

# CONTROLE DE UM BARCO EMPURRANDO UMA CARGA FLUTUANTE SUBATUADA

RAFAEL VIDA DE CASTRO ROSARIO\*, JOSÉ PAULO VILELA SOARES DA CUNHA\*

\**Departamento de Eletrônica e Telecomunicações — Faculdade de Engenharia  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro — Rua São Francisco Xavier 524, sala 5001E — 20550-900*

Emails: rafaelfvida@gmail.com, jpaulo@ieee.org

**Abstract**— The control of a boat pushing an underactuated floating load is developed and theoretically analyzed. The dynamic model of this system and its properties are described to allow the design of the control system. This problem is challenging due to the unstable dynamics and the absence of actuators on the load. Partial feedback linearization was chosen to simplify the controller design. Variable structure control was chosen in view of its robustness to parametric uncertainties and matched disturbances. Experimental and simulation results illustrate the performance of the proposed system.

**Keywords**— Variable structure control, Marine systems, Partial feedback linearization, Manipulation tasks, Uncertain systems, Underactuated systems.

**Resumo**— O controle de um barco empurrando uma carga flutuante subatuada é desenvolvido e analisado teoricamente. O modelo dinâmico do sistema e suas propriedades são descritas para permitir o projeto do sistema de controle. O problema é desafiador devido à dinâmica instável e à ausência de atuadores na carga. A linearização parcial por realimentação foi realizada para simplificar o projeto do controlador. O controle a estrutura variável foi escolhido em vista de sua robustez a incertezas em parâmetros e rejeição a perturbações casadas. Resultados experimentais e de simulação ilustram o desempenho do sistema proposto.

**Palavras-chave**— Controle a estrutura variável, Sistemas marítimos, Linearização parcial por realimentação, Tarefas de manipulação, Sistemas incertos, Sistemas subatuados.

## 1 Introdução

Para mover cargas flutuantes, barcos enguiçados ou atracar um barco, empurrar pode ser mais fácil do que puxar, pois a instalação de cabos seria desnecessária. Entretanto, até onde se sabe, o controle automático de um barco empurrando uma carga flutuante ainda não foi considerado na literatura.

Empurrar é uma importante tarefa de manipulação. Mason (1986) foi um dos pioneiros neste campo. Agarwal et al. (1997) desenvolveram um planejamento de trajetória não-holonômico para empurrar um disco desviando de obstáculos. Behrens et al. (2010) propuseram um modelo cinemático e outro dinâmico para empurrar objeto com um robô móvel. O foco de todos estes trabalhos foi a manipulação robótica na terra. Neste artigo será desenvolvida a tarefa de empurrar um disco flutuante na superfície da água.

Se fosse possível utilizar a linearização por realimentação, essa cancelaria as não-linearidades de sistemas totalmente atuados, a fim de torná-los um sistema linear, mais fácil de controlar. É largamente utilizada um manipuladores robóticos totalmente atuados (Craig, 2005, Seção 10.4) e em embarcações marítimas (Fossen, 2002, Seção 7.3). Entretanto, um barco empurrando uma carga é um sistema subatuado, pois seus propulsores não agem diretamente na carga. Em sistemas subatuados, a parte da dinâmica que é totalmente atuada pode ser linearizada por uma realimentação não-linear adequada. No entanto, a dinâmica subatuada permanece não-linear. Isto é

denominado linearização parcial por realimentação (Spong, 1994; de Luca e Oriolo, 2000).

Este trabalho combina a linearização parcial por realimentação com a linearização local da parte que não é linearizada para facilitar o projeto da superfície de deslizamento de um controlador a estrutura variável.

Yang et al. (2014), Liu et al. (2015), e Ashrafiun et al. (2008) projetaram controladores de rastreamento de trajetória para veículos marinhos de superfície utilizando controle a estrutura variável. Aqui, um controlador a estrutura variável também é projetado de modo que o sistema se torna insensível a incertezas em parâmetros e perturbações casadas podem ser rejeitadas (Young et al., 1999; Cheng et al., 2007). No final, são apresentados resultados de experimento e simulação de um barco empurrando uma carga em águas calmas.

**Notação:**  $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz nula.

## 2 Modelagem dinâmica

Para o desenvolvimento do sistema de controle, será realizada a modelagem da dinâmica de um barco empurrado um objeto flutuante na superfície da água. Para este fim, são definidos três sistemas de coordenadas, apresentados na Figura 1: o sistema estacionário representado por  $x_e O_e y_e$ , o sistema de coordenadas do barco representado por  $x_b O_b y_b$  e o sistema de coordenadas da carga (objeto) representado por  $x_o O_o y_o$ , os dois últimos

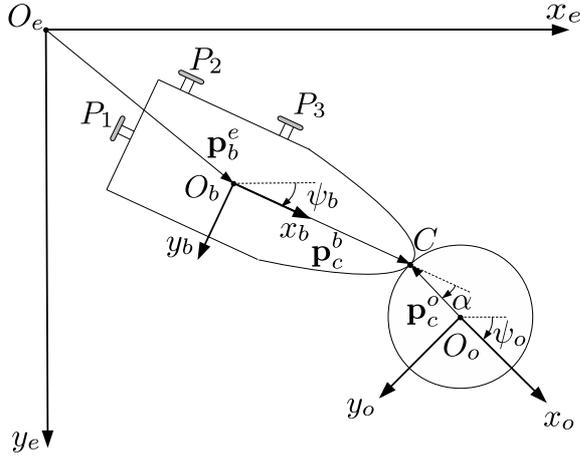


Figura 1: Vista superior dos sistemas de coordenadas. Os propulsores  $P_i$  também são mostrados.

são sistemas móveis. Nessa figura, a orientação do barco é dada pelo ângulo de guinada (*yaw*)  $\psi_b$ , a orientação do objeto é dada pelo ângulo  $\psi_o$  e a orientação do objeto em relação ao barco é dada por  $\alpha = \psi_o - \psi_b$ .

O objeto adotado é um disco flutuante, por sua simetria e simplicidade. O vetor  $\mathbf{p}_c^b = [x_c^b, y_c^b]^T$  representa a posição do ponto de contato  $C$  no sistema de coordenadas do barco e o vetor  $\mathbf{p}_c^o = [x_c^o, y_c^o]^T$  representa a posição de  $C$  no sistema de coordenadas do objeto.

As equações dinâmicas genéricas de corpos rígidos articulados, tais como manipuladores robóticos, podem ser representadas em coordenadas generalizadas (Craig, 2005, Seção 6.8). Estas foram adaptadas a veículos marinhos tratados como corpo rígido único deslocando-se em um fluido (Fossen, 2002, Capítulos 2 e 3). O barco e a carga são tratados como uma estrutura robótica serial com base móvel e quatro graus de liberdade. A junta virtual é o ponto de contato  $C$ , assumindo-se idealmente que não haja escorregamento. Assim, o modelo dinâmico é dado por (Rosario, 2017):

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{w}, \quad (1)$$

na qual:

$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M}^T(\boldsymbol{\eta}) > \mathbf{0}$  é a matriz de inércia que inclui massas adicionais. As massas adicionais representam efeitos hidrodinâmicos e são muito incertas;

$\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  é a matriz Coriolis-centrípeta que também inclui massas adicionais;

$\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})^T > \mathbf{0}$  é a matriz de arraste;

$\boldsymbol{\eta} := [x_b^e, y_b^e, \psi_b, \alpha]^T$  é o vetor de posição generalizada, no qual  $x_b^e$  e  $y_b^e$  são as coordenadas da origem do barco  $O_b$  no sistema estacionário;

$\boldsymbol{\tau} := [X, Y, N, 0]^T$  é o vetor da força generalizada gerada pelos propulsores no sistema de coordenadas do barco, no qual  $X$  e  $Y$  são forças que atuam na direções  $x_b$  e  $y_b$ , respectivamente, e  $N$  é momento no eixo vertical;

$\mathbf{w}$  é o vetor de perturbações ambientais (vento, ondas e correntezas).

Neste modelo, assumiu-se que os movimentos verticais e o balanço do barco e do objeto são desprezíveis. Pode-se notar que o último elemento de  $\boldsymbol{\tau}$  é nulo pois não há atuador agindo diretamente no objeto, isto é, o sistema é subatuado.

A matriz

$$\mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_b) & -\sin(\psi_b) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_b) & \cos(\psi_b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

é unitária e transforma os vetores do sistema de coordenadas do barco para o sistema de coordenadas estacionário.

O modelo dinâmico de corpos rígidos foi obtido por meio da formulação Lagrangiana (Craig, 2005, Seção 6.9). A formulação de Lagrange não leva em consideração o arraste. Então, as forças de arraste  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}}$  foram adicionadas à equação dinâmica (Craig, 2005, Seção 6.11). Para simplificar a modelagem, foi considerado um arraste linear, proporcional à velocidade.

Rosario (2017) descreveu os termos das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  (Seções 5.3 e 5.4) e os valores dos parâmetros (Apêndice B).

## 2.1 Modelo dos propulsores

A força gerada por cada propulsor  $P_i$  é dada por

$$F_{P_i} = \alpha_i^*(u_i)u_i|u_i|, \quad \alpha_i^*(u_i) = \begin{cases} \alpha_i^+, & \text{se } u_i \geq 0, \\ \alpha_i^-, & \text{se } u_i < 0, \end{cases} \quad (3)$$

na qual  $\alpha_i^+$  e  $\alpha_i^-$  são os coeficientes das hélices nos sentidos direto e reverso, respectivamente,  $u_i \in [-1, 1]$  é o comando de velocidade de rotação do  $i$ -ésimo propulsor em pu (por unidade) e  $i \in \{1, 2, 3\}$  (Cunha et al., 2000). Assume-se que a dinâmica dos propulsores seja rápida o suficiente para ser desprezada.

A força generalizada gerada pelo conjunto dos propulsores é dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}\mathbf{B}_p\mathbf{F}_p, \quad (4)$$

na qual  $\mathbf{F}_p = [F_{P_1}, F_{P_2}, F_{P_3}]^T$  é o vetor de força dos propulsores,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

e a matriz de distribuição de controle é

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_{P_2}^b & x_{P_3}^b \end{bmatrix} \quad (6)$$

para o barco na Fig. 1. A matriz  $\mathbf{B}_p$  (Rosario e Cunha, 2016) é determinada pelas posições dos propulsores  $P_i$ , no sistema de coordenadas do barco, que são dadas pelos vetores  $\mathbf{p}_{P_i}^b = [x_{P_i}^b, y_{P_i}^b]^T$ , não mostrados nessa figura.

### 3 Ponto de Contato e Ângulo de Atrito

Assume-se o contato pontual em  $C$  e que a força de atrito obedece a Lei de Atrito de Coulomb, embora essas condições não sejam satisfeitas perfeitamente em situações práticas (Behrens et al., 2010). Além disso, é assumido que o atrito entre o barco e o objeto seja suficientemente grande para que não haja escorregamento no ponto de contato. Para que o escorregamento seja evitado, a desigualdade (Mason, 1986)

$$\mu_c \geq |\tan(\alpha)|, \quad (8)$$

deve ser satisfeita, na qual  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito Coulomb estático no ponto de contato. Pode-se concluir que há um valor máximo que o ângulo  $\alpha$  poderá assumir, dependendo do coeficiente de atrito, e o contato é perdido quando esse valor for excedido. Se a superfície for perfeitamente áspera ( $\mu_c \rightarrow +\infty$ ), da desigualdade (8) chega-se à conclusão de que o contato seria perdido quando  $|\alpha| \geq \pi/2$  (Agarwal et al., 1997). Entretanto, o máximo módulo deste ângulo é menor que  $\pi/2$  em situações práticas, pois não existe superfície perfeitamente áspera. O máximo ângulo, denominado ângulo de atrito, é dado por

$$\alpha_{\max} = \tan^{-1}(\mu_c). \quad (9)$$

### 4 Linearização por Realimentação

A ideia central é transformar algebricamente um sistema não-linear em um sistema linear, para facilitar o desenvolvimento do sistema de controle (Slotine e Li, 1991, Capítulo 6). Isso é descrito passo-a-passo nas seguintes subseções.

#### 4.1 Compensador não-linear dos propulsores

A característica quadrática dos propulsores (3) pode ser compensada pela função inversa (Domingues, 1989)

$$u_i = \text{sign}(\bar{u}_i) \sqrt{|\bar{u}_i|}, \quad (10)$$

na qual  $\bar{u}_i$  é o sinal de comando do  $i$ -ésimo propulsor na entrada do seu respectivo compensador.

Combinando-se as equações (3), (4) e (10), obtém-se

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}\mathbf{B}_p\boldsymbol{\alpha}^*(\bar{\mathbf{u}})\bar{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\alpha}^*(\bar{\mathbf{u}}) := \text{diag}\{\alpha_i^*(\bar{u}_i)\}. \quad (11)$$

Entretanto, os comandos gerados pelos algoritmos de controle são forças e momentos no sis-

tema de coordenadas estacionário. Então, é necessário realizar o desacoplamento por meio da inversão da matriz de distribuição de controle

$$\bar{\mathbf{u}} = [\boldsymbol{\alpha}^*(\bar{\mathbf{u}})]^{-1}\mathbf{B}_p^{-1}\boldsymbol{\tau}_b, \quad (12)$$

na qual  $\boldsymbol{\tau}_b \in \mathbb{R}^3$  é o sinal de controle, cujas unidades são [N, N, Nm]. Substituindo-se (12) em (11) resulta a transferência desejada

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}\boldsymbol{\tau}_b. \quad (13)$$

#### 4.2 Linearização parcial por realimentação

Sistemas mecânicos subatuados tem menos atuadores do que graus de liberdade. A parte da dinâmica que é totalmente atuada pode ser linearizada utilizando linearização por realimentação. A parte restante da dinâmica após a linearização parcial por realimentação é não-linear e denominada dinâmica interna (Spong, 1994).

Para realizar a linearização parcial por realimentação, a equação dinâmica (1) com sinal de controle (13) é particionada na forma (7), na qual  $\boldsymbol{\eta}_b = [x_b^e, y_b^e, \psi_b]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{w}_b \in \mathbb{R}^3$  é a perturbação que age no barco e  $w_\alpha \in \mathbb{R}$  é a perturbação que age no disco. Esta equação dinâmica pode ser representada na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1\ddot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{M}_2\ddot{\alpha} + \mathbf{C}_1\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{C}_2\dot{\alpha} + \mathbf{D}_1\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{D}_2\dot{\alpha} &= \\ &= \mathbf{R}_{b_1}^e\boldsymbol{\tau}_b + \mathbf{w}_b, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_3\ddot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{M}_4\ddot{\alpha} + \mathbf{C}_3\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{C}_4\dot{\alpha} + \mathbf{D}_3\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{D}_4\dot{\alpha} &= \\ &= w_\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

A dependência dos elementos  $\{M_i\}$ ,  $\{C_i\}$ ,  $\{D_i\}$  e  $\{\mathbf{R}_{b_i}^e\}$  de  $\boldsymbol{\eta}$  e  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  não é mostrada para evitar confusão. A equação (15) pode ser reescrita como

$$\ddot{\alpha} = -M_4^{-1}(\mathbf{M}_3\ddot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{C}_3\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{C}_4\dot{\alpha} + \mathbf{D}_3\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{D}_4\dot{\alpha} - w_\alpha), \quad (16)$$

que pode ser substituída na equação (14) para obter

$$\tilde{M}_4\ddot{\boldsymbol{\eta}}_b + \mathbf{h} = \mathbf{R}_{b_1}^e\boldsymbol{\tau}_b + \mathbf{w}_b - \mathbf{M}_2M_4^{-1}w_\alpha, \quad (17)$$

na qual  $\tilde{M}_4 = \tilde{M}_4^T = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2M_4^{-1}\mathbf{M}_3 > 0$  é o complemento de Schur de  $M_4$  (de Luca e Oriolo, 2000) e

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1 - \mathbf{M}_2M_4^{-1}(\mathbf{C}_3 + \mathbf{D}_3)]\dot{\boldsymbol{\eta}}_b \\ &+ [\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2 - \mathbf{M}_2M_4^{-1}(\mathbf{C}_4 + \mathbf{D}_4)]\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

Usando-se o estado medido na lei de controle

$$\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{R}_{b_1}^{e-1}(\boldsymbol{\eta}) \left[ \tilde{M}_4\mathbf{a}^e + \mathbf{h} \right], \quad (19)$$

na qual  $\mathbf{a}^e = [a_x^e, a_y^e, a_{\psi_b}^e]^T$  é o comando de aceleração no sistema de coordenadas estacionário, das equações (16) e (17) obtém-se

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_b = \mathbf{a}^e + \mathbf{d}_b, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= -M_4^{-1}[\mathbf{M}_3\mathbf{a}^e + (\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_4)\dot{\boldsymbol{\eta}}_b + (\mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_4)\dot{\alpha}] \\ &+ d_\alpha, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_b \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\eta}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_b \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\eta}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 & \mathbf{D}_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_b \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\eta}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{b_1}^e & \mathbf{R}_{b_2}^e \\ \mathbf{R}_{b_3}^e & \mathbf{R}_{b_4}^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_b^e(\boldsymbol{\eta})} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_b \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_b \\ w_\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}. \quad (7)$$

nas quais  $\mathbf{d}_b = \tilde{M}_4^{-1}(\mathbf{w}_b - \mathbf{M}_2\mathbf{M}_4^{-1}w_\alpha)$  e  $d_\alpha = -\mathbf{M}_4^{-1}[\mathbf{M}_3\tilde{M}_4^{-1}\mathbf{w}_b - (\mathbf{M}_3\tilde{M}_4^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4^{-1} - 1)w_\alpha]$  representam os termos residuais de aproximações, perturbações ambientais e incertezas que são consideradas perturbações.

### 4.3 Linearização local

A linearização parcial por realimentação é incapaz de transformar todo o sistema subatuado em cadeias de duplo-integradores, como seria possível em sistemas totalmente atuados. Para facilitar a análise do controle, a linearização parcial por realimentação é complementada pela linearização local dos termos não-lineares restantes.

As equações (20) e (21) podem ser linearizadas em torno do ponto de operação  $[\psi_b, \alpha, \dot{y}_b^e, \dot{\psi}_b, \dot{\alpha}, a_x^e, a_y^e, a_{\psi_b}^e]^T = \mathbf{0}$  e velocidade avançada  $\dot{x}_b^e = \dot{x}_{b_{ref}}^e$ . A linearização resulta em

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{a}^e + \mathbf{d}_b) + \mathbf{B}_d d_\alpha, \quad (22)$$

na qual  $\mathbf{x} := [\boldsymbol{\eta}^T, \dot{\boldsymbol{\eta}}^T]^T$  é o vetor de estado,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{A}_8 (I_{z_o} + m_o x_c^{o2})^{-1} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{B}_8 (I_{z_o} + m_o x_c^{o2})^{-1} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{A}_8 = [0, 0, -C_{o_x} x_c^o \dot{x}_{b_{ref}}^e, -C_{o_x} x_c^o \dot{x}_{b_{ref}}^e, 0, -C_{o_x} x_c^o, \\ -C_{o_{\psi_o}} - C_{o_x} x_c^o (x_c^o - x_c^b), -C_{o_{\psi_o}} - C_{o_x} x_c^{o2}],$$

$\mathbf{B}_d = [\mathbf{0}_{1 \times 4}, \mathbf{0}_{1 \times 3}, 1]^T$ ,  $\mathbf{B}_8 = [0, m_o x_c^o, -I_{z_o} - m_o x_c^o (x_c^o - x_c^b)]^T$ ,  $\mathbf{d}_b$  é a perturbação casada que age diretamente na entrada,  $d_\alpha$  é a perturbação descasada, que não age na entrada do sistema (Edwards e Spurgeon, 1998, Seção 1.5),  $m_o$  e  $I_{z_o}$  são a massa e o momento de inércia do objeto,  $C_{o_x}$  é o coeficiente de arraste linear do objeto e  $C_{o_{\psi_o}}$  é o seu coeficiente de arraste de rotação.

**Nota 1** Se o coeficiente de arraste  $C_{o_x}$  do objeto ou a velocidade do barco forem nulos, resultando em nenhuma força de arraste, então o sistema linearizado (22) é não-controlável. Nesse caso, a controlabilidade do sistema (20)–(21) não poderia ser garantida (Hermann e Krener, 1977), o que dificultaria ou impediria o projeto de controladores. Por outro lado, uma vez que o barco se move

avante e há arraste, então a controlabilidade do sistema linearizado implica a controlabilidade do sistema não-linear original.

## 5 Estratégia de Controle

O modelo utilizado para o projeto do controlador não leva em consideração as massas adicionais, então as mesmas serão consideradas como perturbações. O controle a estrutura variável será útil para lidar com esse tipo de perturbação.

### 5.1 Controle equivalente

Uma maneira simples de analisar a dinâmica da variável de deslizamento é utilizar o conceito de controle equivalente (Utkin, 1978). O controle equivalente é a ação de controle  $\mathbf{a}_{eq}^e$  contínua necessária para manter o sistema sobre a superfície de deslizamento  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ .

Pode-se realizar uma mudança de variáveis para expressar o sistema (22) em função do erro,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\mathbf{a}^e + \mathbf{d}_b) + \mathbf{B}_d d_\alpha, \quad (25)$$

na qual

$$\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x} \quad (26)$$

é o vetor de erro e  $\mathbf{x}_{ref}$  é o sinal de referência. Definindo-se a variável de deslizamento como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (27)$$

na qual  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 8}$  é uma matriz que deve ser projetada, é possível obter o sinal de controle equivalente resolvendo-se a equação

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}. \quad (28)$$

Substituindo-se as equações (25) e (27) em (28), tem-se que

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{B}(\mathbf{a}_{eq}^e + \mathbf{d}_b) + \mathbf{S}\mathbf{B}_d d_\alpha = \mathbf{0},$$

da qual se obtém

$$\mathbf{a}_{eq}^e = -(\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{d}_b + \mathbf{S}\mathbf{B}_d d_\alpha), \quad (29)$$

de modo que  $\mathbf{S}$  deve ser projetada para que  $\mathbf{S}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  seja não-singular. É importante notar que a implementação prática do controle equivalente é inviável, já que dependeria das perturbações  $\mathbf{d}_b$  e  $d_\alpha$  que são desconhecidas (Vidal, 2016).

Substituindo-se o controle equivalente (29) na equação de estado (25), obtém-se a dinâmica do sistema em malha fechada durante o deslizamento

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = [\mathbf{I}_8 - \mathbf{B}(\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{S}] (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_d d_\alpha). \quad (30)$$

O estado é confinado ao subespaço definido por  $\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  durante o deslizamento, então a ordem da dinâmica do sistema (30) é reduzida (DeCarlo et al., 1988). Este resultado mostra que, ao alcançar a superfície de deslizamento, o sistema se torna insensível a perturbações casadas  $\mathbf{d}_b$ . Essa característica é denominada propriedade da invariância (Vidal, 2016). No entanto, as perturbações não-casadas  $d_\alpha$  não são rejeitadas.

### 5.2 Projeto da superfície de deslizamento

Para o projeto da superfície de deslizamento, é necessário escolher uma matriz  $\mathbf{S}$  de modo que a variável de deslizamento  $\sigma$  possua grau relativo uniforme e unitário com respeito à entrada de controle  $\mathbf{a}^e$ . Para que isso seja possível, basta que  $\mathbf{S}\mathbf{B}$  seja não-singular. Além disso, a dinâmica do modo deslizante (30) deve ser exponencialmente estável (Vidal, 2016).

O sistema (25) pode ser reescrito na forma regular por meio de uma transformação ortogonal  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_{12}]^T$  (Edwards e Spurgeon, 1998, Seção 4.2),

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{a}^e + \mathbf{d}_b) + \bar{\mathbf{B}}_d d_\alpha, \quad (31)$$

$$\sigma = \bar{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (32)$$

nas quais

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_d = \mathbf{T}\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{d_1} \\ \bar{\mathbf{B}}_{d_2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{T}^T = [\bar{\mathbf{S}}_1 \quad \bar{\mathbf{S}}_2].$$

As submatrizes de  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_d$  e  $\bar{\mathbf{S}}$  tem dimensões de acordo com o vetor  $\tilde{\mathbf{x}}$ , que possui componentes  $\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^5$  e  $\bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^3$ .

A transformação  $\mathbf{T}$  é obtida por meio da decomposição triangular-ortogonal

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{Q}, \quad (33)$$

na qual  $\mathbf{Q}$  é uma matriz triangular superior (Strang, 2006, Seção 3.4).

A dinâmica do modo deslizante (30), após a transformação de coordenadas é

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ -\mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}_{11} & -\mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}_{12} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{d_1} \\ -\mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}_{d_1} \end{bmatrix} d_\alpha, \quad (34)$$

na qual  $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1$ . Como na superfície de deslizamento  $\sigma = \bar{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  tem-se  $\bar{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_1$ , então

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{K})\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_{d_1} d_\alpha, \quad (35)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = -\mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{K}\bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{K}\bar{\mathbf{B}}_{d_1} d_\alpha. \quad (36)$$

O sistema será exponencialmente estável se  $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{K})$  for Hurwitz e  $d_\alpha$  for limitada. A matriz  $\mathbf{K}$  pode ser projetada por meio de posicionamento de autovalores, desde que o par  $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{12})$  seja controlável (Edwards e Spurgeon, 1998, Seção 4.2). A submatriz  $\bar{\mathbf{S}}_2$  pode ser escolhida como  $\bar{\mathbf{S}}_2 = \Lambda\bar{\mathbf{B}}_2$ , na qual  $\Lambda = \mathbf{S}\mathbf{B}$  é uma matriz não-singular (pode ser escolhida a matriz identidade por simplicidade). Assim, define-se a matriz  $\mathbf{S}$  como (Vidal, 2016)

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}_2 [\mathbf{K} \quad \mathbf{I}_3] \mathbf{T}. \quad (37)$$

## 6 Análise de Estabilidade

Adota-se a lei de controle (Vidal, 2016)

$$\mathbf{a}^e = -\Lambda^{-1}[\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \rho(t) \text{sign } \sigma], \quad (38)$$

com função de modulação  $\rho(t) = \text{diag}\{\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t)\}$  a ser escolhida, o que depende de majorantes para as perturbações.

É possível provar que o sistema atinge a superfície de deslizamento por meio da função de Lyapunov

$$V = \frac{\sigma^T \sigma}{2}, \quad (39)$$

cujas derivada é

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma}. \quad (40)$$

Substituindo-se a lei de controle (38) em (25), obtém-se

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\Lambda^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\Lambda^{-1}\rho(t) \text{sign } \sigma + \mathbf{B}\mathbf{d}_b + \mathbf{B}_d d_\alpha, \quad (41)$$

que, aplicada na derivada da variável de deslizamento  $\dot{\sigma} = \mathbf{S}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$ , resulta

$$\dot{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{S}\mathbf{B}\Lambda^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{S}\mathbf{B}\Lambda^{-1}\rho(t) \text{sign } \sigma + \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{d}_b + \mathbf{S}\mathbf{B}_d d_\alpha. \quad (42)$$

Substituindo-se (42) na derivada de função de Lyapunov (40), tem-se

$$\dot{V} = \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{B}\Lambda^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{d}_b + \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{B}_d d_\alpha - \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{B}\Lambda^{-1}\rho(t) \text{sign } \sigma. \quad (43)$$

Adotando-se  $\Lambda := \mathbf{S}\mathbf{B}$  por simplicidade, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{d}_b \\ &\quad + \sigma^T \mathbf{S}\mathbf{B}_d d_\alpha - \sigma^T \rho(t) \text{sign } \sigma \\ &= \sigma^T \bar{\mathbf{d}} - \sum_{i=1}^3 \rho_i |\sigma_i|, \end{aligned} \quad (44)$$

na qual

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{d}_b + \mathbf{S}\mathbf{B}_d d_\alpha. \quad (45)$$

Se  $\rho_i(t) \geq |\bar{d}_i(t)| + \delta, \forall t \geq 0$ , com constante arbitrária  $\delta > 0$ , então

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^3 \delta |\sigma_i| < 0, \quad \sigma \neq \mathbf{0}, \quad (46)$$

o que permite concluir que o estado atinge a superfície de deslizamento  $\sigma = \mathbf{0}$  em tempo finito.

Além disso, se na dinâmica do modo deslizante (35),  $\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{K}$  for Hurwitz e  $d_\alpha(t)$  for limitada, então  $\bar{\mathbf{x}}_1$  e  $\bar{\mathbf{x}}_2$  são limitados, o que prova a estabilidade local deste sistema de controle.

**Nota 2** O termo  $\mathbf{S}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$  na lei de controle (38) é útil para cancelar um termo na equação (44). Na prática, esse termo permite reduzir a amplitude da função de modulação  $\rho(t)$  e do sinal de controle.

**Nota 3** Esta análise prova que o esquema de controle a estrutura variável proposto pode estabilizar localmente o sistema barco-objeto e rejeitar perturbações casadas no barco. Entretanto, perturbações não-casadas no objeto podem não ser completamente rejeitadas, pois o sistema é subatuado.

## 7 Sistema Experimental

O barco usado nos experimentos é mostrado na Fig. 2. Ele se move com velocidade máxima de 0,26 m/s avante e possui 0,48 m de comprimento. A carga é um disco com diâmetro de 0,26 m.



Figura 2: Barco e carga flutuante.

A posição e a orientação do barco e da carga foram medidas por um sistema Vicon MX, dotado de quatro câmeras de alta velocidade e uma unidade de processamento. O *software* Vicon *Tracker* processa as imagens. Um *kit* de desenvolvimento de *software* da Vicon permite utilizar as medições no MATLAB. O *Tracker* fornece ao MATLAB posição, orientação (ângulos de Euler) e número do quadro (*frame*), que serve para sincronizar precisamente a execução dos algoritmos de controle em tempo real. Módulos *ZigBee* realizam a comunicação sem fios entre o microcomputador de controle e o microcontrolador Arduino que aciona os motores do barco (Rosario e Cunha, 2016).

Embora as câmeras do sistema Vicon possam operar numa frequência de até 1 kHz, a frequência de amostragem foi limitada a apenas 30 Hz, devido a limitações da comunicação USB entre o microcomputador e o módulo *ZigBee*.

## 8 Experimento e Simulação

A realização da linearização parcial por realimentação utilizou os valores nominais dos parâmetros do modelo dinâmico do barco e da

carga. O controle a estrutura variável foi projetado para autovalores  $\lambda(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{K}) = \{-7; -1; -0,3; -3; -2\}$  rad/s. Uma vez que as perturbações são desconhecidas, a função de modulação foi escolhida experimentalmente,  $\rho = 0,3\mathbf{I}_3$ , que é constante pois se assume que as perturbações sejam uniformemente limitadas.

A Fig. 3a apresenta a trajetória, a Fig. 3b o ângulo de rumo da embarcação, a Fig. 3c a orientação do objeto e a Fig. 4 os erros nos eixos  $x_e$  e  $y_e$ . A simulação foi realizada pelo *Simulink* com passo de integração de 1 ms. Foram utilizadas as mesmas condições iniciais dos experimentos, mas não foram incluídas perturbações.

Nas Figs. 3 e 4 observa-se a convergência dos sinais simulados para suas referências. Isso não foi observado no experimento em parte pela sua duração de cerca de 12 s, limitada pela área de trabalho disponível. Embora, a convergência dos erros não tenha sido verificada experimentalmente, o desempenho foi satisfatório pois o barco conseguiu empurrar o objeto até o seu destino.

Na Fig. 5 observa-se que os propulsores atingiram a saturação diversas vezes durante o experimento, o que só ocorreu no início da simulação, conforme a Fig. 6. Nota-se ainda que o chaveamento de alta frequência que caracteriza o modo deslizante é evidente na Fig. 6, mas não é observado nos sinais de controle experimentais (Fig. 5), devido ao fenômeno do *chattering*. Na Fig. 5 observa-se que o sinal de controle do propulsor  $P_1$  é sempre positivo, pois este propulsor é responsável por fazer o sistema andar para frente. Já os sinais de  $P_2$  e  $P_3$  são praticamente simétricos, pois são responsáveis por gerar o torque que mantém o rumo desejado.

Houve o cuidado de iniciar o experimento com o sistema barco-objeto bem próximo da referência e mantendo-se o contato. O disco e a proa do barco são feitos de isopor (poliestireno), cujo coeficiente de atrito é  $\mu_c \approx 0,5$  (Lide, 2005, Seção 15). Sendo assim, o disco poderia atingir um ângulo máximo  $\alpha_{\max} \approx 0,46$  rad, conforme a equação (9), o que é respeitado na Fig. 3c.

## 9 Conclusões

O controle do sistema barco-objeto foi apresentado e analisado teoricamente. A linearização parcial por realimentação foi adotada para transformar a dinâmica atuada não-linear do barco em três duplos integradores. Entretanto, a dinâmica subatuada (interna) da carga pode ser linearizada apenas localmente. Outra dificuldade é que a dinâmica da carga empurrada sem controle é instável. O controlador foi projetado para estabilizá-la.

O controle a estrutura variável foi escolhido em vista da sua robustez a incertezas e perturbações. Este é imune a incertezas no barco, pois são tratadas como perturbações casadas. Embora a

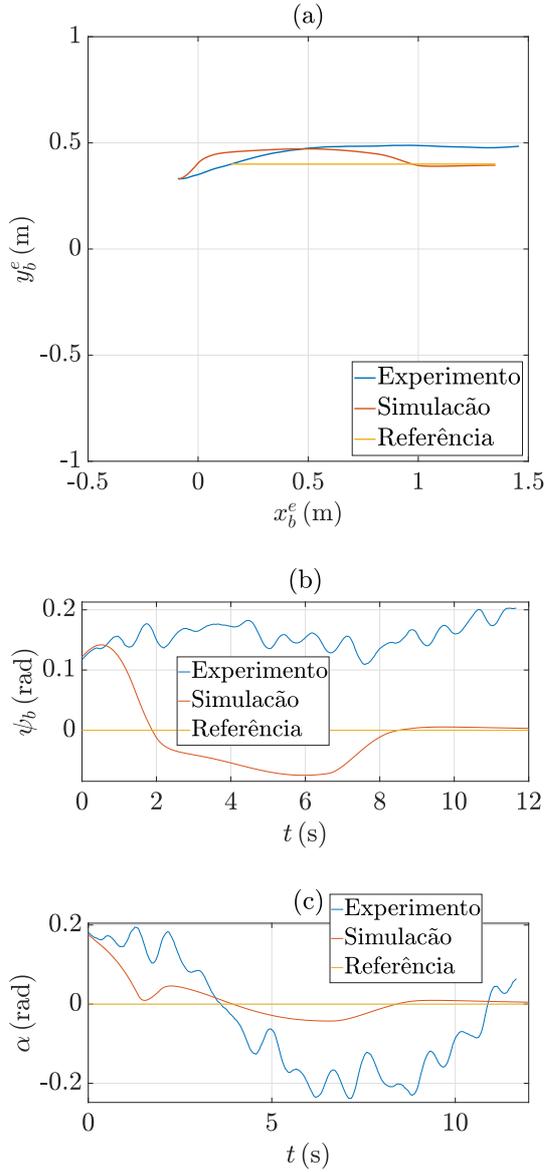


Figura 3: Resultados de experimento e simulação: (a) trajetória no plano horizontal, (b) ângulo de rumo e (c) orientação do objeto.

análise teórica indique que os efeitos de algumas perturbações na carga flutuante não podem ser rejeitados devido à subatuação, esses podem ser limitados desde que essas perturbações não-casadas não sejam muito grandes, conforme a Nota 3.

Deve-se destacar que a velocidade de avanço do barco é importante para produzir forças de arraste na carga por duas razões: (i) é necessário manter o contato entre o barco e a carga pelo atrito no ponto de contato (vide Seção 3); (ii) as forças de arraste são necessárias para garantir a controlabilidade do sistema, conforme a Nota 1.

Foram realizados experimentos e simulações com uma pequena embarcação empurrando um disco de isopor numa piscina. Os resultados obtidos validaram o desenvolvimento teórico apresentado. Assim, comprovou-se que é viável empurrar de forma estável uma carga flutuante utilizando

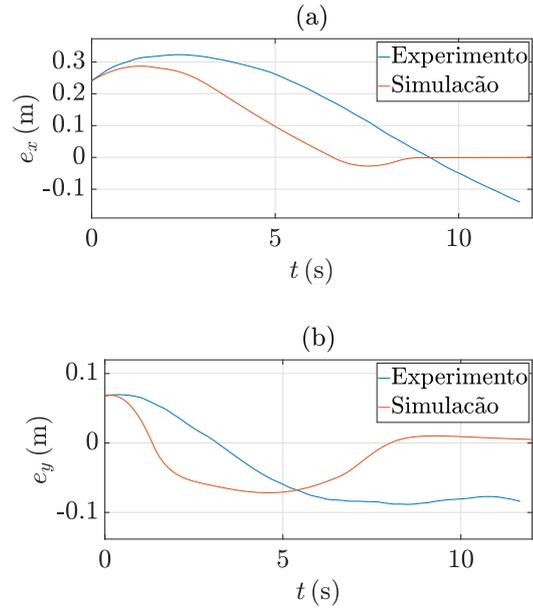


Figura 4: Resultados de experimento e simulação: (a) erro no eixo  $x_e$  e (b) erro no eixo  $y_e$ .

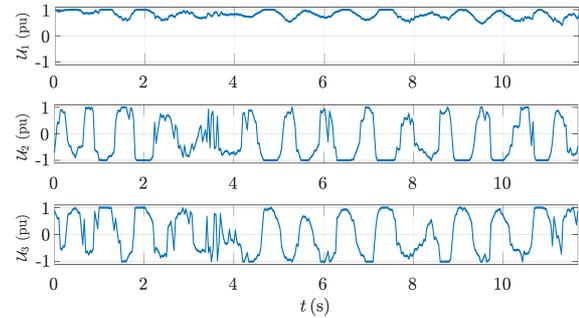


Figura 5: Resultados de experimento: sinais de controle dos propulsores.

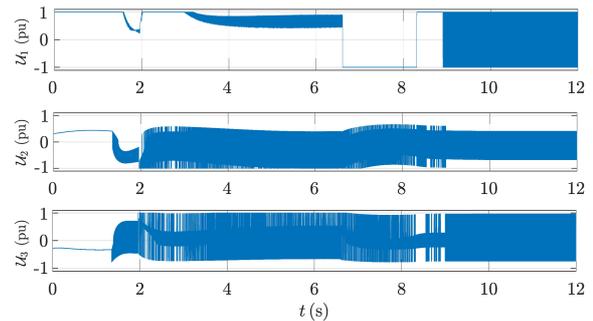


Figura 6: Resultados de simulação: sinais de controle dos propulsores.

apenas uma embarcação, sem amarras nem dispositivos mecânicos para estabilização passiva.

Este problema não foi abordado teoricamente nem experimentalmente na literatura conhecida.

Dentre as sugestões para trabalhos futuros, podemos citar o desenvolvimento de alguma alternativa para lidar com a saturação dos propulsores e reduzir o efeito do *chattering*.

## Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela CAPES, CNPq e FAPERJ.

## Referências

- Agarwal, P. K., Latomb, J.-C., Motwani, R. e Raghavan, P. (1997). Nonholonomic path planning for pushing a disk among obstacles, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Vol. 4, Albuquerque, NM, pp. 3124–3129.
- Ashrafioun, H., Muske, K. R., McNinch, L. C. e Soltan, R. A. (2008). Sliding-mode tracking control of surface vessels, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **55**(11): 4004–4012.
- Behrens, M., Huang, S. e Dissanayake, G. (2010). Models for Pushing Objects with a Mobile Robot Using Single Point Contact, *Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 2964 – 2969.
- Cheng, J., Yi, J. e Zao, D. (2007). Design of a sliding mode controller for trajectory tracking problem of marine vessels, *IET Control Theory Appl.* **1**(1): 233–237.
- Craig, J. J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3 edn, Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Cunha, J. P. V. S., Hsu, L., Lizarralde, F. e Costa, R. R. (2000). Avaliação experimental da modelagem e simulação dinâmica de um veículo submarino de operação remota, *Revista Controle e Automação* **11**(2): 82–93.
- de Luca, A. e Oriolo, G. (2000). Motion planning and trajectory control of an underactuated three-link robot via dynamic feedback linearization, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Vol. 3, San Francisco, CA, pp. 2789–2795.
- DeCarlo, R. A., Zak, S. H. e Matthews, G. P. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial, *Proceedings of the IEEE* **76**(3): 212–232.
- Domingues, R. B. (1989). *Simulação e controle de um veículo submarino de operação remota*, Master’s thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Edwards, C. e Spurgeon, S. K. (1998). *Sliding Mode Control*, Taylor & Francis Group, Bristol.
- Fossen, T. I. (2002). *Marine Control Systems: Guidance, Navigation, and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*, Marine Cybernetics, Trondheim, Norway.
- Hermann, R. e Krener, A. (1977). Nonlinear Controllability and Observability, *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(51): 728–740.
- Lide, D. R. (2005). *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 84 edn, CRC Press, Boca Raton.
- Liu, C., Zou, Z. e Yin, J. (2015). Trajectory tracking of underactuated surface vessels based on neural network and hierarchical sliding mode, *Journal of Marine Science and Technology* **20**(2): 322–330.
- Mason, M. T. (1986). Mechanics and planning of manipulator pushing operations, *The International Journal of Robotics Research* **5**(3): 53–71.
- Rosario, R. V. C. (2017). *Controle a Estrutura Variável de um Barco Empurrando uma Carga Flutuante Subatuada*, Mestrado em Engenharia Eletrônica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
- Rosario, R. V. C. e Cunha, J. P. V. S. (2016). Experimentos de rastreamento de trajetória de uma embarcação de superfície utilizando linearização por realimentação e controle a estrutura variável, *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática*, Vitória – ES, pp. 3034–3039.
- Slotine, J.-J. E. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Spong, M. W. (1994). Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems, *Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vol. 1, Munich, pp. 314–321.
- Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*, 4 edn, Thomson Learning.
- Utkin, V. I. (1978). *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems Hardcover*, MIR, Moscou.
- Vidal, P. V. N. M. (2016). *Controle de Sistemas Incertos Baseado no Algoritmo Super-Twisting para Rastreamento Global e Exato de Trajetórias*, Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Yang, Y., Du, J., Liu, H., Guo, C. e Abraham, A. (2014). A trajectory tracking robust controller of surface vessels with disturbance uncertainties, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **22**(4): 1511–1518.
- Young, K. D., Utkin, V. I. e Özgüner, U. (1999). A control engineer’s guide to sliding mode control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **7**(3): 328–342.