

Projeto de observadores não-lineares com propriedades de robustez e capacidade de aprendizado

Isaias Valente de Bessa* Daniel Ferreira Coutinho**

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e
Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, SC (e-mail:
isaias.bessa@posgrad.ufsc.br)

** Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de
Santa Catarina, SC (e-mail: daniel.coutinho@ufsc.br)

Abstract: This paper presents the development of a robust nonlinear observer with learning capabilities. The observer is designed to be input-to-state stable (ISS) to exogenous disturbances (which may also represent modeling errors), as well as to an auxiliary signal (generated, e.g., by a neural network) accountable for improving the estimation performance of the observer. Finally, numerical simulations demonstrate the potentials of the proposed observer applied to the state-of-charge estimation of a lithium-ion battery (LIB).

Resumo: Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um observador não-linear robusto com capacidade de aprendizado. Este observador é construído para ser entrada-estado estável (*input-to-state stable* - ISS) em relação a sinais de perturbação exógenos (e.g., representando erros de modelagem) e a um sinal auxiliar (e.g., gerado por uma rede neural), responsável por melhorar a performance de estimação do observador. Por fim, este trabalho apresenta a simulação do observador proposto aplicado à estimação do estado de carga de uma bateria de lítio-íon (*lithium-ion battery* - LIB).

Keywords: robust nonlinear observer, machine learning, input-to-state stability, state-of-charge estimation.

Palavras-chaves: observador não-linear robusto, aprendizado de máquina, estabilidade entrada-estado, estimação do estado de carga.

1. INTRODUÇÃO

Existe um amplo escopo na literatura sobre o projeto de observadores não-lineares. O uso deles é necessário quando se deseja estimar dinâmicas internas apenas com base nas informações disponíveis na entrada e saída dos processos, podendo realizar a compensação de não-linearidades ou rejeição de distúrbios, desde que esteja dentro de uma região de estabilidade para a convergência do erro de estimação (Coutinho et al., 2020; Hanba, 2010; Abbaszadeh and Marquez, 2010).

O projeto desses estimadores pode ser baseado em garantir um desempenho robusto, seja em relação a incertezas paramétricas, como em (Yang and He, 2021), ou em relação a distúrbios externos como em (Zhang et al., 2021) onde os autores propõem o projeto de um observador robusto baseado na teoria de modos deslizantes. Outra abordagem é apresentada em (Sabbaghian-Bidgoli and Farrokhi, 2023) que introduz uma função de Lyapunov polinomial mediante o projeto de um observador de entrada desconhecida (OED), utilizando o método de soma dos quadrados (*sum of squares* - SOS) para reduzir o conservadorismo da solução. Também trabalhando com OED, San-Miguel et al. (2021) apresentam a estimação de estados desacoplados aplicados a um manipulador com n graus de liberdade (N-DoF) por meio de soluções de desigualdades de matriz linear (*linear matrix inequalities* - LMI) baseadas nas equações de Riccati.

Outra abordagem envolve a combinação da teoria de observadores com técnicas de aprendizado de máquina.

Chen et al. (2023a) propõem o projeto de um observador adaptativo com o uso de redes neurais radiais, também baseado na utilização de um OED, enquanto que, Chen et al. (2023b) propõem um observador de estado estendido, no qual o uso de redes neurais permite que o projetista não tenha o conhecimento a priori do processo estimado, embora isso resulte em um tempo de processamento maior em comparação com observadores mais tradicionais.

Por fim, a estimação de estados pode ser realizada com a utilização de filtros de Kalman (Tran and Bernard, 2024). Um dos mais populares é o filtro de Kalman estendido (FKE), devido o seu baixo custo computacional em conjunto com boas performances de atuação. Em (Xu et al., 2022) é proposto um FKE dual, que realiza tanto a estimação de estados quanto a estimação de parâmetros em baterias de metal líquido. Por outro lado, em (Haus and Mercorelli, 2020), realiza a mesma tarefa aplicada a uma bateria de lítio-íon (*lithium-ion battery* - LIB).

Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um observador não-linear robusto com capacidade de aprendizado (CA) aplicado a sistemas a tempo discreto, adaptando o problema apresentado em (Banderchuk et al., 2023), para o projeto de observadores de estados. A não-linearidade apresentada obedece a uma condição de Lipschitz, enquanto que a garantia de robustez é assegurada para uma dada região de atração estimada por meio da teoria de estabilidade entrada-estado (*input-to-state stability* - ISS), formulando o problema através de LMIs. Essa robustez é direcionada a um sinal de perturbação e ao sinal auxiliar. Este último visa garantir a

capacidade de aprendizado, sendo utilizada uma estrutura baseada em rede neural direta (*feedforward neural network* - FNN) que, através da coleta das variáveis mensuráveis e dos estados estimados, gera um sinal de correção para a melhoria do processo de estimação.

O restante do trabalho está dividido como se segue: A Seção 2 apresenta a formulação do problema, enquanto a Seção 3 formula o projeto do observador por meio de LMIs. A Seção 4 apresenta um exemplo numérico baseado na estimação do estado de carga (*state of charge* - SOC) de uma LIB, e a Seção 5 apresenta os comentários finais.

Notação: \mathbb{R} , \mathbb{R}^n e $\mathbb{R}^{n \times m}$ são respectivamente o conjunto dos números reais, vetores reais n -dimensional e matrizes reais $n \times m$. \mathbb{Z}_+ é o conjunto dos números inteiros não negativos. Para $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, M^\top é o transposto de M e $\text{He}\{N\} := N + N^\top$. $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n enquanto $\mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz nula. Para um número $k \in \mathbb{Z}_+$ e uma sequência vetorial $f(k) \in \mathbb{R}^n$, o operador de avanço unitário de $f(k)$ é representado por $f^+ := f(k+1)$, $\|f(k)\| := (f(k)^\top f(k))^{1/2}$ e $\|f\|_\infty := \sup_{k \geq 0} \|f(k)\|$.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O observador proposto neste trabalho é composto por dois termos de correção ($L\tilde{y}$ e ψ), como indicado na Figura 1. Aqui, \mathcal{S} representa o sistema com os estados x a serem estimados, \mathcal{O} é a dinâmica do observador proposto e \mathcal{F} a estrutura de aprendizado, responsável por gerar o sinal de correção ψ . Além disso, u é a entrada mensurável, ν é uma perturbação exógena, y é a saída medida, \mathbf{U} são os dados de entrada de \mathcal{F} , (\hat{x}, \hat{y}) são as estimativas de (x, y) , e $\tilde{y} := y - \hat{y}$. O primeiro termo de correção é clássico na teoria de observadores, $L\tilde{y}$. O segundo termo de correção, ψ é gerado por \mathcal{F} , que nesse trabalho é uma estrutura baseada em FNNs.

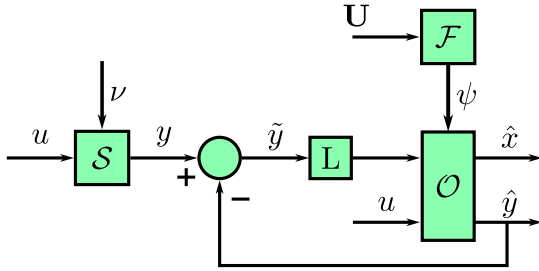


Figura 1. Estrutura do observador não-linear robusto com capacidade de aprendizado proposto.

Para garantir propriedades de convergência para o observador proposto, o ganho L é projetado para garantir que o erro de estimação seja ISS em relação aos sinais limitados em amplitude ν e ψ . Dessa forma, \mathcal{F} é treinada para mitigar os efeitos de sinais externos, levando em consideração as medidas disponíveis de \mathcal{S} e as estimações passadas de \mathcal{O} .

2.1 Observador robusto não-linear

Considere que \mathcal{S} seja um sistema a tempo discreto e possa ser descrito genericamente pela representação não linear em (1).

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x^+ = Ax + B_u u + B_\nu \nu + B_\phi \phi \\ y = Cx + D_u u + D_\nu \nu + D_\phi \phi \end{cases} \quad (1)$$

Onde $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada mensurável, $\phi = \phi(x, u, \nu) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ é um vetor de funções não lineares, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida e $\nu \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_\nu}$ é um sinal de perturbação, tal que

$$\mathcal{V} := \{\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu} : \nu^\top \nu \leq \eta_\nu^2/2\}, \quad (2)$$

com η_ν é um escalar definindo o tamanho de \mathcal{V} e as matrizes $A, B_u, B_\nu, B_\phi, C, D_u, D_\nu$ e D_ϕ são matrizes reais conhecidas com dimensões apropriadas e \mathcal{X} representa o domínio do estado.

Tendo em vista (1), o seguinte observador é proposto neste trabalho:

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \hat{x}^+ = A\hat{x} + B_u u + B_\phi \hat{\phi} + B_\psi \psi + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} + D_u u + D_\phi \hat{\phi} + D_\psi \psi \end{cases} \quad (3)$$

onde $\hat{x} \in \mathcal{X}$ e \hat{y} são as estimativas de x e y , respectivamente, $\hat{\phi} = \phi(\hat{x}, u, 0)$ e $\psi \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_\psi}$ é uma entrada externa com

$$\mathcal{Y} = \{\psi \in \mathbb{R}^{n_\psi} : \psi^\top \psi \leq \eta_\psi^2/2\}, \quad (4)$$

onde η_ψ é um escalar positivo dado que define o tamanho de \mathcal{Y} , B_ψ e D_ψ são matrizes reais conhecidas com dimensões apropriadas e $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ é o ganho do observador.

Seja $\tilde{x} := x - \hat{x}$ o vetor do erro de estimação dos estados. Consequentemente, a partir de (1) e (3), a dinâmica do erro é descrita por:

$$\tilde{x}^+ = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_w w + \tilde{B}_\phi \tilde{\phi}, \quad (5)$$

onde $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$, $\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$ e $w^\top = [\nu^\top/\eta_\nu \quad -\psi^\top/\eta_\psi]$, $\tilde{A} = A - LC$, $\tilde{B}_w = B_w - LD_w$, $\tilde{B}_\phi = B_\phi - LD_\phi$. Note que w pertence ao seguinte conjunto:

$$\mathcal{W} := \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : w^\top w \leq 1\}, \quad n_w = n_\nu + n_\psi. \quad (6)$$

Além disso, em relação ao erro de estimação definido em (5) as seguintes suposições são levadas em consideração:

- (S1) O par (A, C) é observável.
- (S2) O domínio do erro de estimação é um polítopo contendo $\tilde{x} = 0$ definido por

$$\tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : q_i^\top \tilde{x} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_q\}, \quad (7)$$

em que $q_i \in \mathbb{R}^{n_x}$, $i = 1, \dots, n_q$ são vetores conhecidos que definem as n_q faces de $\tilde{\mathcal{X}}$.

- (S3) O vetor não-linear $\tilde{\phi}$ obedece localmente a condição de Lipschitz

$$\tilde{\phi}^\top \tilde{\phi} \leq l_\phi \tilde{x}^\top \tilde{x}, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad (8)$$

onde l_ϕ é a constante de Lipschitz.

2.2 Estabilidade entrada-estado

A noção de ISS será aplicada na dinâmica do erro apresentada em (5) para obter condições baseadas em LMIs para o projeto do observador não-linear robusto. A seguir, será apresentada a definição da estabilidade entrada-estado e reescrita através de uma representação por Lyapunov.

Definição 1. (Coutinho et al., 2020) O ponto de equilíbrio $\tilde{x} = 0$ do sistema discreto definido em (5) é localmente ISS, se existirem dois conjuntos, denominados, $\mathcal{D}_{\tilde{x}}$ e \mathcal{D}_0 , com $\mathcal{D}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{D}_0 \subset \tilde{\mathcal{X}}$, tal que para qualquer $\tilde{x}(0) \in \mathcal{D}_0$ e $w \in \mathcal{W}$, a trajetória $\tilde{x}(k)$ permanece confinada a \mathcal{D}_0 , para todo $k \geq 0$ e converge para $\mathcal{D}_{\tilde{x}}$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, se $w(k) \rightarrow 0$, então $\tilde{x}(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

O lema a seguir fornece uma representação por Lyapunov de ISS conforme apresentada na Definição 1, adaptada de Coutinho et al. (2020).

Lema 1. Dado o sistema em (5), que satisfaz as suposições (S1)-(S3), e os conjuntos \mathcal{W} e \mathcal{X} definidos em (6) e (7), respectivamente. Se existir uma função escalar $V : \mathbb{Z}_+ \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ e escalares reais e positivos ϵ_1, ϵ_2 e $\tau \in (0, 1)$ tal que as seguintes condições sejam obedecidas:

$$\epsilon_1 \|\tilde{x}(k)\|^2 \leq V(k) \leq \epsilon_2 \|\tilde{x}(k)\|^2 \quad (9)$$

$$\Delta V(k) \leq \tau \|w(k)\|^2 - \tau V(k) \quad (10)$$

$$\mathcal{D}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{D}_0 \subset \tilde{\mathcal{X}} \quad (11)$$

para todo $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$, $w \in \mathcal{W}$, e $k \geq 0$, então a origem de (5) é localmente ISS, onde $V(k) := V(k, \tilde{x}(k))$, e

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k), \quad (12)$$

$$\mathcal{D}_{\tilde{x}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : V(k) \leq 1\}, \quad (13)$$

$$\mathcal{D}_0 = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : V(k) \leq 1 + \kappa\}, \quad (14)$$

com κ sendo um escalar positivo tal que $\mathcal{D}_0 \subset \tilde{\mathcal{X}}$.

Prova. Primeiramente, suponha que exista $V(k)$ satisfazendo (9)-(11) para algum $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ e $\tau \in (0, 1)$. Dessa forma, de (9) segue-se que

$$V(k+1) \leq (1-\tau)V(k) + \tau \|w(k)\|^2, \quad \forall k \geq 0. \quad (15)$$

Observe que se $V(k) \leq 1 + \kappa$, então $V(k+1) \leq 1 + \kappa$, uma vez que $w(k) \in \mathcal{W}$. Ou seja, \mathcal{D}_0 é positivamente invariante. Em seguida, de (15), obtém-se por indução

$$\begin{aligned} V(k) &\leq (1-\tau)^k V(0) + \tau \|w\|_\infty^2 \sum_{i=0}^{k-1} (1-\tau)^i \\ &\leq (1-\tau)^k V(0) + \|w\|_\infty^2 \end{aligned} \quad (16)$$

que implica em $\|\tilde{x}(k)\|^2 \leq \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} (1-\tau)^k \|x(0)\|^2 + \frac{1}{\epsilon_1} \|w\|_\infty^2$. Por fim, é válido de (16), $V(k) \leq \|w\|_\infty^2 \leq 1$, para $k \rightarrow \infty$ uma vez que $(1-\tau)^k \rightarrow 0$ a medida que $k \rightarrow \infty$. Em outras palavras, para todo $\tilde{x}(0) \in \mathcal{D}_0$, $\tilde{x}(k) \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{x}}$ quando $k \rightarrow \infty$, que completa a prova. \square

3. PROJETO DO OBSERVADOR

Nessa seção serão apresentadas as condições de projeto para o observador não-linear robusto aplicado a um modelo a tempo discreto, sendo divididas em duas etapas. Na primeira, ocorre a formulação através de LMIs, considerando que \mathcal{O} é ISS em relação a $w \in \mathcal{W}$, para o cálculo do ganho L. Em seguida, é apresentada a estrutura de \mathcal{F} que gerará o sinal de correção ψ .

3.1 Projeto do observador não-linear robusto

Nesta subseção é proposta uma versão em LMI do Lema 1, considerando a função de Lyapunov candidata

$$V(k) = V(\tilde{x}(k)) := \tilde{x}^\top P \tilde{x}, \quad (17)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é uma matriz simétrica a ser calculada.

Teorema 1. Considere o erro do sistema \mathcal{S} definido em (5), satisfazendo (S1)-(S3). Sejam τ e κ escalares positivos conhecidos, com $\tau \in (0, 1)$. Suponha que existam as matrizes $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\phi}$, e um escalar $\mu > 0$ satisfazendo as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} (1+\kappa) & (1+\kappa)q_i^\top \\ (1+\kappa)q_i & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_q \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} P - G - G^\top & \Upsilon \\ \Upsilon^\top & \Xi \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon &= [GA + WC \quad GB_w + WD_w \quad GB_\phi + WD_\phi], \\ \Xi &= \begin{bmatrix} (\tau-1)P + \mu I_\phi & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} & \mathbf{0}_{n_x \times n_\phi} \\ * & -\tau I_{n_w} & \mathbf{0}_{n_w \times n_\phi} \\ * & * & -\mu I_{n_\phi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então, o ponto de equilíbrio $\tilde{x} = 0$ de (5), com $L = -G^{-1}W$, é ISS e a trajetória do erro $\tilde{x}(k)$ para qualquer $\tilde{x}(0) \in \mathcal{D}_0$ permanece limitada por \mathcal{D}_0 , para todo $k \geq 0$, e converge para $\mathcal{D}_{\tilde{x}}$ quando $k \rightarrow \infty$, onde

$$\mathcal{D}_{\tilde{x}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : \tilde{x}^\top P \tilde{x} \leq 1\}, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_0 = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : \tilde{x}^\top P \tilde{x} \leq 1 + \kappa\}. \quad (21)$$

A prova do teorema foi emitida por brevidade, mas pode ser obtida contactando os autores.

O Teorema 1 pode ser aplicado para reduzir os efeitos da perturbação w no erro estimado \tilde{x} para todo um conjunto de condições iniciais admissíveis. Isso pode ser acompanhado pela minimização do tamanho de $\mathcal{D}_{\tilde{x}}$, enquanto o tamanho de \mathcal{D}_0 é maximizado. Para reduzir desafios os computacionais, pode-se assumir um conjunto de condições iniciais admissíveis, definido por

$$\mathcal{R}_0 = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : \tilde{x}^\top P_0 \tilde{x} \leq 1\}, \quad (22)$$

e garantir que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{D}_0$ projetando adequadamente κ , onde P_0 é uma matriz simétrica positiva conhecida que define o tamanho e a forma de \mathcal{R}_0 .

O seguinte problema de otimização fornece uma solução que minimiza o tamanho de $\mathcal{D}_{\tilde{x}}$ enquanto garante que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{D}_0$:

$$\max_{P, G, W, \lambda, \mu, \tau} \lambda : \begin{cases} (1+\kappa)P_0 - P \geq 0, \\ P - \lambda I_{n_x} \geq 0, \end{cases} \quad (23)$$

(18) e (19).

Note que o problema de otimização acima é não convexo devido ao produto τP . No entanto, uma vez que τ é limitado no intervalo $(0, 1)$, pode-se aplicar o algoritmo de bisseção para selecionar o valor de τ .

3.2 Descrição do bloco de aprendizado

A correção da estimação dos estados é feita através da geração do sinal ψ . Este sinal é gerado por \mathcal{F} com estrutura indicada na Figura 2, baseada na tradicional FNN. Essa estrutura é composta por três partes principais: entrada, camada oculta e camada de saída. A entrada é representada pelo vetor \mathbf{U} composto pelas medições atuais e passadas de (u, y) , estimativas passadas (\hat{x}, \hat{y}) e valores passados do próprio sinal de correção ψ .

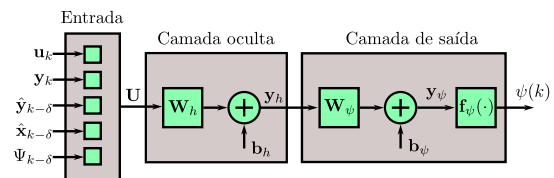


Figura 2. Estrutura do sistema para a garantia da capacidade de aprendizado.

O vetor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_U}$ é definido como

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_k^\top \quad \mathbf{y}_k^\top \quad \hat{\mathbf{y}}_{k-\delta}^\top \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-\delta}^\top \quad \Psi_{k-\delta}^\top]^\top, \quad (24)$$

onde $n_U = (m+1)n_u + (2m+1)n_\phi + m(n_x + n_\varphi)$, $\mathbf{u}_k^\top = [u(k)^\top \dots u(k-m)^\top]$, $\mathbf{y}_k^\top = [y(k)^\top \dots y(k-m)^\top]$, $\hat{\mathbf{y}}_{k-\delta}^\top = [\hat{y}(k-\delta)^\top \dots \hat{y}(k-m)^\top]$, $\hat{\mathbf{x}}_{k-\delta}^\top = [\hat{x}(k-\delta)^\top \dots \hat{x}(k-m)^\top]$, $\Psi_{k-\delta}^\top = [\psi(k-\delta)^\top \dots \psi(k-m)^\top]$.

Observe que \mathbf{U} é dividido em cinco grupos de vetores para auxiliar na generalização de \mathcal{F} . Os dois primeiros vetores, \mathbf{u}_k e \mathbf{y}_k , representam os valores atuais e passados da entrada mensurável e da saída de \mathcal{S} , respectivamente. Para uma melhor compreensão, \mathbf{u}_k e \mathbf{y}_k são construídos com informações desde o instante k até o instante $k - m$, onde m representa a quantidade de informação passada armazenada. Os outros três vetores representam as informações passadas desde o instante $k - \delta$ até o instante $k - m$ dos estados e saída estimados, respectivamente, $\hat{\mathbf{x}}_{k-\delta}$ e $\hat{\mathbf{y}}_{k-\delta}$, e do sinal de correção $\psi(k)$, indicado por $\Psi_{k-\delta}$. A quantidade de informações passadas (m) e o atraso (δ) são tratados como hiperparâmetros a serem ajustados durante o treinamento de \mathcal{F} .

As camadas oculta e de saída são compostas por n_h e n_ψ neurônios, respectivamente. Em particular, a saída da camada oculta é descrita por

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{W}_h \mathbf{U} + \mathbf{b}_h \quad (25)$$

onde $\mathbf{b}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$ e $\mathbf{W}_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_u}$ são, respectivamente, o vetor de polarização e a matriz de pesos da camada oculta, ambos determinados durante a etapa de treinamento do modelo.

Da mesma forma, a saída de \mathcal{F} (i.e., o sinal ψ) é definida por

$$\psi(k) = \mathbf{f}_\psi(\mathbf{W}_\psi \mathbf{y}_h + \mathbf{b}_\psi), \quad (26)$$

onde $\mathbf{b}_\psi \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ é o vetor de polarização, $\mathbf{W}_\psi \in \mathbb{R}^{n_\psi \times n_h}$ é a matriz de pesos e $\mathbf{f}_\psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ é a função de ativação, todos relacionados a camada de saída.

Para garantir que o sinal de correção é limitado no conjunto \mathcal{Y} , é considerada a função de ativação tangente hiperbólica, definida por

$$\mathbf{f}_\psi(x) = \frac{\sqrt{\eta_\psi}}{2} \left(\frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1 \right). \quad (27)$$

Durante a etapa de treinamento de \mathcal{F} , os dados para a construção do vetor $\Psi_{k-\delta}$ são gerados aleatoriamente levando em consideração os limites definidos em (4). Além disso, a saída desejada, representada por ψ^* , é definida por

$$\psi^* := \arg \left\{ \min_{\psi} \|C_\psi \tilde{x}\| \right\}, \quad (28)$$

onde $C_\psi \in \mathbb{R}^{n_\psi \times n_x}$ é uma matriz conhecida. Note, de forma geral, é considerado que a função de perda $\|C_\psi \tilde{x}\|$ (otimizada durante o treinamento) é qualquer combinação linear do vetor de erro de estimação, definida pelo projetista.

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção é apresentado o exemplo numérico na tarefa de estimação de estado de carga de uma LIB baseado em um modelo elétrico de segunda ordem, indicado na Figura 3, utilizando o observador proposto na Seção 3. O circuito é composto por: (i) uma resistência interna R_0 ; (ii) os pares (R_1, C_1) e (R_2, C_2) que denotam o efeito de polarização e concentração eletroquímica; (iii) uma tensão interna ε ; (iv) x_1 e x_2 representam a tensão sobre os pares (R_1, C_1) e (R_2, C_2) , respectivamente, enquanto x_3 é o estado de carga da LIB, que é calculado pela integral de Coulomb da LIB com capacidade nominal Q . A entrada deste circuito é a corrente u , onde quando $u > 0$ ($u < 0$) a bateria está descarregando (carregando).

Para este trabalho, o circuito apresentado na Figura 3 representa a célula Panasonic NCR18650-PF de 2,9 Ah e tensão máxima (mínima) de 4,2 V (2,5 V). Dessa forma, a LIB pode ser representada por um modelo discreto,

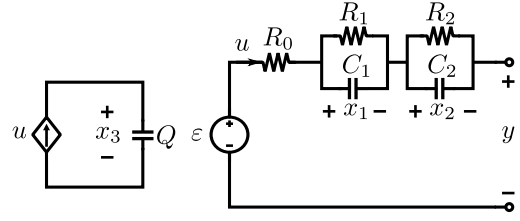


Figura 3. Modelo de segunda ordem para baterias de lítio-íon.

conforme mostrado em (1), com tempo de amostragem igual a 1 segundo. Temos então, que as matrizes do sistema são

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0,9946 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9985 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & B_u &= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,186 \\ 0,0015 \\ -0,9579 \end{bmatrix}, \\ B_w &= 0,29B_u, & B_\phi &= \mathbf{0}_{3 \times 1}, \\ C &= [-1 \ -1 \ 0,316], & D_u &= [-0,0484], \\ D_w &= 0,042D_u, & D_\phi &= [1], \end{aligned} \quad (29)$$

e a não-linearidade ϕ é modelada por um polinômio de sexta ordem tal que $\phi = 3,24x_3^6 - 0,93x_3^5 - 16,04x_3^4 + 26,6x_3^3 - 16,2x_3^2 + 4,14x_3 + 2,94$.

Então, a próxima subseção tem por objetivo mostrar a aplicação do Teorema 1 para o projeto de \mathcal{O} em conjunto com o treinamento do bloco de aprendizado \mathcal{F} .

4.1 Projeto do observador

Para o projeto do observador as seguintes considerações foram feitas:

- (i) o sinal de correção ψ é projetado para atuar somente no erro de estimação do estado de carga (\tilde{x}_3), dessa forma $B_\psi = [0 \ 0 \ 1]^T$ e $D_\psi = 0$;
- (ii) os erros de estimação são limitados por $\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq \rho_i\}$, $i = 1, 2, 3$ com $\rho_1 = 8 \times 10^{-3}$ V, $\rho_2 = 0,1 \times 10^{-3}$ V e $\rho_3 = 1$, o que resulta em $\|\phi\| \leq 0,001\|x\|^2$;
- (iii) O tamanho dos distúrbios admitidos em (2) e (4) são tais que $\eta_\nu = \sqrt{2}$ e $\eta_\psi = 0,035\sqrt{2}$;
- (iv) Para o conjunto \mathcal{R}_0 e \mathcal{D}_0 seleciona-se $P_0 = \text{diag}(22, 5 \times 10^3; 121 \times 10^6; 4)$ e $\kappa = 0,1$, respectivamente.

Baseado nas considerações anteriormente citadas, aplica-se (23), obtendo-se

$$\begin{aligned} L_1 &= [0, 100 \times 10^{-3} \ -1,555 \times 10^{-8} \ 0,607] \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 2,474 \times 10^4 & -7,396 \times 10^3 & 1,344 \\ * & 1,168 \times 10^8 & 1,004 \times 10^2 \\ * & * & 1,115 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Para realizar uma análise comparativa na subseção 4.4, também foi projetado um observador que ignora o sinal auxiliar ψ (em que $\eta_\psi = 0$), resultando no ganho

$$L_2 = [-3,449 \times 10^{-6} \ -2,113 \times 10^{-8} \ 0,313], \quad (31)$$

onde em ambos os casos $\tau = 0,0029$.

Para o treinamento de \mathcal{F} , as seguintes considerações foram feitas:

- (i) A estrutura adota para \mathcal{F} é baseada em FNNs, conforme apresentada na Figura 2, onde nosso objetivo é calcular \mathbf{W}_h , \mathbf{b}_h , \mathbf{W}_ψ e \mathbf{b}_ψ de forma que (28) seja obedecida;
- (ii) Os hiperparâmetros foram ajustados de forma que $\delta = 1$ e $m = 5$;

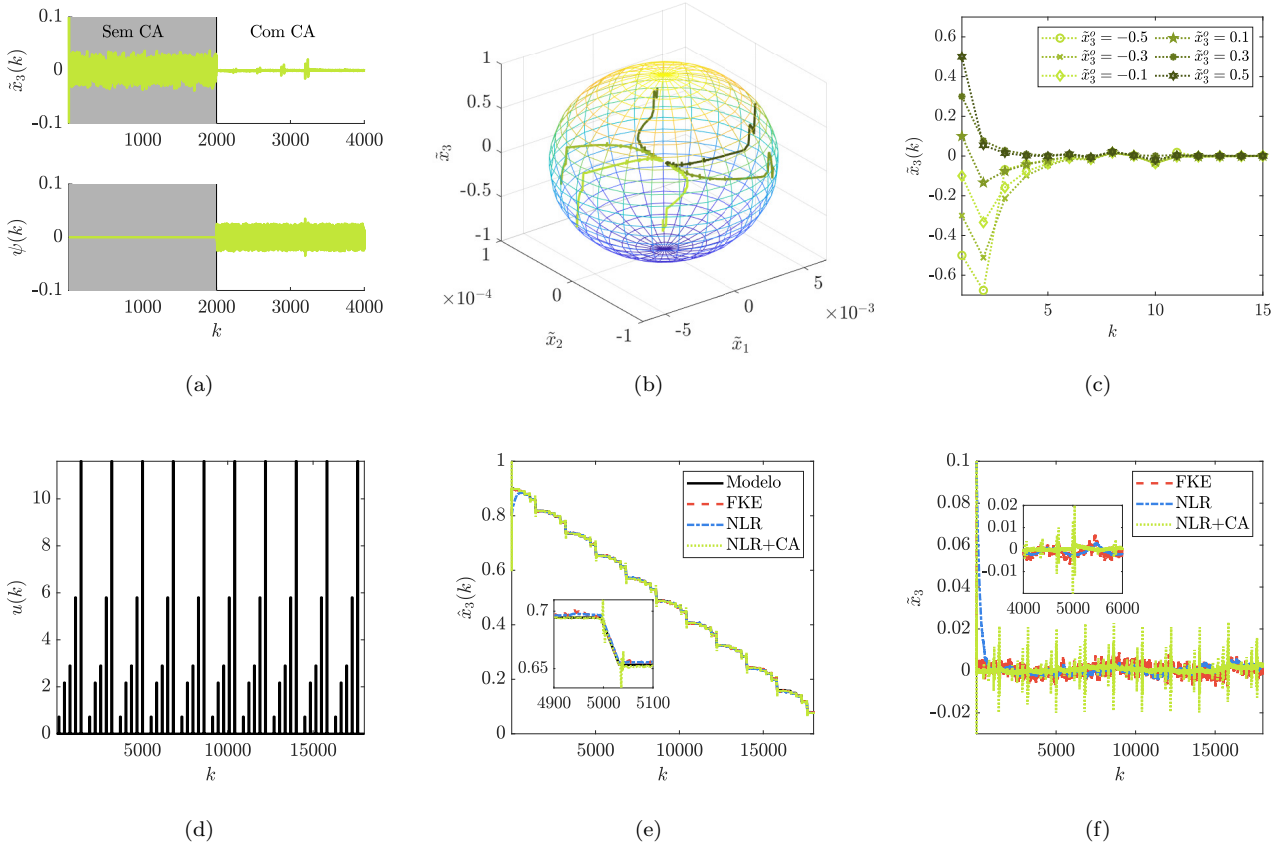


Figura 4. (a) Efeito da adição da capacidade de aprendizado. (b) Convergência do erro de estimação dentro de \mathcal{D}_0 . (c) Convergência no tempo do erro de estimação de \tilde{x}_3 . (d) Sinal de entrada. (e) Estimação do estado de carga. (f) Erro de estimação do estado de carga.

- (iii) A estrutura da FNN adotada é tal que a camada escondida e a camada de saída são compostas por 5 e 1 neurônios, respectivamente;
- (iv) A variável de interesse a ser otimizada é a estimação do estado de carga, dessa forma $C_\psi = [0 \ 0 \ 1]$;
- (v) O *dataset* de treinamento foi montado aplicando um sinal de corrente (u) pulsante, onde cada pulso gerado teve sua amplitude (A_u) e intervalo de aplicação (T_u) aleatoriamente gerados tal que $0,3 \leq A_u \leq 8,0$ A e $30 \leq T_u \leq 90$ s.

Com base nas considerações acima, a FNN foi treinada usando NEURAL NETWORK TOOLBOX do MATLAB utilizando o algoritmo de retropropagação de Levenberg-Marquardt. O treinamento iniciou com uma taxa de aprendizado de 1×10^{-3} e ocorreu durante 500 épocas. Este processo foi executado em um computador equipado com um processador Intel Core i7-10700 com 16GB RAM.

4.2 Ação do sinal de correção

A primeira simulação realizada tem por objetivo demonstrar a ação do sinal de correção ψ , e conseqüentemente, da capacidade de aprendizado (CA) do observador sobre o erro de estimação do estado de carga da LIB (\tilde{x}_3). Para isso, considere que $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^T$ enquanto $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0,9]^T$ e que inicialmente $\psi = 0$ até que na amostra $k = 2000$ o sinal auxiliar comece a atuar no observador. Este resultado é mostrado na Figura 4(a).

Note que antes da entrada do sinal auxiliar (sistema sem CA), o erro de estimação \tilde{x}_3 é fortemente afetado por perturbações externas e apresenta uma estimação pobre. No instante em que o sinal auxiliar entra no processo (sistema com CA), o erro de estimação é reduzido, sendo compensado pelo cálculo de ψ .

4.3 Convergência do observador

O segundo ponto que desejamos explorar neste trabalho é a característica de convergência do observador proposto. Para isso, o observador foi simulado para diversas condições iniciais $\hat{x}(0)$, enquanto o modelo é iniciado com $x(0) = [0 \ 0 \ 0,5]^T$, de forma que o vetor de erro de estimação \tilde{x} inicie na borda de \mathcal{D}_0 , estimada em conjunto com o cálculo de L_1 .

A Figura 4(b) mostra a trajetória dos erros de estimação que iniciam em \mathcal{D}_0 e a medida que $k \rightarrow \infty$, convergem para valores próximos a origem, indicando a convergência para a região $\mathcal{D}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{D}_0$. Por outro lado, a Figura 4(c) demonstra a mesma característica de convergência, só que agora observando o erro de estimação \tilde{x}_3 para cada instante de amostragem.

4.4 Desempenho do observador

Por fim, neste trabalho, também avalia-se o desempenho do observador proposto em relação a uma outra estrutura muito utilizada para a estimação do estado de carga de baterias: o filtro de Kalman estendido (FKE). Para isso,

consideramos o FKE projetado com as matrizes $P_{fke} = \text{diag}(0, 01; 0, 01; 100)$, $Q_{fke} = 0, 01\mathbf{I}_3$ e $R_{fke} = 10$, que são, respectivamente, as matrizes de covariância do estado estimado, de ruído do processo e de ruído da medição. Essas matrizes foram sintonizadas através de exaustivas simulações visando minimizar o erro médio absoluto da estimação do estado de carga.

Nesse sentido, a análise comparativa será baseada nas seguintes estruturas:

- Filtro de Kalman estendido (FKE);
- Observador não-linear robusto sem capacidade de aprendizado (NLR) com o ganho dado por (31);
- Observador não-linear robusto com capacidade de aprendizado (NLR+CA) com o ganho dado por (30).

Para a simulação desse procedimento utiliza-se um sinal de corrente pulsante, como indicado na Figura 4 (d), e a partir do erro de estimação do estado de carga, calcula-se o erro médio absoluto (EMA) para cada estrutura através da seguinte equação.

$$\text{EMA}_{\%} = 100 \times \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{x_3(k) - \hat{x}_3(k)}{x_3(k)} \right| \quad (32)$$

A Figura 4(e) mostra a estimação do estado de carga realizada pelo FKE, NLR e NLR+CA, enquanto a Figura 4(f) apresenta o sinal de erro dessa estimação. Por fim, a Tabela 1 resume o EMA para cada estrutura simulada.

Tabela 1. EMA para a estimação do estado de carga.

Estrutura	FKE	NLR	NLR+CA
EMA(%)	0,559	0,617	0,409

Dessa forma, pode-se observar que, comparando o NLR+CA com o projeto do NLR (que ignora o sinal auxiliar no projeto), o observador proposto teve uma redução de 33,7% no erro de estimação de x_3 . Entretanto, em relação ao FKE, a redução no erro foi de 26,6%. Além disso, ressalta-se que o observador proposto assegura uma garantia de estabilidade (i.e., provê uma região de convergência para o erro), o que não ocorre no caso do FKE.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um observador robusto com capacidade de aprendizado. Este observador foi projetado para ser ISS em relação a sinais de perturbação e a um sinal auxiliar que caracteriza a capacidade de aprendizado do sistema. As simulações mostraram como o sinal auxiliar atua para a correção do processo de estimação, a convergência das trajetórias que partem de um conjunto de condições iniciais admissíveis e convergem para o conjunto onde a estabilidade do sistema é garantida mesmo sob ação de distúrbios externos. Por fim, comparou-se o observador proposto com o observador não-linear clássico, que ignora a ação do sinal de correção, e com o FKE, amplamente utilizado no processo de estimação de estados em LIBs. Através dessas simulações constatou-se a capacidade da proposta de melhorar o processo de estimação e assegurar uma região de convergência para a trajetória do erro.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES, FAPESC e CNPq sob subsídios 88887.899522/2023-

00 (PROEX), 88881.878833/2023-01 (OPCOMPLEX, SticAmSud), 2022TR002110 (FAPESC) e 303289/2022-8/PQ.

REFERÊNCIAS

- Abbaszadeh, M. and Marquez, H.J. (2010). Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, 5284–5289. doi:10.1109/ACC.2010.5530715.
- Banderchuk, A., Coutinho, D., and Camponogara, E. (2023). Combining Robust Control and Machine Learning for Uncertain Nonlinear Systems Subject to Persistent Disturbances. In *2023 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3347–3352. doi:10.1109/CDC49753.2023.10383966.
- Chen, L., Zhu, Y., and Ahn, C.K. (2023a). Adaptive Neural Network-Based Observer Design for Switched Systems With Quantized Measurements. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 34(9), 5897–5910. doi:10.1109/TNNLS.2021.3131412.
- Chen, S., Cai, S., Chen, T., Xu, C., and Chu, J. (2023b). Neural Observer With Lyapunov Stability Guarantee for Uncertain Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 1–15. doi:10.1109/TNNLS.2023.3262820.
- Coutinho, D., Schons, S., Couto, L.D., and Kinnaert, M. (2020). Robust observer design for discrete-time locally one-sided Lipschitz systems. *European Journal of Control*, 53, 43–51. doi:https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2019.11.001.
- Hanba, S. (2010). Further Results on the Uniform Observability of Discrete-Time Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4), 1034–1038. doi:10.1109/TAC.2010.2041983.
- Haus, B. and Mercorelli, P. (2020). Polynomial Augmented Extended Kalman Filter to Estimate the State of Charge of Lithium-Ion Batteries. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 69(2), 1452–1463. doi:10.1109/TVT.2019.2959720.
- Sabbaghian-Bidgoli, F. and Farrokhi, M. (2023). Robust fuzzy observer-based fault-tolerant control: A homogeneous polynomial Lyapunov function approach. *IET Control Theory & Applications*, 17(1), 74–91. doi:https://doi.org/10.1049/cth2.12362.
- San-Miguel, A., Puig, V., and Alenyà, G. (2021). Disturbance observer-based LPV feedback control of a N-DoF robotic manipulator including compliance through gain shifting. *Control Engineering Practice*, 115, 104887. doi:https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2021.104887.
- Tran, G.Q.B. and Bernard, P. (2024). Arbitrarily fast robust kkl observer for nonlinear time-varying discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69(3), 1520–1535. doi:10.1109/TAC.2023.3328833.
- Xu, C., Zhang, E., Jiang, K., and Wang, K. (2022). Dual fuzzy-based adaptive extended Kalman filter for state of charge estimation of liquid metal battery. *Applied Energy*, 327, 120091. doi:https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.120091.
- Yang, Y. and He, Y. (2021). Non-fragile observer-based robust control for uncertain systems via aperiodically intermittent control. *Information Sciences*, 573, 239–261. doi:https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.05.046.
- Zhang, P., Kao, Y., Hu, J., and Niu, B. (2021). Robust observer-based sliding mode \mathcal{H}_{∞} control for stochastic Markovian jump systems subject to packet losses. *Automatica*, 130, 109665. doi:https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109665.