstáculos durante o percurso da trajetória do sistema, em conformidade com a restrição estabelecida em (17f). A Figura 3 ilustra a variação do custo ao longo da resolução do problema de otimização, demonstrando a confirmação das expectativas formuladas na minimização do funcional de custo descrito em (7), o qual tende a zero conforme o processo avança.

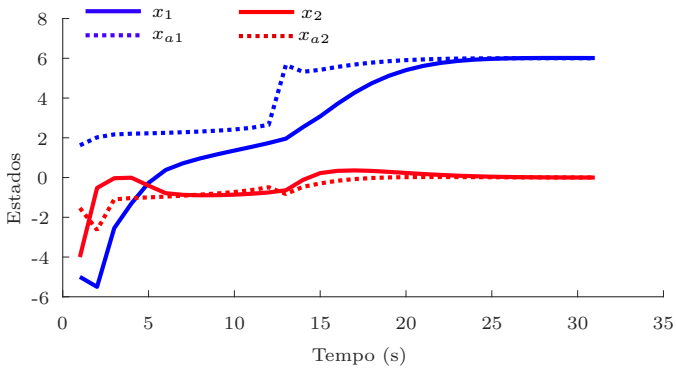

Figura 5. Evolução dos estados ao longo do tempo. As linhas sólidas azul e vermelha representando os estados preditos x_1 e x_2 e a pontilhada representando os estados artificiais x_{a1} e x_{a2}.

Nas Figuras 4 e 5, ilustra-se a evolução dos sinais de controle e dos estados ao longo do tempo. Conforme esperado, os sinais de controle convergem para uma condição estacionária à medida que se aproximam da referência desejada. Além disso, destaca-se a importância do estado artificial x_a na evolução dos estados. Ele permanece dentro do conjunto de entrada e dos estados estacionários (5), mantendo-se o mais próximo possível do objetivo. Isso demonstra uma trajetória ascendente em direção à região de equilíbrio estacionário, aproximando o estado predito do alvo a ser rastreado, conforme esperado na formulação do MPC para rastreamento (7) com as restrições (17a)–(17f).

Diferente de Minh et al. (2022), ao adicionar as funções de barreira considerando MPC para rastreamento, melhora-se as garantias de estabilidade e factibilidade do sistema em malha-fechada (Limón et al., 2008).

4.2 MPC com Funções de Barreira como Penalidade para Evitamento de Obstáculos

Nesta seção usa-se a abordagem descrita na Seção 3.2, com os valores do estado inicial $x_0 = [-5\ -4]'$, alvo $x_t = [6\ 0]'$, $\delta = 0,01$, $\mu = 10^3$ e tempo de simulação $T_{max} = 35\,\text{s}$ e período de amostragem de $0.1\,\text{s}$.

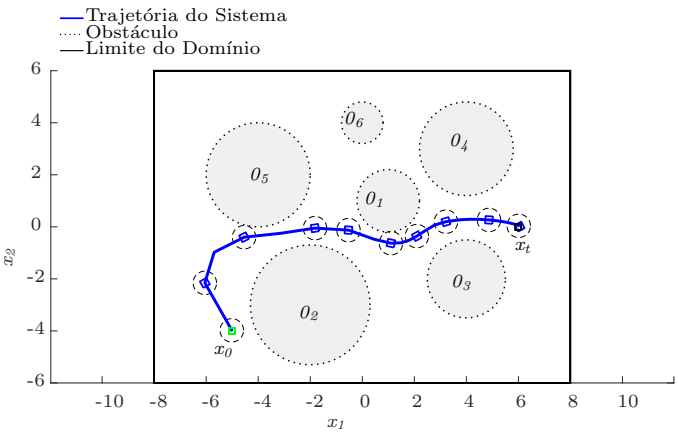

Figura 6. Trajetória realizada pelo sistema (linha azul). Os obstáculos estão representados pelos círculos o_i, $\forall i \in \mathbb{I}_{1:N_o}$, as posições de início e destino estão localizadas em $(-5, -4)$ e $(6, 0)$, marcadas como um quadrado verde e preto, respectivamente.

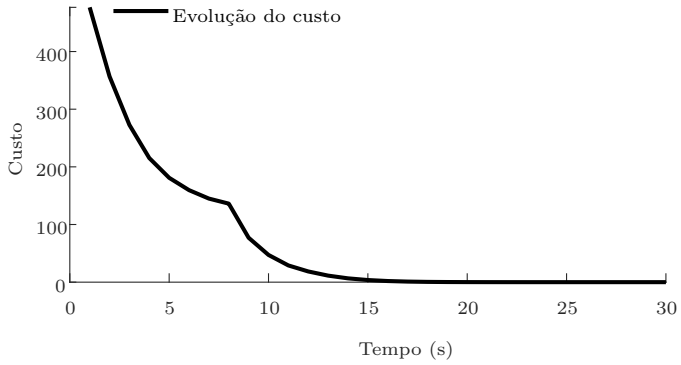

Figura 7. Evolução do funcional de custo ao longo do tempo.

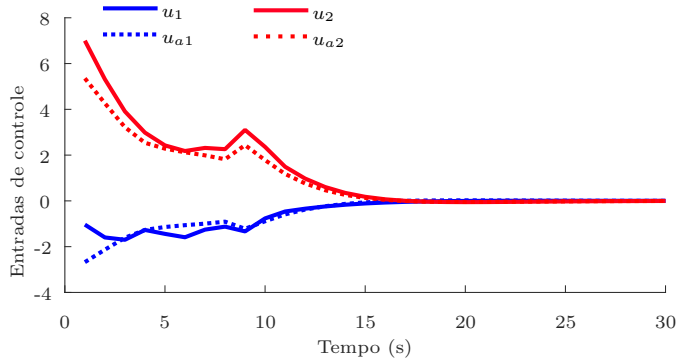

Figura 8. Evolução das entradas de controle ao longo do tempo. As linhas sólidas azul e vermelha representam as entradas de controle u_1 e u_2 e as pontilhadas representam as entradas de controle artificiais u_{a1} e u_{a2}.

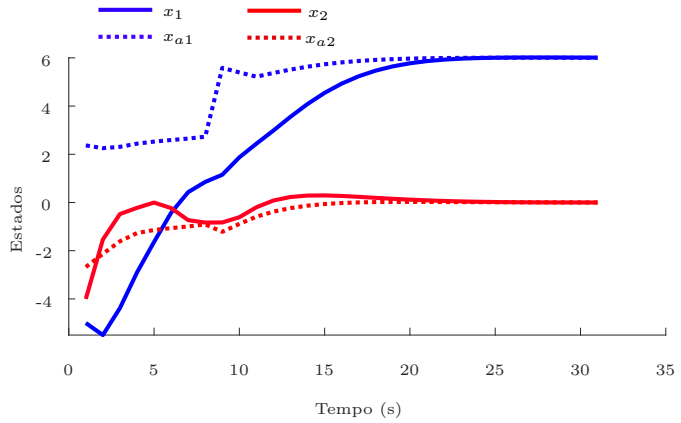

Figura 9. Evolução dos estados ao longo do tempo. As linhas sólidas azul e vermelha representando os estados preditos x_1 e x_2 e a pontilhada representando os estados artificiais x_{a1} e x_{a2}.

Na Figura 6, observa-se uma suavização do desvio dos obstáculos durante a trajetória do sistema em comparação com a formulação com restrições duras dos obstáculos, como esperado devido à formulação (23). Nessa formulação, é possível ajustar a importância de cada penalidade dentro do funcional (22).

A Figura 7 ilustra a evolução do custo ao longo da resolução do problema de otimização, evidenciando a redução

progressiva do custo em direção a zero conforme o processo avança, confirmando as expectativas formuladas.

Na Figura 8 todas as entradas de controle apresentam um comportamento de decaimento ao longo do tempo, convergindo para uma condição estacionária. Inicialmente, as entradas de controle u_1 e u_2 exibem valores mais altos, ajustando-se rapidamente para acomodarem-se em valores menores conforme o tempo avança. Esse ajuste das entradas de controle é crucial para alcançar a referência desejada, minimizando erros e contribuindo para a estabilização do sistema. As entradas de controle artificiais u_{a1} e u_{a2} seguem uma trajetória semelhante às entradas reais, mas com variações menores, suavizando e auxiliando no processo de controle, enquanto garantem que as entradas reais não ultrapassem limites indesejados e mantendo a trajetória dentro de uma faixa segura e eficiente.

A Figura 9 demonstra a importância do estado artificial x_a na evolução dos estados, destacando o comportamento de rastreamento e a manutenção da trajetória dentro dos limites desejados. Esse comportamento está consistente com a formulação do MPC (23).

Considerando funções de penalidade, comparando com a abordagem anterior, pode-se melhorar propriedades de convergência e se tem garantia de estabilidade entrada-estado como analisado em Santos et al. (2024).

5. CONCLUSÃO

Este trabalho integra a capacidade de evitamento de obstáculos ao (MPC) para o rastreamento de referência, sem comprometer as propriedades de um domínio de atração aumentado e garantindo factibilidade diante de referências variantes no tempo. Adicionalmente, emprega-se variáveis artificiais em conjunto com a teoria de funções barreiras de controle para formular as restrições e o funcional de custo de evitamento de obstáculos. Dessa forma, não apenas foi garantido o desvio dos obstáculos, mas também o controlador buscou manter a maior distância possível deles. Para trabalhos futuros, busca-se estender as formulações descritas nas Seções 3.1 e 3.2 para o método explícito buscando solucionar problemas relacionados a não convexidade.

REFERÊNCIAS

Ames, A.D., Coogan, S., Egerstedt, M., Notomista, G., Sreenath, K., and Tabuada, P. (2019). Control barrier functions: Theory and applications. In *18th European control conference (ECC)*, 3420–3431.

Ames, A.D., Xu, X., Grizzle, J.W., and Tabuada, P. (2016). Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(8), 3861–3876.

Bemporad, A. (1998). Reference governor for constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3), 415–419.

Bemporad, A., Morari, M., Dua, V., and Pistikopoulos, E.N. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38(1), 3–20.

Camacho, E.F., Bordons, C., Camacho, E.F., and Bordons, C. (2007). *Model predictive controllers*. Springer.

Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. (2009). Mpc for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*, 45(8), 1975–1978.

Hermans, B., Patrinos, P., and Pipeleers, G. (2018). A penalty method based approach for autonomous navigation using nonlinear model predictive control. *IFAC-PapersOnLine*, 51(20), 234–240.

Jian, Z., Yan, Z., Lei, X., Lu, Z., Lan, B., Wang, X., and Liang, B. (2023). Dynamic control barrier function-based model predictive control to safety-critical obstacle-avoidance of mobile robot. In *International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 3679–3685.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*, 133–144. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition.

Limón, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E.F. (2008). Mpc for tracking piecewise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9), 2382–2387.

Limon, D., Ferramosca, A., Alvarado, I., and Alamo, T. (2018). Nonlinear mpc for tracking piece-wise constant reference signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(11), 3735–3750.

Luenberger, D.G. and Ye, Y. (2021). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, Cham, Switzerland, 4th edition. doi:10.1007/978-3-030-68169-2. URL `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-68169-2`.

Mayne, D.Q. (2014). Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12), 2967–2986.

Mayne, D.Q., Rawlings, J.B., Rao, C.V., and Scokaert, P.O. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814.

Minh, N.N., McIlvanna, S., Sun, Y., Jin, Y., and Van, M. (2022). Safety-critical model predictive control with control barrier function for dynamic obstacle avoidance. URL `https://arxiv.org/abs/2211.11348`.

Nascimento, I.B.P., Pimenta, L.A.d.C., and Raffo, G.V. (2023). NMPC strategy for safe robot navigation in unknown environments using polynomial zonotopes. In *2023 Conference on Decision and Control (CDC)*.

Pereira, J.C., Leite, V.J., and Raffo, G.V. (2021). Nonlinear model predictive control on se (3) for quadrotor aggressive maneuvers. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 101, 1–15.

Rao, C.V. and Rawlings, J.B. (1999). Steady states and constraints in model predictive control. *AIChE Journal*, 45(6), 1266–1278.

Rossiter, J.A. (2017). *Model-based predictive control: a practical approach*. CRC press.

Sani, M., Robu, B., and Hably, A. (2021). Dynamic obstacles avoidance using nonlinear model predictive control. In *47th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 1–6.

Santos, M.A., Ferramosca, A., and Raffo, G.V. (2024). Setpoint tracking mpc with avoidance features. *Automatica*, 159, 111390.

Thirugnanam, A., Zeng, J., and Sreenath, K. (2022). Duality-based convex optimization for real-time obstacle avoidance between polytopes with control barrier functions. In *2022 American Control Conference (ACC)*, 2239–2246.

Zeng, J., Zhang, B., and Sreenath, K. (2021). Safety-critical model predictive control with discrete-time control barrier function. In *American Control Conference (ACC)*, 3882–3889.