

# CONTROLE DE VANT DE ASA FIXA COM CAMPOS VETORIAIS ARBITRÁRIOS

ADRIANO M. C. REZENDE\*, VINICIUS M. GONÇALVES\*, GUILHERME V. RAFFO\*, LUCIANO C. A. PIMENTA\*

\*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Emails: adrianomcr18@gmail.com, mariano@cpdee.ufmg.br, raffo@ufmg.br,  
lucpim@cpdee.ufmg.br

**Abstract**— This work addresses the problem of controlling a fixed-wing UAV (Unmanned Aerial Vehicle), subject to uncertainties, to converge to planar curves and follow them. Vector fields are used as reference to the controller. Considering a reference model with input constraints, asymptotic convergence proofs are presented with basis on Lyapunov Theory, being encountered limiting sets when uncertainties are present. Singularities of the vector field are treated with a switch in the control law, in a way that convergence is ensured. Simulations based on a realistic model with 6 DOF and 12 states show the efficiency of our strategy.

**Keywords**— Fixed wing UAV, vector fields, nonlinear control, path tracking.

**Resumo**— Este trabalho aborda o problema de controle de um VANT (Veículo Aéreo Não Tripulado) de asa fixa, sujeito a incertezas, de forma a convergir para curvas planares e segui-las. Campos vetoriais são utilizados como referência para o controle. Considerando um modelo de referência com restrições nas entradas, provas de convergência assintótica são apresentadas com base na Teoria de Lyapunov, sendo encontrados conjuntos limitantes quando incertezas estão presentes. Singularidades do campo vetorial são tratadas com um chaveamento da lei de controle, de forma que a convergência é assegurada. Simulações baseadas em um modelo realístico com 6 graus de liberdade e 12 estados mostram a eficiência de nossa estratégia.

**Palavras-chave**— VANT de asa fixa, campos vetoriais, controle não linear, seguimento de caminho.

## 1 Introdução

Atualmente, VANTs podem ser utilizados com diversas finalidades nos campos civil e militar. Em particular, os VANTs de asa fixa, podem ser utilizados em tarefas de cobertura, monitoramento, proteção, entre outras. O presente trabalho propõe uma estratégia de guiagem destas aeronaves.

Em (Sujit et al., 2014) é apresentada uma pesquisa de diversas técnicas de controle de VANTs de asa fixa. Abordagens comuns são *line-of-sight* (LOS) (Ambrosino et al., 2009) e *nonlinear guidance laws* (NLGL) (Park et al., 2007). Estas se baseiam em um ponto alvo virtual que guia o VANT para o caminho desejado. Outra abordagem comum considera *guidance vector fields* (GVF) (Nelson et al., 2007) juntamente a uma lei de controle para fazer o avião convergir para uma linha integral de um campo vetorial. Neste trabalho nós utilizamos um GVF para fazer um VANT convergir para uma curva planar genérica.

Métodos baseados em GVF consideram normalmente apenas linhas retas e círculos. Em (Lawrence et al., 2007), leis GVF, inicialmente desenvolvidas para círculos, são estendidas para curvas mais gerais através de transformações covariantes. Já em (Kapitanyuk et al., 2017), as leis de controle são diretamente desenvolvidas para curvas genéricas. O controlador que eles desenvolvem é similar ao nosso, ao passo que a convergência para a curva é obtida alinhando o ângulo de guinada do VANT com o campo vetorial. Eles

apontam dificuldades para provar formalmente a convergência para a curva, dado que o erro de orientação do VANT é estabilizado assintoticamente. Neste trabalho nós apresentamos uma prova formal de convergência para curvas genéricas planares.

Em (Jesus et al., 2013) um modelo simplificado, não holonômico, é considerado para provar a convergência para um círculo. Controladores de baixo nível são utilizados para impor a dinâmica desejada ao VANT real. Em (Olavo et al., 2018) o trabalho é estendido com a consideração de incertezas no modelo, relativas a erros de modelagem e/ou perturbações externas. Na presença de incertezas, o VANT converge para uma faixa no entorno do círculo alvo. O presente trabalho estende o resultado de (Olavo et al., 2018) ao considerar incertezas para curvas gerais.

Os controladores desenvolvidos aqui podem ser aplicados a qualquer campo vetorial em duas dimensões. A análise desenvolvida se concentra nos campos propostos em (Gonçalves et al., 2010). Esta estratégia considera que um campo em duas dimensões converge para a curva de nível de uma função escalar.

O presente trabalho incorpora a maioria dos aspectos tratados na literatura de GVF planares, relembrando: curvas genéricas; e consideração de incertezas. Também são tratados formalmente problemas de singularidades nos campos vetoriais. Ademais, provamos um teorema que garante convergência mesmo quando chaveamos a lei de

controle nas proximidades de uma singularidade.

O artigo está organizado da seguinte forma: Na próxima seção o problema de controle é formalmente definido. Na Seção 3 a estratégia de campo vetorial proposta em (Gonçalves et al., 2010) é revisada. A lei de controle é desenvolvida na Seção 4. Na Seção 5 apresentamos a estratégia para tratar as singularidades. Simulações realísticas são mostradas na Seção 6 e conclusões e trabalhos futuros são apresentados na Seção 7.

## 2 Definição do problema

O problema tratado neste trabalho consiste no projeto de uma lei de controle para um VANT de asa fixa de forma que este convirja e percorra uma curva com determinado sentido. Consideramos que esta curva,  $\mathcal{C}$ , é tal que as linhas integrais de um campo vetorial, definido no  $\mathbb{R}^2$ , convergem para  $\mathcal{C}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Este campo vetorial deve servir de referência para o controlador. Assim como em (Jesus et al., 2013) e em (Olavo et al., 2018), um modelo de referência para o VANT de asa fixa é considerado. Este modelo simplificado é válido uma vez que é utilizado em cascata com um controlador de baixo nível. O modelo é descrito por

$$\dot{x} = v \cos(\theta), \quad (1a)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta), \quad (1b)$$

$$\dot{z} = \tau_z^{-1}(-z + z_c) + u_z, \quad (1c)$$

$$\dot{\theta} = \tau_\theta^{-1}(-\theta + \theta_c) + u_\theta, \quad (1d)$$

$$\dot{v} = \tau_v^{-1}(-v + v_c) + u_v, \quad (1e)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas Cartesianas do centro de massa do VANT,  $\theta$  é o ângulo de guinada, e  $v$  é a velocidade de translação no plano  $xy$  em relação à atmosfera. As entradas de controle são  $z_c$ ,  $\theta_c$  e  $v_c$ . As constantes de tempo, todas positivas, associadas a  $z$ ,  $\theta$  e  $v$  são  $\tau_z$ ,  $\tau_\theta$  e  $\tau_v$ , respectivamente. Os termos  $u_z$ ,  $u_\theta$  e  $u_v$  são incertezas aditivas com módulo limitado por  $U_z$ ,  $U_\theta$  e  $U_v$ , respectivamente, isto é

$$|u_z| \leq U_z, \quad |u_\theta| \leq U_\theta, \quad |u_v| \leq U_v. \quad (2)$$

Incertezas podem ser associadas a características da aeronave não incorporadas pelo modelo de referência simplificado (1) ou a erros de medição e atuação. Ademais, são adicionadas as seguintes restrições ao modelo (1)

$$|z_c - z| \leq \tau_z v_z^{max}, \quad (3a)$$

$$|\theta_c - \theta| \leq \tau_\theta \omega^{max}, \quad (3b)$$

$$v^{min} \leq v_c \leq v^{max}, \quad (3c)$$

onde  $v_z^{max}$  é a velocidade vertical máxima,  $\omega^{max}$  é a taxa máxima de giro, e  $v^{min} > 0$  e  $v^{max}$  são as velocidades de translação mínima e máxima. Note que  $v^{min} > 0$  representa a necessidade do avião manter sua sustentação aerodinâmica.

Apesar do modelo (1) ser uma representação bastante simplificada da aeronave, as restrições (3) fazem este ser uma boa aproximação da dinâmica do VANT. Em (Olavo et al., 2018) simulações mostram a precisão deste modelo. Deve-se

ressaltar que controladores de baixo nível são utilizados para garantir o comportamento dinâmico dado pelo modelo (1). Finalmente, o problema tratado neste trabalho pode ser definido como:

**Problema 1** *Projetar um conjunto de leis de controle, para  $z_c$ ,  $\theta_c$  e  $v_c$ , que obedeça as restrições de atuação (3) e faça o VANT de asa fixa descrito por (1), sujeito às incertezas limitadas (2), convergir e seguir uma linha integral de um campo vetorial.*

## 3 Campo vetorial

As leis de controle que serão desenvolvidas na próxima Seção podem ser aplicadas a qualquer campo vetorial suave. No entanto, a maior parte de nossa análise (Seção (4.4)) é baseada na estrutura de campo vetorial proposta em (Gonçalves et al., 2010). Lá os autores desenvolvem uma estratégia para a geração de campos que convergem para curvas em  $n$  dimensões e as circulam. Neste trabalho serão consideradas apenas curvas planares. Seja  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  uma coordenada para o espaço de duas dimensões. Neste caso, a estratégia considera que a curva  $\mathcal{C}$  é definida implicitamente por uma curva de nível zero de uma função escalar  $\alpha$ , isto é,  $\alpha(\mathbf{p}) = 0$ . Seja  $\Phi(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial. Neste trabalho,  $\Phi(\mathbf{p})$  é definido da seguinte forma

$$\Phi(\mathbf{p}) = -G\nabla P + R\nabla\alpha, \quad (4)$$

onde  $R \in SO(2)$  é uma matriz de rotação de  $90^\circ$ ,  $G$  é uma constante estritamente positiva, e o operador  $\nabla$  representa o gradiente em relação a  $\mathbf{p}$ . A função  $P \equiv P(\alpha) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  representa a distância à curva. Assim,  $P(\mathbf{p}) \equiv P(\alpha(\mathbf{p})) = 0 \iff \mathbf{p} \in \mathcal{C}$ . Neste trabalho será considerado  $P = (1/2)\alpha^2$ . Para a continuidade de  $\Phi$  é necessário assumir que  $\alpha$  é de classe  $C^1$ . No entanto, para a continuidade do nosso controlador, assumimos que  $\alpha$  é de classe  $C^2$ . Assume-se também que  $\nabla\alpha(\mathbf{p}) \neq 0 \forall \mathbf{p} \in \mathcal{C}$ .

A Figura 1 é uma representação gráfica da estratégia de campo vetorial. A curva em vermelho indica a curva de nível zero da função  $\alpha(x, y) = a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 - 1$ . Em azul pode-se observar o campo vetorial normalizado, que converge para a curva em preto e a circula.

As componentes do campo (4) podem ser interpretadas como uma componente convergente  $\Phi_c = -G\nabla P$  e uma componente tangente de circulação  $\Phi_t = R\nabla\alpha$ . Para mais detalhes sobre a construção destes campos vetoriais, ver (Gonçalves et al., 2010). A seguir duas propriedades destes campos são lembradas.

**Propriedade 1** *Para todo ponto não singular, isto é,  $\|\nabla\alpha\| \neq 0$ , as componentes convergente ( $\Phi_c$ ) e tangente ( $\Phi_t$ ) são perpendiculares entre si, ou seja,  $\Phi_c \perp \Phi_t$ . Isso pode ser concluído observando-se que  $\nabla P = \alpha\nabla\alpha \parallel \nabla\alpha \perp R\nabla\alpha$ .*

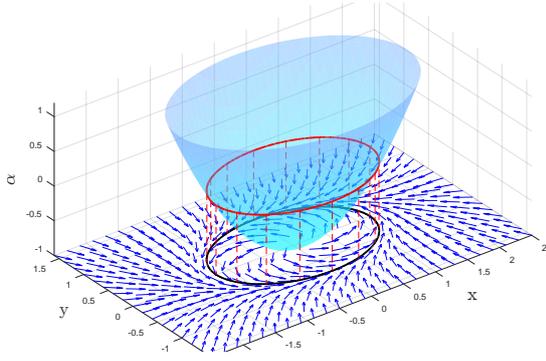


Figura 1: Estratégia de campo vetorial no  $\mathbb{R}^2$ .

**Propriedade 2** Considerando uma dinâmica de integrador simples, isto é,  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{\Phi}$ , e usando (4) observa-se que  $P$  é uma função de Lyapunov com  $\dot{P} = \nabla P^T \mathbf{\Phi} = -G \|\nabla P\|^2 \leq 0$ . Note que, pela Propriedade 1,  $\nabla P \perp R \nabla \alpha$  implicando  $\nabla P^T R \nabla \alpha = 0$ .

Durante o desenvolvimento dos controladores, será utilizado o campo normalizado  $\hat{\mathbf{\Phi}}$ . Desta maneira, formalmente definimos

$$\hat{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{p}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}) \|\mathbf{\Phi}(\mathbf{p})\|^{-1}. \quad (5)$$

## 4 Controle

A ideia chave para controlar um VANT de asa fixa consiste em orientar o ângulo de guinada  $\theta$  do modelo (1) com a orientação dos vetores do campo. Intuitivamente, se isto for feito, a direção indicada pelo campo vetorial estará respeitando a restrição não holonômica do VANT, que convergirá para  $\mathcal{C}$ .

### 4.1 Controle de guinada

Considere  $\theta_f(\mathbf{p})$  como sendo a orientação do vetor  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p})$ . Matematicamente,  $\theta_f \equiv \text{atan2}(\Phi_y, \Phi_x)$ , onde  $\text{atan2}$  é a função arco tangente em quatro quadrantes, e  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  são as componentes do campo em  $x$  e  $y$ , respectivamente. Tal definição nos permite calcular o erro de orientação do robô como  $\bar{\theta} \equiv \bar{\theta}(\mathbf{p}, \theta) = \theta_f - \theta$ . Sendo  $\omega(t) \equiv \dot{\theta}(t)$ , e  $k_p > 0$ , considere a seguinte lei de controle

$$\omega(t) = \dot{\theta}_f + k_p \sin(\bar{\theta}). \quad (6)$$

Com a finalidade de provar que a lei (6) leva à estabilidade de  $\bar{\theta}$  na origem considere a função candidata a Lyapunov

$$V_\theta = 1 - \cos(\bar{\theta}), \quad -\pi < \bar{\theta} < \pi. \quad (7)$$

Note que  $V_\theta(0) = 0$  e  $V_\theta(\bar{\theta}) > 0 \forall \bar{\theta} \neq 0$ . Considere por enquanto o caso ideal  $u_\theta = 0$ . Derivando  $V_\theta$  no tempo, obtemos

$$\dot{V}_\theta = \sin(\bar{\theta}) \dot{\bar{\theta}} = \sin(\bar{\theta}) (\dot{\theta}_f - \omega). \quad (8)$$

Substituindo a lei de controle (6) em (8), obtemos

$$\dot{V}_\theta = -k_p \sin(\bar{\theta})^2 \leq 0. \quad (9)$$

Então  $V_\theta$  é de fato uma função de Lyapunov e garante que  $\bar{\theta} \rightarrow 0$ . O fato de que a convergência assintótica de  $\bar{\theta}$  leva à convergência de  $\mathbf{p}$  para a curva será provado formalmente na Seção 4.4.

Agora, para utilizarmos (6), é necessário calcular  $\dot{\theta}_f$ . Considere o seguinte teorema.

**Teorema 1** Considere um campo vetorial  $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de forma que  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}) = [\Phi_x(\mathbf{p}) \ \Phi_y(\mathbf{p})]$ , com  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  diferenciáveis em  $\mathbf{p}$ . Considere também uma trajetória  $\mathbf{p}(t) = [x(t) \ y(t)] \in \mathbb{R}^2$  cujo vetor tangente tem a orientação  $\theta = \text{atan2}(\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ . Assumindo  $\Phi_x(t) = \Phi_x(\mathbf{p}(t))$  e  $\Phi_y(t) = \Phi_y(\mathbf{p}(t))$ , a derivada no tempo da função  $\theta_f(t) = \text{atan2}(\Phi_y(t), \Phi_x(t))$  na trajetória  $\mathbf{p}(t)$  é

$$\dot{\theta}_f = v(t) \cos(\bar{\theta}) \nabla \wedge \hat{\mathbf{\Phi}} - v(t) \sin(\bar{\theta}) \nabla \cdot \hat{\mathbf{\Phi}}, \quad (10)$$

onde  $\bar{\theta} = \theta_f - \theta$ ,  $\hat{\mathbf{\Phi}}$  é o campo normalizado (5),  $v(t) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-0.5}$ ,  $\nabla = [\partial/\partial x \ \partial/\partial y]^T$  é o operador nabla,  $\wedge$  é o produto de cunha e  $\cdot$  o produto escalar.

**Prova:** Primeiramente, note que  $\theta_f$  pode ser calculado tanto a partir de  $\mathbf{\Phi}$  quanto de  $\hat{\mathbf{\Phi}}$ . Consequentemente,  $\dot{\theta}_f$  pode ser calculado como

$$\dot{\theta}_f = \frac{d}{dt} \text{atan} \left( \frac{\hat{\Phi}_y}{\hat{\Phi}_x} \right) = \frac{\dot{\hat{\Phi}}_y \hat{\Phi}_x - \hat{\Phi}_y \dot{\hat{\Phi}}_x}{\hat{\Phi}_x^2 + \hat{\Phi}_y^2}. \quad (11)$$

De (5) temos que  $\hat{\Phi}_x^2 + \hat{\Phi}_y^2 = \|\hat{\mathbf{\Phi}}\|^2 = 1$ . Usando este fato e expandindo as derivadas em (11), temos

$$\dot{\theta}_f = \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial x} \dot{x} \hat{\Phi}_x + \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial y} \dot{y} \hat{\Phi}_x - \frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial x} \dot{x} \hat{\Phi}_y - \frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial y} \dot{y} \hat{\Phi}_y. \quad (12)$$

Note que  $\dot{x} = v(t) \cos(\theta)$ ,  $\dot{y} = v(t) \sin(\theta)$ ,  $\hat{\Phi}_x = \cos(\theta_f)$ ,  $\hat{\Phi}_y = \sin(\theta_f)$ . Usando estas relações em (12), lembrando que  $\bar{\theta} = \theta_f - \theta$  e usando propriedades trigonométricas simples, obtemos.

$$\dot{\theta}_f = v(t) \cos(\bar{\theta}) \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial y} \right) - v(t) \sin(\bar{\theta}) \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\Phi}_y}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Conclui-se a prova ao se identificar  $\nabla \wedge \hat{\mathbf{\Phi}}$  e  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{\Phi}}$  nos termos com o cosseno e seno, respectivamente.  $\square$

O Teorema 1 estabelece uma forma geral para o cômputo de  $\dot{\theta}_f$  para campos vetoriais no  $\mathbb{R}^2$ . Este resultado nos possibilita calcular (6). Note que  $\nabla \wedge \hat{\mathbf{\Phi}}$  é o “rotacional em duas dimensões” de  $\hat{\mathbf{\Phi}}$  (componente em  $z$  do rotacional de  $[\hat{\Phi}_x \ \hat{\Phi}_y \ 0]$ ) e que  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{\Phi}}$  é o divergente de  $\hat{\mathbf{\Phi}}$ . Note também que quando  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\omega = \dot{\theta}_f = v(t) \nabla \wedge \hat{\mathbf{\Phi}}$ . De fato, pode-se provar que a curvatura  $\kappa$  (note que  $\kappa$  pode ser calculada como  $\kappa = \omega/v$ ) da linha integral de um campo vetorial normalizado em  $\mathbb{R}^2$  que passa pelo ponto  $\mathbf{p}$  é dada pelo “rotacional”  $\nabla \wedge \hat{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{p})$ .

Vamos agora estabelecer limites para a lei  $\omega(t)$  dado valores máximos das derivadas do campo vetorial normalizado. Considere um  $M > 0$  tal que  $|\nabla \wedge \mathbf{\Phi}(\mathbf{p})| \leq M$ ,  $|\nabla \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{p})| \leq M \forall \mathbf{p}$ . Usando desigualdade triangular após substituir (10) em (6), obtemos

$$|\omega| \leq v_{max} |\cos(\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})| M + k_p |\sin(\bar{\theta})|, \quad (14)$$

onde  $v_{max}$  é a máxima velocidade que o VANT pode alcançar. A máxima norma da diferença entre as funções trigonométricas é  $\sqrt{2}$ . Assim, de forma conservadora, podemos escrever

$$|\omega| \leq v_{max} \sqrt{2} M + k_p. \quad (15)$$

Note que  $\sqrt{2} M v_{max} > 0$ . Impondo que o lado direito de (15) seja menor do que  $\omega^{max}$ , uma condição suficiente que garante a restrição (3b) é

$$0 < \frac{\sqrt{2} M v_{max}}{\omega^{max} - k_p} \leq 1. \quad (16)$$

Note que é necessário  $k_p < \omega^{max}$ , caso contrário é impossível respeitar (16), o que significa que a parcela  $k_p \sin(\bar{\theta})$  de (6) sozinha já pode violar (3b). O resultado (16) requer limites máximos para as derivadas de  $\mathbf{\Phi}$ . É impossível respeitar (16) para pontos próximos à uma possível singularidade do campo. Neste contexto, na Seção 5 mostramos uma estratégia para tratar estas regiões.

Finalmente, a partir de (1d) e (6), podemos definir a lei de controle para  $\theta_c$  como:

$$\theta_c = \tau_\theta \dot{\theta}_f + \tau_\theta k_p \sin(\bar{\theta}) + \theta. \quad (17)$$

#### 4.2 Controle de velocidade

Dado que a lei de controle  $\omega(t)$  considera  $v(t)$ , qualquer perfil de velocidade pode ser atribuído ao VANT. No entanto, por simplicidade escolhamos uma velocidade de referência constante  $v(t) = v_{ref}$ . Como o sistema (1e) já é estável, definimos

$$v_c = v_{ref}, \quad v^{min} \leq v_{ref} \leq v^{max}. \quad (18)$$

#### 4.3 Controle de altitude

Nossa estratégia considera curvas planares, isto é, com altitude fixa. Desta forma, definimos  $z_c$  como

$$z_c = z_{ref}. \quad (19)$$

#### 4.4 Análise de perturbação

Se considerarmos a incerteza  $u_\theta$  e assumirmos a lei de controle (6) vemos que a função  $\dot{V}_\theta$  se torna

$$\dot{V}_\theta = -k_p \sin(\bar{\theta})^2 + \sin(\bar{\theta}) u_\theta. \quad (20)$$

Assumindo o valor máximo  $|u_\theta| = U_\theta$  e aplicando a desigualdade triangular em (20), obtemos

$$\dot{V}_\theta \leq |\sin(\bar{\theta})| (-k_p |\sin(\bar{\theta})| + |U_\theta|). \quad (21)$$

Considere  $\gamma = \text{asin}(U_\theta k_p^{-1}) < \pi/2$ . De (21) vemos que para um infinitesimal  $\epsilon > 0$  temos que  $|\bar{\theta}| =$

$\gamma + \epsilon \implies \dot{V}_\theta < 0$ . Assim, podemos definir o seguinte conjunto invariante para  $\bar{\theta}$

$$\mathcal{S}_\theta = \{\bar{\theta} \in \mathbb{S}^1 \mid |\bar{\theta}| \leq \gamma\}. \quad (22)$$

Note que para  $\mathcal{S}_\theta$  ser limitado é necessário que  $k_p > U_\theta$ . Caso contrário  $\gamma$  não é definido nos reais e  $\mathcal{S}_\theta = \mathbb{S}^1$ . Note também que se  $\pi - |\theta| < \gamma$ ,  $\dot{V}_\theta$  pode ser positiva, no entanto, esta condição é instável. Formalmente, pode-se garantir convergência para toda condição inicial  $|\bar{\theta}(0)| < \pi - \gamma$ , apesar de ela acontecer em todos os casos práticos.

Agora, usando a função  $V = (1/2)(v_{ref} - v)^2$  e a equação (1e), pode-se estabelecer o seguinte limitante superior para o erro de velocidade

$$\mathcal{S}_v = \{v \in \mathbb{R} \mid |v_{ref} - v| \leq \tau_v U_v\}. \quad (23)$$

Note que se a medição de  $v$  for correta, o erro  $\bar{\theta}$  é desacoplado do erro  $(v_{ref} - v)$ , uma vez que a lei  $\omega(t)$  incorpora  $v(t)$ . Note também que (23) implica em  $v_{max} = v_{ref} + \tau_v U_v$ , veja (16).

Similarmente, usando a função  $V = (1/2)(z_{ref} - z)^2$  e a equação (1c), concluímos

$$\mathcal{S}_z = \{z \in \mathbb{R} \mid |z_{ref} - z| \leq \tau_z U_z\}. \quad (24)$$

O conjunto  $\mathcal{S}_\theta$  estabelece um limite para o erro de orientação  $\bar{\theta}$  em regime permanente. No entanto, ainda é necessário analisar se este limitante em  $\bar{\theta}$  implica em um limite da função  $P$ , ou seja, uma distância máxima da curva alvo.

No caso em que  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\dot{\mathbf{p}} \parallel \mathbf{\Phi}$ . Nesta situação ideal, a Propriedade 2 garante  $\dot{P} \leq 0$ . No entanto, se  $\gamma > 0$  então  $\dot{\mathbf{p}} \not\parallel \mathbf{\Phi}$ . Note que se  $P = (1/2)\alpha^2$  então  $\nabla P = \alpha \nabla \alpha$  e  $\dot{P} = \nabla P^T \dot{\mathbf{p}} = \alpha \nabla \alpha^T \dot{\mathbf{p}}$ . Com a finalidade de analisar  $\dot{P}$  nesta situação note que o vetor  $\dot{\mathbf{p}}$  pode ser escrito da forma

$$\dot{\mathbf{p}} = v \begin{bmatrix} \cos(\theta_f - \bar{\theta}) \\ \sin(\theta_f - \bar{\theta}) \end{bmatrix} = v H \hat{\mathbf{\Phi}} = v H \frac{\mathbf{\Phi}}{\|\mathbf{\Phi}\|}, \quad (25)$$

onde  $H$  é a matriz de rotação

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\bar{\theta}) & \sin(\bar{\theta}) \\ -\sin(\bar{\theta}) & \cos(\bar{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Considere  $D = v \|\mathbf{\Phi}\|^{-1}$  e note que  $D > 0$ . Substituindo (25) e (4) em  $\dot{P} = \alpha \nabla \alpha^T \dot{\mathbf{p}}$ , obtemos

$$\dot{P} = D \alpha \left( -\alpha G \nabla \alpha^T H \nabla \alpha + \nabla \alpha^T H R \nabla \alpha \right). \quad (27)$$

Note que  $H \nabla \alpha$  é o vetor  $\nabla \alpha$  rotacionado de  $\bar{\theta}$ . Assim, o produto  $\nabla \alpha^T H \nabla \alpha = \cos(\bar{\theta}) \|\nabla \alpha\|^2$ . Note também que  $HR$  é uma matriz de rotação de  $\pi/2 - \bar{\theta}$ , e por consequência  $\nabla \alpha^T H R \nabla \alpha = \cos(\pi/2 - \bar{\theta}) \|\nabla \alpha\|^2 = \sin(\bar{\theta}) \|\nabla \alpha\|^2$ . Usando estas observações em (27), temos

$$\dot{P} = D \|\nabla \alpha\|^2 \alpha (-\alpha G \cos(\bar{\theta}) + \sin(\bar{\theta})). \quad (28)$$

Se  $|\bar{\theta}| < \pi/2$ , observe que tanto para  $\alpha > 0$  quanto para  $\alpha < 0$  temos que  $|\alpha| > G^{-1} \tan(\bar{\theta}) \implies \dot{P} < 0$ . Relembre que  $\gamma$  é o limitante superior de  $\bar{\theta}$ , isto é,  $|\bar{\theta}| \leq \gamma < \pi/2$  em regime permanente.

Assim, dada a convergência de  $\bar{\theta}$ , podemos definir o seguinte conjunto invariante para a função  $\alpha$ .

$$\mathcal{S}_\alpha = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid |\alpha(\mathbf{p})| \leq G^{-1} \tan(\gamma)\}, \quad (29)$$

que implica no seguinte conjunto invariante

$$\mathcal{S}_P = \{P \in \mathbb{R}^+ \mid P \leq (1/2)G^{-2} \tan(\gamma)^2\}. \quad (30)$$

O resultado em (29) é interessante, ao passo que estabelece limites para o erro de posição como curvas de nível da função  $\alpha$ . Agora, note que se  $U_\theta = 0$ , então  $\gamma = 0$  e  $|\bar{\theta}| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Neste caso, o conjunto  $\mathcal{S}_\alpha$  colapsa para a curva alvo, isto é,  $\mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}$  quando  $\gamma \rightarrow 0$ . Assim, está provada a afirmação feita na Seção 4.1, isto é,  $\bar{\theta} \rightarrow 0 \implies \mathbf{p}(\infty) \in \mathcal{C}$ .

## 5 Tratamento de singularidade

Uma vez que a função  $\alpha$  é contínua e suave, o campo vetorial (4) é contínuo. No entanto, o campo normalizado (5) admite singularidades nos pontos fixos de  $\Phi$ . Para o caso de curvas fechadas, a existência destes pontos no interior da curva é garantida pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Khamsi and Kirk, 2011). Os valores do rotacional e do divergente em (10) podem tender ao infinito nas proximidades desta singularidade, tornando impossível respeitar (16).

Para tratar este problema, propomos definir  $\omega(t) = 0$  quando o VANT estiver dentro de uma bola  $\mathcal{B}_\rho = \{\mathbf{p} \mid \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_s\| \leq \rho\}$ , onde  $\mathbf{p}_s$  é o ponto de singularidade e  $\rho$  o raio da bola. Assim o avião percorrerá uma trajetória retilínea dentro de  $\mathcal{B}_\rho$ .

Para a visualização das definições a seguir considere a Figura 2. Seja  $\beta \in \mathbb{S}^1$  uma coordenada angular para a fronteira da bola  $\mathcal{B}_\rho$  definida como  $\bar{\mathcal{B}}_\rho$ . Considere a função  $\phi(\beta) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  que associa um ângulo a cada  $\beta$ . Esta função  $\phi$  deve ser interpretada como a orientação  $\theta_f$  no ponto  $\mathbf{p}$  equivalente à coordenada  $\beta$ . Definimos também a função  $\delta(\beta) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , em que  $\delta(\beta) = \phi(\beta) - \beta$ . Sejam  $\beta_1$  e  $\beta_2$  coordenadas relativas à interseção de uma linha reta com  $\bar{\mathcal{B}}_\rho$ . Esta reta representa a trajetória retilínea do VANT dentro de  $\mathcal{B}_\rho$ . Considere que esta reta é paralela ao vetor  $[\cos(\theta) \sin(\theta)]$ , e que a interseção ocorre nos instantes  $t_1$  e  $t_2 > t_1$ .

Uma vez que  $\omega(t) = 0$  quando  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}_\rho$ , é evidente que não se pode garantir  $\dot{V}_\theta \leq 0$ . No entanto, o teorema a seguir define condições suficientes para garantir que a função  $V_\theta$  no instante  $t_2$  seja menor que a função no instante  $t_1$ , ou seja, o erro de orientação decresce ao atravessar  $\mathcal{B}_\rho$ .

**Teorema 2** *Considere que  $V_\theta(t_i)$  é o valor da função  $1 - \cos(\phi(\beta_i) - \theta)$  nas interseções da linha reta com  $\bar{\mathcal{B}}_\rho$  em  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Se as seguintes condições forem respeitadas*

$$\frac{d^* \phi}{d\beta}(\beta) > 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{S}^1, \quad (31a)$$

$$\cos(\delta(\beta)) > 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{S}^1, \quad (31b)$$

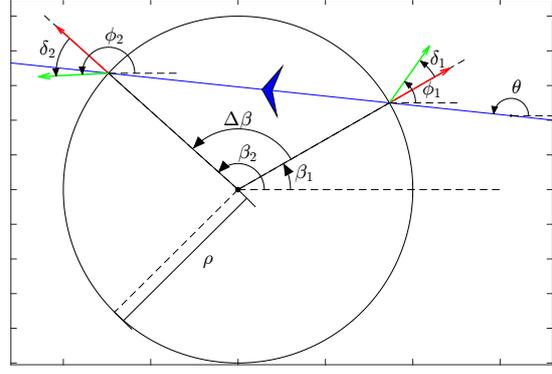


Figura 2: Ilustração das definições relacionadas ao tratamento das singularidades. Os vetores em vermelho têm orientação  $\beta$  e os em verde orientação  $\phi$ . A reta em azul tem orientação  $\theta$ .

então

$$V_\theta(t_2) - V_\theta(t_1) < 0, \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{S}^1, \quad (32)$$

onde a derivada em (31a) é definida como

$$\frac{d^* \phi}{d\beta}(\beta) = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\sin(\phi(\beta + \Delta\beta) - \phi(\beta))}{\Delta\beta}. \quad (33)$$

**Prova:** Primeiramente, note que a definição (33) é apenas uma formalização da derivada de  $\phi(\beta)$  em relação a  $\beta$ . Lembre que  $\sin(x) \rightarrow x$  quando  $x \rightarrow 0$ .

Considere a função variação  $\Delta V_\theta = V_\theta(t_2) - V_\theta(t_1)$ . Então  $\Delta V_\theta = \cos(\phi(\beta_1) - \theta) - \cos(\phi(\beta_2) - \theta)$ . Sem perda de generalidade considere que o ângulo  $\beta_2$  é escrito como

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = \beta_1 + \int_{\beta_1}^{\beta_1 + \Delta\beta} d\beta, \quad (34)$$

onde  $\Delta\beta \in [0, 2\pi]$  é o ângulo que vai de  $\beta_1$  até  $\beta_2$  seguindo o sentido anti-horário. A definição integral serve apenas para evitar deslocamentos de  $2\pi$  entre  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Para simplificar a notação considere  $\phi_i = \phi(\beta_i)$  e  $\delta_i = \delta(\beta_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Escrevendo  $\Delta V_\theta$  em termos de  $\delta_i$ , usando  $\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta$  e requerendo  $\Delta V_\theta < 0$ , temos que garantir

$$\Delta V_\theta = \cos(\delta_1 + \beta_1 - \theta) - \cos(\delta_2 + \beta_1 + \Delta\beta - \theta) < 0. \quad (35)$$

Usando  $\Delta\beta \in [0, 2\pi]$  de acordo com (34), “ $\beta_2 > \beta_1$  informalmente”, uma análise trigonométrica na Figura 2 permite concluir

$$\beta_1 - \theta = -(\Delta\beta + \pi)/2. \quad (36)$$

Substituindo (36) em (35) e usando algumas propriedades trigonométricas, temos

$$\sin\left(\delta_1 - \frac{\Delta\beta}{2}\right) - \sin\left(\delta_2 + \frac{\Delta\beta}{2}\right) < 0. \quad (37)$$

Usando a propriedade trigonométrica dada por  $\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos((A+B)/2) \sin((A-B)/2)$  com  $A = \delta_1 - \Delta\beta/2$  e  $B = \delta_2 + \Delta\beta/2$  e aplicando as relações  $\phi_i = \delta_i + \beta_i$  e  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$  temos

$$\cos\left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) > 0. \quad (38)$$

Note que a inequação foi dividida por  $-2$ . Se a condição (38) for respeitada, então  $\Delta V_\theta < 0$ . Agora vamos mostrar que (31) implica na veracidade de (38).

A condição (31b) implica que  $-\pi/2 < \delta_1, \delta_2 < \pi/2$ . Assim o cosseno em (38) é positivo. Nos resta verificar se o seno também é. Reescrevendo  $\phi_2$  como uma integral de  $\beta_1$  a  $\beta_2$  temos

$$\sin\left(\frac{1}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_1+\Delta\beta}\frac{d^*\phi}{d\beta}(\beta')d\beta'\right) > 0. \quad (39)$$

Se  $\Delta\beta = 0$  a integral em (39) é 0. Dada a condição (31b), se  $\Delta\beta = 2\pi$  a integral também vale  $2\pi$ , pois qualquer outro múltiplo de  $2\pi$  violaria (31b). A condição (31a) garante que a integral é uma função crescente de  $\Delta\beta$ . Assim, podemos concluir que a integral só assume valores entre 0 e  $2\pi$ , e por consequência o argumento do seno está entre 0 e  $\pi$ . Evidentemente o seno é positivo, o que conclui a prova.  $\square$

Note que o Teorema 2 não garante a existência de um  $\rho$  tal que suas condições sejam respeitadas. No entanto, se existe  $\rho > 0$ , temos que: 1) pelo VANT trafegar em linha reta dentro de  $\mathcal{B}_\rho$ ,  $t_2 < \infty$  sempre existe; 2) a média da derivada  $\dot{V}_\theta$  é sempre negativa para um intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1 < \infty$ . Assim, chavear a lei de controle em  $\mathcal{B}_\rho$  para garantir (16) não prejudica a convergência do VANT para a curva.

## 6 Resultados numéricos

Com a finalidade de demonstrar a operação do controlador desenvolvido serão apresentadas simulações com um modelo realístico de uma aeronave apresentado no Capítulo 2 de (Stevens et al., 2015). Utilizamos os parâmetros do avião Aerossone apresentado no Apêndice E.2 de (Beard and McLain, 2012). O modelo utilizado tem 6 graus de liberdade, 12 estados e distúrbios atmosféricos foram incorporados. Para simular uma situação realística também foram adicionados distúrbios aleatórios de medição e atuação. Foram utilizados os controladores de baixo nível considerados em (Olavo et al., 2018) para impor a dinâmica de referência (1).

Com base em (Olavo et al., 2018) definiu-se os seguintes valores para as constantes do modelo (1):  $v_z^{max} = 3m/s$ ,  $\omega^{max} = 0,5rad/s$ ,  $v^{min} = 18m/s$ ,  $v^{max} = 28m/s$ ,  $\tau_z = 20s$ ,  $\tau_\theta = 28s$ ,  $\tau_v = 20s$ . Em todos os experimentos consideramos os valores  $v_{ref} = 23m/s$  e  $z_{ref} = 200m$ . Os limites superiores das incertezas foram  $U_z = 0,3m/s$ ,  $U_\theta = 0,06rad/s$  e  $U_v = 0,2m/s^2$ .

Os distúrbios adicionais inseridos em  $\theta$  (medição) e em  $\theta_c$  (atuação) foram sinais aleatórios com banda limitada em faixa que chegavam a somar  $0,23rad$  ( $25^\circ$ ). O valor de  $U_\theta$  incorpora estes erros e também os erros do modelo. Erros de medição inseridos em  $x$  e em  $y$  somaram até  $15m$ .

A seguir mostramos um exemplo de uma curva fechada e de uma curva aberta. Disponibilizamos um vídeo que mostra simulações com curvas diferentes, e animações em [https://www.dropbox.com/s/5khq7dty7325fwz/ControleDeVANTs\\_CBA2018.mp4?dl=0](https://www.dropbox.com/s/5khq7dty7325fwz/ControleDeVANTs_CBA2018.mp4?dl=0).

### 6.1 Curva fechada

Consideramos uma curva fechada definida pela curva de nível zero da função  $\alpha(x, y) = ax^2 + bx^2y^2 + cy^2 - 1$ . Para valores de  $x$  e  $y$  em quilômetros, definimos  $a = 1,5$ ,  $b = 8$  e  $c = 2,5$ . Escolhemos  $G = 1,5$  e  $P = (1/2)\alpha^2$ . O ganho do controlador foi  $k_p = 0,18$ , note que  $U_\theta < k_p < \omega^{max}$ . Para tratar a singularidade em  $\mathbf{p}_s = [0 \ 0]$  definimos  $\rho = 0,2km$ .

A Figura 3 apresenta três trajetórias obtidas com diferentes condições iniciais  $[x(0) \ y(0) \ \theta(0)]$ :  $[-900m \ -600m \ \pi/2rad]$  (vermelha),  $[-200m \ 300m \ \pi/6rad]$  (verde) e  $[-250m \ 50m \ 0rad]$  (azul). A linha preta central é a curva  $\alpha = 0$  e as laterais representam os limitantes do erro de posição. Neste caso elas são definidas por  $|\alpha| = 0,236$ , de acordo com (29). O valor da razão em (16) foi de  $0,92 < 1$ , sendo o gargalo nas regiões ao redor das altas curvaturas nas partes leste e oeste da curva. Observe que no caso da trajetória azul o VANT cruzou o círculo no entorno da singularidade, onde trafegou em linha reta.

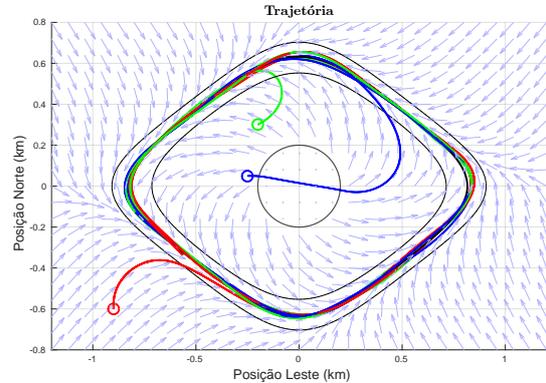


Figura 3: Três trajetórias da simulação com uma curva fechada.

Na Figura 4 estão as funções  $V_\theta$  e  $P$  relativas às trajetórias da Figura 3. As linhas pretas tracejadas representam os conjuntos invariantes correspondentes. As funções  $V_\theta$  em vermelho e verde são estritamente decrescentes até o alcance do conjunto invariante. No entanto, a função  $V_\theta$  em azul chegou a crescer no trecho tracejado em azul/amarelo, correspondente à passagem pela bola  $\mathcal{B}_\rho$ . Note que  $\Delta V_\theta$  foi negativo, em concordância com o Teorema 2. De fato as condições (31) foram respeitadas. Por outro lado, a função  $P$  pode crescer fora de seu conjunto invariante quanto o VANT ainda está desorientado. No entanto, depois do decaimento de  $V_\theta$ ,  $P$  também decai para o seu conjunto invariante (equação (30)). Na Figura 5 apresentamos uma análise do campo

vetorial na borda  $\bar{B}_\rho$ . Os gráficos na direita mostram a verificação das condições (31a) (em cima) e (31b) (embaixo).

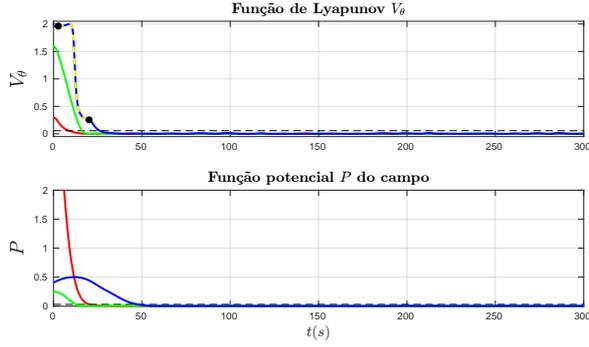


Figura 4: Funções  $V_\theta$  (em cima) e  $P$  (embaixo) relativas às trajetórias da Figura 3. A linha tracejada em azul/amarelo corresponde ao tempo em que o VANT passou no interior da bola  $B_\rho$ .

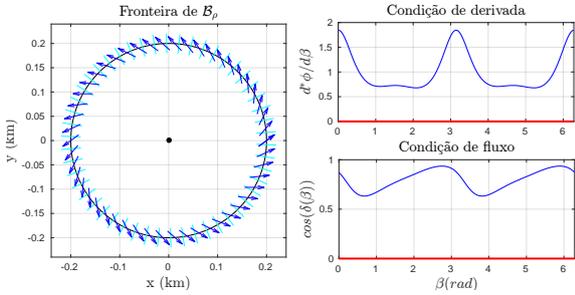


Figura 5: Na direita, vetores indicando a orientação  $\phi(\beta)$ . Na esquerda, de cima para baixo, análise das condições (31a) e (31b), respectivamente.

Com a finalidade de mostrar a validade do modelo de referência, a Figura 6 mostra alguns resultados para a trajetória vermelha da Figura 3. São apresentados os valores de  $z(t)$ ,  $v(t)$  e  $\Delta\omega \equiv (\omega(t) - \dot{\theta}^*(t))$  do modelo realístico, juntamente com os erros máximos estimados, onde  $\dot{\theta}^*$  é a derivada do ângulo de guinada do modelo realístico. Note que o erro  $\Delta\omega$  é elevado nos instantes em que o VANT está passando pelas curvas mais fechadas da curva alvo (ao leste e ao oeste). Isso se deve à dinâmica interna do modelo realístico, em que a velocidade de giro depende do ângulo de rolagem do avião.

## 6.2 Curva aberta

Consideramos também uma curva definida pela função  $\alpha(x, y) = h(x) - y$ , onde  $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Para valores de  $x$  e  $y$  em quilômetros definimos  $a = 0,85$ ,  $b = 0,08$ ,  $c = -0,13$  e  $d = -0,04$ . Escolhemos  $G = 3$  e a função  $P = (1/2)\alpha^2$ . Utilizamos o ganho  $k_p = 0,18$ . Novamente, note que  $U_\theta < k_p < \omega^{max}$ .

A Figura 7 apresenta três trajetórias obtidas com diferentes condições iniciais  $[x(0) \ y(0) \ \theta(0)]$ :  $[-800m \ -200m \ \pi/2rad]$  (vermelha),  $[-600m \ -100m \ -\pi/2rad]$  (verde) e

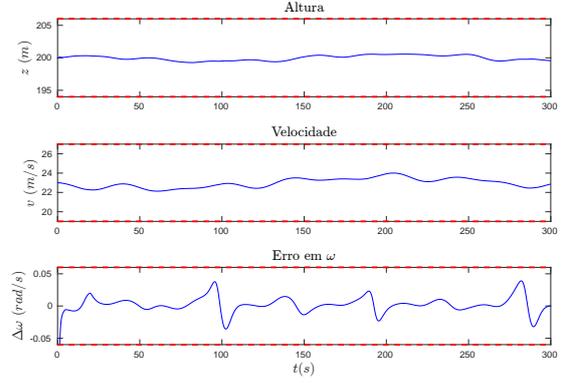


Figura 6: Sinais relativos à trajetória vermelha da Figura 3. De cima para baixo:  $z(t)$ ,  $v(t)$ , e  $\Delta\omega(t)$ , juntamente com os erros máximos estimados.

$[-800m \ -600m \ 3\pi/4rad]$  (azul). A linha preta central é a curva  $\alpha = 0$  e as laterais os limitantes do erro de posição de acordo com (29), ou seja,  $|\alpha| = 0,118$ . Note que, neste caso, este limite se mostrou bem conservador, uma vez que a curva alvo é bem suave. O valor da razão em (16) foi de  $0,87 < 1$ , indicando que o limite  $\omega^{max}$  jamais será desrespeitado.

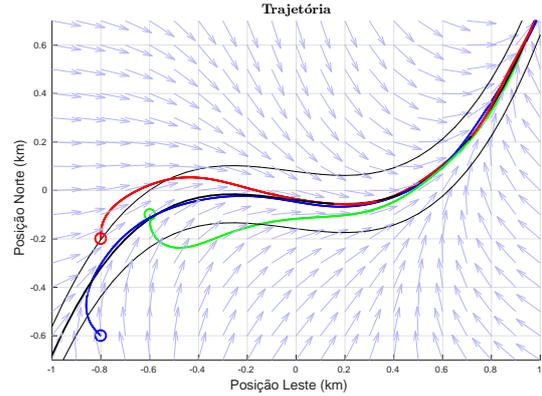


Figura 7: Três trajetórias da simulação da curva aberta.

A Figura 8 apresenta as funções  $V_\theta$  e  $P$  para as trajetórias da Figura 7. As linhas pretas tracejadas representam os conjuntos invariantes correspondentes. Observe que, novamente,  $V_\theta$  é sempre decrescente fora de seu conjunto invariante, em concordância com (22). Por outro lado, a função  $P$  pode crescer fora de seu conjunto invariante quando o VANT ainda está desorientado.

## 7 Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho abordou o problema de controle de um VANT de asa fixa de modo a fazê-lo convergir e seguir uma curva. A estratégia considera campos vetoriais para guiar o controlador. Convergência assintótica foi provada para curvas com formatos gerais. Uma análise foi realizada quando incertezas estão presentes e foi possível mostrar, neste caso, que o VANT converge para um conjunto invariante no entorno da curva alvo. Possíveis sin-

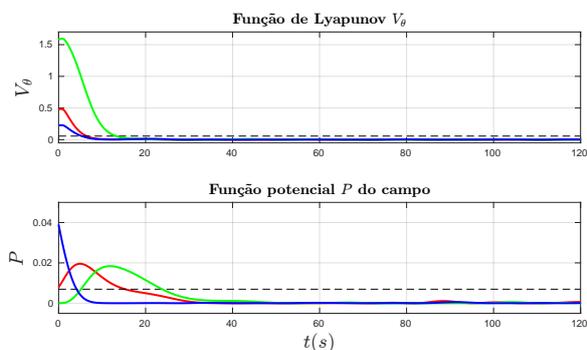


Figura 8: Funções  $V_\theta$  (em cima) e  $P$  (embaixo) relativas às trajetórias da Figura 7.

gularidades do campo vetorial foram tratadas com um chaveamento na lei de controle nas suas proximidades. Provas de convergência foram feitas quando este chaveamento ocorre. Simulações com um modelo realístico de uma aeronave foram realizadas para exemplificar a eficiência da abordagem.

Como trabalho futuro pretendemos expandir os nossos resultados para campos vetoriais definidos em três dimensões e possivelmente variantes no tempo. Também pretendemos desenvolver métodos numéricos para encontrar campos vetoriais que respeitem as condições impostas pelos controladores desenvolvidos.

### Agradecimentos

Os autores agradecem as agências CNPq, CAPES, FAPEMIG e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia (INCT) para Sistemas Autônomos Cooperativos, sob o projeto CNPq 465755/2014-3, pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFMG, também pelo apoio financeiro e ao José Lucas Gomes Olavo pelo apoio com as simulações.

### Referências

- Ambrosino, G., Ariola, M., Ciniglio, U., Corraro, F., Lellis, E. D. and Pironti, A. (2009). Path generation and tracking in 3-D for UAVs, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **17**(4): 980–988.
- Beard, R. W. and McLain, T. W. (2012). *Small unmanned aircraft: Theory and practice*, Princeton University Press.
- Gonçalves, V. M., Pimenta, L. C. A., Maia, C. A., Dutra, B. C. O. and Pereira, G. A. S. (2010). Vector fields for robot navigation along time-varying curves in n-dimensions, *IEEE Transactions on Robotics* **26**(4): 647–659.
- Jesus, T. A., Pimenta, L. C. d. A., Tôrres, L. A. B. and Mendes, E. M. A. M. (2013). On the co-

ordination of constrained fixed-wing unmanned aerial vehicles, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **24**(5): 585–600.

Kapitanyuk, Y. A., Proskurnikov, A. V. and Cao, M. (2017). A guiding vector-field algorithm for path-following control of nonholonomic mobile robots, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **PP**(99): 1–14.

Khamsi, M. A. and Kirk, W. A. (2011). *An introduction to metric spaces and fixed point theory*, Vol. 53, John Wiley & Sons.

Lawrence, D., Frew, E. and Pisano, W. (2007). Lyapunov vector fields for autonomous uav flight control, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, p. 6317.

Nelson, D. R., Barber, D. B., McLain, T. W. and Beard, R. W. (2007). Vector field path following for miniature air vehicles, *IEEE Transactions on Robotics* **23**(3): 519–529.

Olavo, J. L. G., Jesus, T. A., Pimenta, L. C. A., Thums, G. D., Torres, L. A. B. and Palhares, R. M. (2018). Robust guidance strategy for target circulation by controlled UAV, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **PP**(99): 1–1.

Park, S., Deyst, J. and How, J. P. (2007). Performance and Lyapunov stability of a nonlinear path following guidance method, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **30**(6): 1718–1728.

Stevens, B. L., Lewis, F. L. and Johnson, E. N. (2015). *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*, John Wiley & Sons.

Sujit, P. B., Saripalli, S. and Sousa, J. B. (2014). Unmanned aerial vehicle path following: A survey and analysis of algorithms for fixed-wing unmanned aerial vehicles, *IEEE Control Systems* **34**(1): 42–59.