Comparação entre Modelos Analíticos e Modelos de Simulação Computacionais Tropicais

Daniel Fernandes Gomes * **Carlos Andrey Maia** **

* *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Av. Presidente Antonio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, (e-mail: danielfernandesgomes@hotmail.com).*
** *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica / Depto. de Engeharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) - Av. Presidente Antonio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, (e-mail:maia@cpdee.ufmg.br).*

Abstract: The main purpose of this work is to compare the performance of systems to stochastic timed discrete events by means of analytical models, described by stochastic automata and by equivalent computational simulation models, described by stochastic timed Petri nets and also by tropical dynamic models. In the paper, we compare the performance of the three approaches, analysing the trade-offs in terms of cost to development, the accuracy of the results obtained and the computational simulation time. For this purpose, we use a model of a simple client-server service network, where the interest is to evaluate the average waiting time for customers in the queue for an uncontrolled and controlled system.

Resumo: Este trabalho tem como principal finalidade comparar o desempenho de sistemas a eventos discretos temporizados estocásticos por intermédio de modelos analíticos, descritos por autômatos estocásticos e por modelos de simulação computacional equivalente, descritos por redes de Petri temporizadas estocásticas e, também, por modelo dinâmicos tropicais. No artigo, comparamos o desempenho das três abordagens, analisando os "trade-offs"em termos do custo para o desenvolvimento dos modelos, da precisão dos resultados obtidos e do tempo de simulação computacional. Para esse fim, utilizamos um modelo de uma rede de serviço simples, tipo cliente-servidor, onde o interesse é avaliar o tempo médio de espera dos clientes na fila para um sistema não-controlado e com controle.

Keywords: Stochastic time discrete-event systems; Analytic models; Sthocastic Automaton; Monte-carlo computer models: Stochastic timed Petri nets: Sthocastic Tropical max-plus models; Performance evaluation.

Palavras-chaves: Sistemas a Eventos Discretos Temporizados Estocásticos; modelos analíticos; Automaton Estocástico; Modelos computacionais de Monte-carlo; Rede de Petri temporizada estocástica; Modelos Tropicais max-plus estocásticos; analise de desempenho.

1. INTRODUÇÃO

A comparação entre modelos de Sistemas a Eventos Discretos Temporizados Estocásticos (SEDTE) é uma prática essencial para avaliar os custos relacionados ao desempenho e ao desenvolvimento dos modelos. Essa abordagem visa avaliar diferentes modelos de simulação que descrevem o comportamento de sistemas complexos estocásticos, nos quais as transições entre os estados são temporizadas e sujeitas a incertezas probabilísticas. Neste contexto, existem diferentes abordagens de modelagem e análise de desempenho, onde cada uma apresenta suas vantagens e limitações Maia (2022), Cassandras and Lafortune (2008).

Compreender a dinâmica de sistemas complexos é crucial para otimizar processos, tomar decisões e melhorar o desempenho operacional. Neste contexto, o objetivo deste artigo é comparar duas abordagens distintas. Em particular, investigamos a utilização de modelos analíticos baseados em autômatos estocásticos, modelos de simulação computacionais estocásticos descritos por modelos Tropicais Max-plus e redes de Petri temporizadas Baccelli et al. (1992) Schutter et al. (2020); Hardouin et al. (2018); J.Komenda et al. (2018) Wang (1998).

Para avaliar as comparações, concentramo-nos em três aspectos principais: o custo associado ao desenvolvimento dos modelos, a precisão dos resultados obtidos e o tempo de simulação computacional. Além disso, procuramos identificar os "trade-offs"entre essas abordagens, ou seja, entender as compensações envolvidas ao optar por uma em detrimento das outras.

Para exemplificar as análises conduzidas, foi empregado um modelo de uma rede de serviço simples do tipo cliente-servidor Souza and Maia (2019) Maia (2022). Esse modelo

* Este trabalho tem como parceiros e apoiadores o CNPQ e a CAPES, em conjunto com o Programa de Pós Graduação de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

é particularmente relevante, pois permite avaliar o tempo médio de espera dos clientes na fila em duas configurações, sendo a primeira onde o sistema opera sem controle e na segunda configuração operando com controle realimentado Sernizon-Guimarães and Maia (2020). Essa avaliação ajudará a entender como cada abordagem lida com diferentes cenários e requisitos de modelagem.

O artigo está organizado na seguinte sequência: na seção 2, são apresentadas duas abordagens principais dos modelos analíticos e modelos de simulação computacional equivalente descritos por rede de Petri T-temporizada estocástica e modelos tropicais Max-plus estocástico. Em seguida, na Seção 3, um exemplo numérico é fornecido, onde um sistema de serviço não controlado é simulado usando um autômato temporizado estocástico. Além disso, uma abordagem preliminar para um sistema de serviço controlado também é discutida. Os resultados das simulações são apresentados na Seção 4, divididos entre os resultados sem controle e com controle. Finalmente, na Seção 5, são apresentadas as conclusões do estudo.

2. ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS TEMPORIZADOS ESTOCÁSTICOS

A análise de desempenho visa à construção de modelos que buscam evidenciar de forma abstrata o comportamento de um sistema real ao longo do tempo. O propósito principal é inferir e validar as características e comportamentos dos sistemas reais sob estudo. Em geral, duas abordagens concorrentes para resolver os problemas que aparecem na literatura: abordagem via modelos analíticos e abordagem via modelos de simulação computacional baseados em Modelos Computacionais de Monte Carlo.

2.1 Abordagem via Modelos analíticos

Um modelo analítico refere-se a uma representação matemática que descreve um sistema. No contexto da Simulação a Eventos Discretos (SED), um modelo analítico pode ser uma formulação matemática que descreve as relações entre variáveis, probabilidades de transição de estado e outras características importantes do sistema. Esses modelos podem ser resolvidos analiticamente para derivar soluções ou resultados teóricos que ajudam a compreender o comportamento do sistema sem depender inteiramente de simulações computacionais. O uso de modelos analíticos é valioso para análises teóricas e para a compreensão profunda dos sistemas estudados.

2.2 Autômatos Temporizados Estocásticos

Os autômatos são modelos matemáticos abstratos, que representam a dinâmica e o comportamentos de um SED com regras definidas, podendo ser classificados como determinístico ou estocástico, temporizado ou não temporizado, finito ou infinito Cassandras and Lafortune (2008).

Para a representação de um autômato temporizado é necessária uma estrutura de temporização para definir o tempo de vida de um determinado evento, no qual o tempo pode ser determinístico ou estocástico. Para cada estado apresentado pelo autômato, deve-se verificar quais são as transições e momentos de ocorrências são factíveis Maia (2022).

Definição *1.* Um Autômato Temporizado Estocástico é uma quíntupla $G = (X, \varepsilon, f, x_0, V)$, na qual:

X representa um conjunto de finitos estados;

ε representa um conjunto de finitos eventos;

f é a função de transição, $f : X \times \varepsilon \to X$;

x_0 trata-se do estado inicial, $x_0 \in X$;

$V = \{V_i : i \in \varepsilon\}$ representa um conjunto estocástico de estrutura de relógio para gerar o tempo de vida dos eventos, sendo V_i uma variável aleatória não negativa.

Uma vez que a função de transição de um autômato temporizado estocástico não é total, isso significa que, em alguns estados, alguns eventos podem não ser permitidos ou viáveis. Isso nos leva à Definição 2, que descreve a função de eventos factíveis, representada por:

Definição *2.* Para um autômato temporizado estocástico $G = (X, \varepsilon, f, x_0, V)$, definindo Γ a função de eventos viáveis temos:

$$\Gamma(x) = \{e \in \varepsilon \mid f(x, e) \neq \emptyset\} \tag{1}$$

Como resultado, podemos observar que a função Γ mapeia os estados X para o conjunto das partes de ε, representado como 2^{ε}. Isso significa que ε associa cada estado x a um subconjunto de eventos viáveis em X.

Para simular o comportamento de um autômato temporizado estocástico em um computador, é necessário ter uma representação numérica para a função de transição f. Tal representação é frequentemente feita por meio de uma matriz, conforme descrito na Definição 3, cuja representação é geralmente assumida para um subconjunto ε de um conjunto maior de eventos, denotado ε^{tot}.

Definição *3.* (Representação Matricial). Dado um autômato temporizado estocástico $G = (X, \varepsilon, f, x_0, V)$, um conjunto de eventos L, expresso como uma sequência $\varepsilon^{\text{tot}} = \{1, 2, ..., L\}$ tal que $\varepsilon \subseteq \varepsilon^{\text{tot}}$ e um conjunto de estados N, dado por $X = \{1, 2, \ldots, N\}$ a função de transição f é representada pela matriz $A, N \times L$ onde:

$$A(x, e) = \begin{cases} f(x, e) & \text{se } e \in \Gamma(x), \\ 0 & \text{se } e \in \varepsilon \text{ e } e \notin \Gamma(x), \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

Segundo Maia (2022), devido à complexidade de alguns modelos na teoria dos autômatos estocásticos, utilizamos como estratégia dividi-lo em partes, para uma melhor análise do sistema. Cada uma dessas partes é denominada de submodelos, em que cada submodelo interage entre si usando eventos comuns. O processo para obter os submodelos é realizado através da operação de composição paralela, apresentada na Definição 4.

Definição *4.* (Composição Paralela de um autômato temporizado estocástico): A composição paralela é uma operação binária entre dois ou mais autômatos onde o paralelismo é representado por $G_1||G_2$. Dado dois autômatos G e G_2, temos $G = (X, \varepsilon, f, x_0, V)$ e $G_2 = (X_2, \varepsilon_2, f_2, x_{2,0}, V_2)$ através da qual se obtém:

$G_1||G_2 = (X_1 \times X_2, \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2, f_1||f_2, (x_{1,0}, x_{2,0}), (V_1 \cup V_2))$.

Sendo

$$f_{1k2}((x_1,x_2),e) = \begin{cases} (f_1(x_1,e), f_2(x_2,e)) & \text{se } e \in \Gamma_1(x_1) \\ & \quad \cap \Gamma_2(x_2), \\ (f_1(x_1,e), x_2) & \text{se } e \in \Gamma_1(x_1) \\ & \quad \setminus \varepsilon_2, \\ (x_1, f_2(x_2,e)) & \text{se } e \in \Gamma_2(x_2) \\ & \quad \setminus \varepsilon_1, \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta operação é associativa, ou seja:

$$G_1||G_2||G_3 = (G_1||G_2)||G_3 = G_1||(G_2||G_3). \quad (3)$$

2.3 Modelos Computacionais de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo utiliza-se de geradores de números pseudoaleatórios e distribuições de probabilidade acumulativa relacionadas ao sistema em estudo. Essa abordagem também pode ser referida como simulação estática.

Conforme preconiza Maia (2022), a simulação de Monte Carlo requer recursos computacionais significativos devido à sua natureza intensiva. No entanto, sua implementação para sistemas de autômatos estocásticos de Markov é relativamente direta, aproveitando a propriedade sem memória da distribuição exponencial e a geração de números aleatórios uniformes.

Na simulação de Monte Carlo, é comum estimar o valor esperado de uma variável relevante. Essa estimativa é representada pela seguinte equação:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \quad (4)$$

Onde $\hat{\theta}$ é a estimativa do valor esperado da variável aleatória X, sendo X_i a i-ésima amostra de X e n é o número total de amostras. Esta equação representa a média aritmética das amostras, que é uma maneira comum de estimar o valor esperado de uma variável aleatória em um processo estocástico.

Rede de Petri T_temporizada estocástica: A rede de Petri temporizada representa uma evolução da rede de Petri clássica, incorporando uma dimensão temporal essencial para alcançar o comportamento dinâmico de sistemas complexos. Essa extensão viabiliza a modelagem de sistemas nos quais o tempo desempenha um papel crucial. Os tempos associados a essas redes podem ser determinísticos ou estocásticos, refletindo a previsibilidade ou a aleatoriedade dos eventos do sistema. Tal distinção entre os tempos determinísticos, com intervalos fixos, e os estocásticos, regidos por distribuições de probabilidade, torna as redes de Petri temporizadas adequadas para representar uma ampla gama de cenários reais.

A abordagem temporal pode ser aplicada de duas maneiras distintas: aos lugares ou às transições. Nas redes "P-temporizadas", a temporalidade está associada aos lugares, enquanto as redes "T-temporizadas"estão associadas às transições. Essa flexibilidade permite a modelagem das propriedades temporais dos elementos-chave da rede, adaptando-se melhor às características do sistema. Dessa forma, as redes de Petri temporizadas oferecem uma representação mais abrangente e dinâmica, possibilitando a análise do comportamento temporal dos sistemas.

Definição *5.* As denominadas redes de Petri T_temporizadas Wang (1998) são definidas conforme a sêxtupla $N = (P, T, A, w, x_0, D)$, onde:

- P é o conjunto finito de lugares;
- $T = T_D \cup T_I$ é o conjunto finito de transições temporizadas T_D e instantâneas T_I;
- A é o conjunto finito de arcos, dados por $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$;
- $w\colon A \to \mathbb{N}$ representa a função de peso;
- $x_0 \in \mathbb{N}^n$ representa o estado inicial da rede, no qual n corresponde ao número de lugares na rede;
- $D = \{D_i : i \in T_D\}$ é o conjunto de tempos de atraso que devem ser respeitados para se disparar as transições temporizadas após habilitadas, sendo D_i um vetor de tempos de atraso para a transição T_i.

Modelos Tropicais Max-plus: Os modelos tropicais Max-plus, também conhecidos como álgebra tropical Allamigeon et al. (2015), são denotados por $\mathbb{R}_{\max}$ cuja estrutura algébrica é caracterizada por duas operações fundamentais: a soma representada por $\oplus$, e a multiplicação representada por $\otimes$. O operador $\oplus$ corresponde à operação de maximização, enquanto $\otimes$ representa a adição. Em termos operacionais, tais modelos são definidos por:

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \quad (5)$$
$$a \otimes b = a + b \quad (a, b \in R_{\max}) \quad (6)$$

Nos modelos Tropicais Max-plus temporizados Estocásticos (TMPTE), as operações max-plus são enriquecidas com a inclusão de variáveis estocásticas. Essas variáveis estocásticas podem representar incertezas associadas a eventos específicos, permitindo a modelagem de sistemas que evoluem ao longo do tempo de maneira estocástica. De uma maneira mais geral, esses modelos têm sua evolução dinâmica regida por um sistema de equações de estado do tipo:

$$\begin{aligned} x(k) &= A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \\ y(k) &= C \otimes x(k). \end{aligned} \quad (7)$$

Seus vetores $x(k) \in \mathbb{R}^n_{\max}$, $y(k) \in \mathbb{R}^m_{\max}$ e $u(k) \in \mathbb{R}^p_{\max}$ representam respectivamente a k-ésima data de disparo das transições internas (estados), das transições de saída e das transições de entrada, sendo A,B e C matrizes de dimensões apropriadas com elementos em $\mathbb{R}_{\max}$.

3. EXEMPLO NUMÉRICO

3.1 Sistema de serviço não controlada

No contexto da metodologia, avaliamos com uma rede de serviços simples do tipo cliente-servidor. Esse sistema de fila consiste em dois espaços de espera para clientes e um espaço de atendimento pelo servidor, limitado a um cliente por vez. A dinâmica do sistema é temporal, com distintos tempos de admissão, deslocamento do cliente

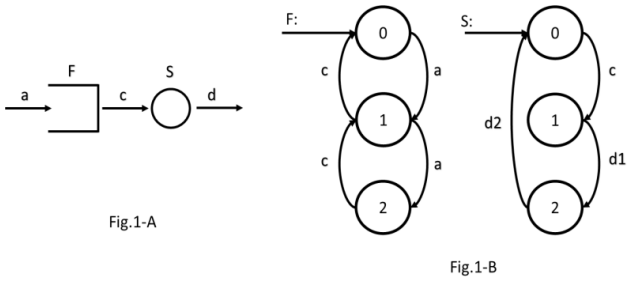

Figura 1. Fig.1-A Rede de serviço de atendimento a clientes: O evento 'a' representa a admissão do cliente'F';'c' corresponde a admissão do cliente pelo servidor 'S'; 'd' é a partida do cliente após o atendimento. Fig.1-B Autômato correspondente G=F||S ao diagrama de blocos

até o servidor e tempo de atendimento. O tempo de atendimento pelo servidor afeta diretamente a dinâmica do sistema, interferindo no tempo de espera da fila. Um diagrama em blocos descrevendo o sistema é apresentado na figura 1-A.

A partir do diagrama em blocos, obtivemos o autômato correspondente apresentado na figura 1-B.

Nesse exemplo numérico, consideramos que os tempos para os eventos de admissão e a movimentação do cliente na fila para o servidor são distribuídos exponencialmente com taxas respectivamente iguais a $E[V_a] = \lambda_a$ e $E[V_c] = 1000\lambda_a$. O tempo de atendimento do cliente pelo servidor obedece à distribuição hypoexponencial com média de $\mu = 1,5$ minutos e desvio padrão de $\sigma = 1,1$ minutos, resultando em um atendimento em dois estágios, com transições definidas por dois eventos d_1 e d_2 que obedecem à distribuição exponencial Maia (2022).

3.2 Abordagem via autômato temporizado estocástico:

A partir do modelo autômato correspondente apresentado na figura 1-B, verificamos que o modelo estocástico autômato possui $3x3 = 9$ espaços de estados, onde obtivemos a cadeia de Markov para os estados: $X_t = \{(0,0);(0,1);(0,2);(1,0);(1,1);(1,2);(2,0);(2,1);(2,2)\}$.

Como os tempos de vida vinculados aos eventos são variáveis, a incerteza sobre o estado do sistema é presente na data t. Diante disso, estabelecemos as probabilidades:

$$\begin{array}{ll} Z_1(t) = P[X_t = (0,0)], & Z_2(t) = P[X_t = (0,1)] \\ Z_3(t) = P[X_t = (0,2)], & Z_4(t) = P[X_t = (1,0)] \\ Z_5(t) = P[X_t = (1,1)], & Z_6(t) = P[X_t = (1,2)] \\ Z_7(t) = P[X_t = (2,0)], & Z_8(t) = P[X_t = (2,1)] \\ Z_9(t) = P[X_t = (2,2)] & \end{array}$$

Por outro lado, verificamos que os tempos de vida seguem uma distribuição exponencial, como mostrado abaixo:

$$F_{v_a} = P[V_a \leq V_a = 1 - e^{\lambda at}] \quad (8)$$
$$F_{v_c} = P[V_c \leq V_c = 1 - e^{\lambda ct}] \quad (9)$$
$$F_{v_d} = P[V_d \leq V_d = 1 - e^{\lambda dt}] \quad (10)$$

Onde V_a, V_c e V_d representam os tempos de vida para os eventos a, c e d respectivamente. Demonstramos ser viável

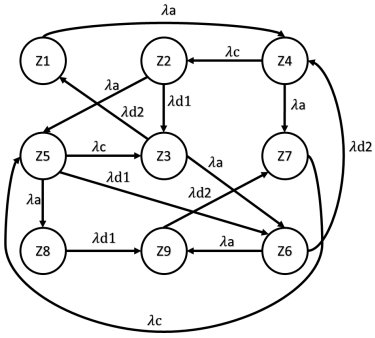

Figura 2. Cadeia de Markov correspondente ao sistema de fila simples com dois lugares de espera e um servidor para atendimento.

representar o autômato estocástico como uma cadeia de Markov, conforme ilustrado na Figura 2.

Através da cadeia de Markov foram formuladas as equações de balanço do fluxo para as probabilidades $Z_i(t)$ evidenciadas a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_1(t)}{dt} &= -\lambda_a Z_1 + \lambda_{d2} Z_3 \\
\frac{dZ_2(t)}{dt} &= -(\lambda_a + \lambda_{d1}) Z_2 + \lambda_c Z_4 \\
\frac{dZ_3(t)}{dt} &= -(\lambda_a + \lambda_{d2}) Z_3 + \lambda_{d1} Z_2 \\
\frac{dZ_4(t)}{dt} &= -(\lambda_a + \lambda_c) Z_4 + \lambda_a Z_1 + \lambda_{d2} Z_6 \\
\frac{dZ_5(t)}{dt} &= -(\lambda_a + \lambda_{d1}) Z_5 + \lambda_a Z_2 + \lambda_c Z_7 \\
\frac{dZ_6(t)}{dt} &= -(\lambda_a + \lambda_{d2}) Z_6 + \lambda_a Z_3 + \lambda_{d1} Z_5 \\
\frac{dZ_7(t)}{dt} &= -\lambda_c Z_7 + \lambda_a Z_4 + \lambda_{d2} Z_9 \\
\frac{dZ_8(t)}{dt} &= -\lambda_{d1} Z_8 + \lambda_a Z_5 \\
\frac{dZ_9(t)}{dt} &= -\lambda_{d2} Z_9 + \lambda_a Z_6 + \lambda_{d1} Z_8
\end{aligned}$$

A partir das equações de balanço, foi construída a matriz com as coordenadas dos estados da cadeia de Markov para a obtenção dos cálculos das taxas de produção, que indicam as saídas dos clientes e o número médio de clientes aguardando atendimento. Os resultados desses processos são expressos pela equação:

$$E[X] = 1\times(Z_4+Z_5+Z_6)+2\times(Z_6+Z_7+Z_9)\lambda_s = \lambda_{d2}\times(Z_3+Z_6+Z_9) \quad (11)$$

Finalizando o modelo analítico, um resultado significativo afirma que distribuições de probabilidade bastante abrangentes podem ser aproximadas com precisão arbitrariamente alta ao utilizar a distribuição exponencial como elemento de base. Isso implica que uma variedade de distribuições para tempos de vida pode ser expressa em termos de distribuições exponenciais. Como consequência, possibilita-se obter uma cadeia de Markov equivalente, proporcionando uma representação eficiente e aproximada para uma gama diversificada de cenários.

3.3 Abordagem via Rede de Petri T_temporizada estocástica:

A rede de Petri T-temporizada estocástica (RPTE), na figura 3, corresponde à descrição do sistema em blocos discutida anteriormente. Para modelar a rede, foi necessário expandir os lugares e transições para representar o sistema equivalente.

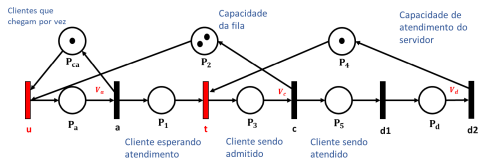

Figura 3. Rede de Petri correspondente ao sistema de fila simples temporizada estocástica com dois lugares de espera e um servidor, onde: V_a é o tempo de admissão na fila; V_c é o tempo de deslocamento do cliente até o servidor e V_d o tempo de atendimento.

No sistema de fila equivalente, consideramos oito lugares e seis transições. Os lugares são: P_a para a admissão do cliente, P_{ca} que controla a admissão de um cliente por vez, P_1 que corresponde aos dois lugares na fila de espera, P_2 limita a capacidade da fila, P_3 para a admissão pelo servidor, P_4 que controla a capacidade do servidor, P_5 para o atendimento do servidor, e P_d como lugar auxiliar para a temporização do servidor.

Explicitando as transições, temos: a entrada U temporizada correspondente à admissão do cliente, a transição a representa o cliente na fila. A transição temporizada t está associada ao tempo de deslocamento até o servidor, c quando o cliente é admitido pelo servidor e a transição temporal d representa o fim do atendimento.

3.4 Modelo Tropical max-plus estocástico:

Em correspondência ao sistema apresentado, modelamos as equações recursivas para modelos tropicais. Na modelagem, consideramos as transições u, a, t, c e d como relacionadas no desenvolvimento da rede de Petri T-temporizada. Para o sistema em questão, foram obtidas as seguintes equações recursivas:

$$u(k) = a(k-1) \oplus c(k-n) \tag{12}$$
$$a(k) = V_a \otimes u(k) \tag{13}$$
$$t(k) = a(k) \oplus d(k-1) \tag{14}$$
$$c(k) = V_c \otimes t(k) \tag{15}$$
$$d(k) = V_d \otimes c(k) \tag{16}$$

Simplificando as equações recursivas, temos:

$$a(k) = V_a \otimes a(k-1) \oplus V_a \otimes c(k-n) \tag{17}$$
$$c(k) = V_c \otimes (a(k) \oplus d(k-1)) \tag{18}$$
$$d(k) = V_d \otimes c(k) \tag{19}$$

Explicitando os operadores do sistema obteve-se:

$$a(k) = \max(V_a + a(k-1), V_a + c(k-n)) \tag{20}$$
$$c(k) = V_c + \max(a(k), d(k-1)) \tag{21}$$
$$d(k) = V_d + c(k) \tag{22}$$

As equações das condições iniciais do sistemas são:

$$a(0) = V_a \tag{23}$$
$$a(k) = c(k) = d(k) = -\infty \text{ se } k < 0 \tag{24}$$

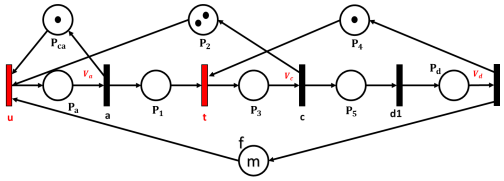

Figura 4. Rede de Petri para sistema de fila com controle.

3.5 Estudo preliminar: Sistema de serviço Controlado

Para comparar o comportamento dos sistemas, implementamos um controle para reduzir o tempo de espera na fila, otimizando todo o sistema, permitindo uma análise de sincronismo. Tomando-se como base a rede de Petri, foi elaborado o grafo de evento temporizado (GET) apresentado na figura 4.

Para que o sistema de controle da rede seja efetiva, é necessário obter os parâmetros m e f, inicialmente determinados pelo valor máximo para o autovalor $E_{\max}$, consoante as equações explicitadas a seguir.

$$E_{\max} = \left\{ \frac{1}{\lambda_a}, \frac{\left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_c}\right)}{n}, \frac{\left(\frac{1}{\lambda_c} + \mu_d\right)}{1} \right\} \tag{25}$$

$$E_{\text{controlador}} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_c} + \mu_d\right)}{m} \tag{26}$$

4. RESULTADOS

Para avaliar os resultados, tomamos por base os valores obtidos do modelo analítico representados por autômato estocástico. A partir desses dados foram desenvolvidos os modelos de interesse na comparação, sendo os modelos de Monte Carlo, representados pela rede de Petri temporizada estocástica (RPTE), e o modelo tropical Max-plus temporizado estocástico (TMPTE).

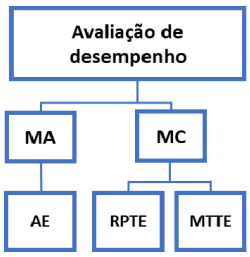

Figura 5. Avaliação de desempenho dos modelos, onde MA representa Modelo analítico, MC Modelo de Monte Carlo, AE Autômato estocástico, RPTE representa rede de Petri temporizada estocástica e modelo TMPTE modelo tropical temporizado estocástico.

4.1 Resultados de Simulação sem o controlador

Resultados Modelo Analítico: O modelo analítico foi desenvolvido por intermédio de autômato estocástico e tem como principal finalidade o cálculo dos tempos médios de espera na fila em função da variação de λ_a.

Para as simulações do modelo analítico, desenvolvemos um programa utilizando o software ScicosLab versão 4.4.2,

uma variante do software Scilab. Utilizamos um computador Acer com processador Intel Core i5 de 2,70 GHz e 8 GB de memória RAM para rodar o código. Os resultados da simulação em função da variação de λ_a podem ser observados na Tabela 1.

Tabela 1. Resultados modelo analítico.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Tempo de execução [s]
0,1	0,2072	0,000223
0,4	0,8877	0,000482
0,6	1,2895	0,000241
1,0	1,8472	0,000289
2,0	2,4326	0,000149

Como podemos observar na Tabela 1, são apresentados os tempos médios de espera na fila e os tempos de execução do código em suas respectivas variações do parâmetro λ_a.

Embora a modelagem matemática do sistema seja complexa no modelo analítico, o tempo computacional desse modelo foi praticamente instantâneo, se mostrando uma alternativa viável para a implementação de sistemas "online" que exigem respostas rápidas.

Resultados Rede de Petri T-temporizado Estocástico: Nas simulações do modelo de RPTE foi feito considerando-se o atendimento de 10.000 clientes, sendo os 1000 primeiros clientes considerados transitórios de aquecimento do sistema. Para assegurar a obtenção de dados estatísticos, foram realizadas 10 rodadas para cada valor de λ_a, onde os resultados são apresentados na tabela 2 com os respectivos intervalos de confiança de 95%.

Tabela 2. Resultados modelo Rede de Petri T-Temporizado estocástico com simulação de dois lugares na fila de espera.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,2062	[0,2015; 0,2110]	3,5230
0,4	0,8843	[0,8712; 0,8976]	3,4876
0,6	1,2866	[1,2783; 1,2949]	3,5668
1,0	1,8531	[1,8278; 1,8855]	3,5854
2,0	2,4032	[2,3879; 2,4186]	3,6758

As simulações da RPTE, apresentadas na Tabela 2, mostraram tempos de espera na fila, condizentes com os resultados obtidos através do modelo analítico. Quanto ao tempo de simulação, percebemos que não houve alterações significativas ao modificar os valores de Λ_a, mantendo-se praticamente constante em todas as situações.

Para avaliar melhor o comportamento do sistema, incluímos uma simulação com quatro lugares na fila de espera apresentados na tabela 3.

Comparando as duas simulações, percebemos que não houve alterações significativas no tempo de execução do código. Em termos percentuais, a diferença entre as médias dos tempos de execução foi de aproximadamente 0,5%.

Resultados Modelo tropical Max-plus Estocástico: As simulações do modelo TMPTE obedeceram aos mesmos critérios de parâmetros utilizados nas simulações do modelo de RTPE. Os resultados obtidos nas simulações são demonstrados na tabela 4.

Tabela 3. Resultados modelo Rede de Petri T-Temporizado estocástico com simulação de quatro lugares na fila de espera.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,2164	[0,2140; 0,2188]	3,5678
0,4	1,3454	[1,3161; 1,3747]	3,6687
0,6	2,5101	[2,4733; 2,5469]	3,3411
1,0	4,1725	[4,1157; 4,2294]	3,6473
2,0	5,3813	[5,3452; 5,4172]	3,7018

Tabela 4. Resultados modelo tropical Max-plus temporizado estocástico para simulação com dois lugares na fila de espera.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,2076	[0,2021; 0,2129]	1,7461
0,4	0,8870	[0,8736; 0,9006]	1,7663
0,6	1,2854	[1,2696; 1,3013]	1,7725
1,0	1,8482	[1,8299; 1,8666]	1,6877
2,0	2,4130	[2,3956; 2,4315]	1,6988

Assim como no modelo de RTPE, realizamos a mesma simulação considerando quatro lugares na fila de espera para o modelo TMPTE conforme a tabela 5.

Tabela 5. Resultados modelo tropical Max-plus temporizado estocástico para simulação com quatro lugares na fila de espera.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,2147	[0,2092; 0,2202]	1,7168
0,4	1,3699	[1,3414; 1,3984]	1,7410
0,6	2,5168	[2,4624; 2,5712]	1,7507
1,0	4,2378	[1,1769; 4,2987]	1,7172
2,0	5,3613	[5,3196; 5,4031]	1,7224

Avaliando os tempos de execução dos códigos nas duas situações, também percebemos que as alterações não representam muitas diferenças, onde em termos percentuais a variação do tempo médio foi de 0,27%.

Por apresentar somente as equações recursivas, o modelo TMPTE teve uma menor complexidade de implementação do código. O tamanho do código do modelo TMPTE é 50% menor comparado ao código do modelo de RPTE, viabilizando a implementação em equipamentos com pouco espaço de armazenamento.

Além da facilidade de implementação, os tempos de simulação do modelo TMPTE foram consideravelmente menores, representando uma redução de aproximadamente 51,57% em relação à RPTE.

A figura 6 apresenta graficamente o comparativo dos tempos de execução do código com as variações dos valores de λ_a com os respectivos modelos.

4.2 Resultados de Simulação Modelos Computacionais Monte Carlo com o controlador

Para os sistemas computacionais de Monte Carlo, foram projetados os controladores para sincronização do sistema,

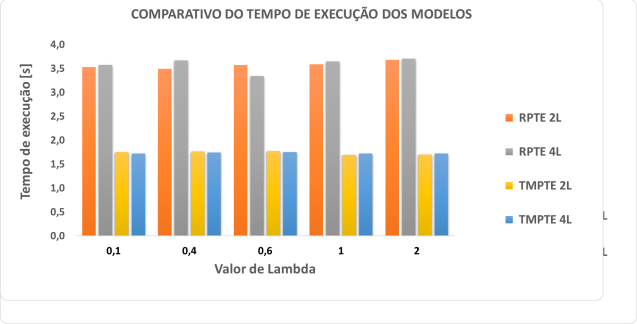

Figura 6. Gráfico comparativo doa tempos de execução dos modelos Monte Carlo representados por RPTE e modelo TMPTE com dois e quatro lugares na fila de espera com a variação do valore de λ_a

tendo como consequência a otimização do tempo de espera na fila.

Rede de Petri T-temporizado Estocástica com controlador: Seguindo os mesmos critérios anteriores, obtivemos os resultados da RPTE apresentados na tabela 6.

Tabela 6. Resultados rede de Petri T-temporizado estocástico com dois lugares na fila de espera com controle.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,1703	[0,1612; 0,1794]	3,9531
0,4	0,4955	[0,4852; 0,5068]	4,1027
0,6	0,6180	[0,6074; 0,6287]	4,0909
1,0	0,8179	[0,8103; 0,8256]	4,4758
2,0	1,0852	[1,0639; 1,1216]	4,0965

Analisando os resultados obtidos na Tabela 6, observamos uma considerável redução nos tempos de espera na fila implemetando o controlador. Contudo, em contrapartida, houve um aumento de aproximadamente 13% no tempo de execução do código com a implementação do controle.

Prosseguindo com as simulações, a tabela 7 apresenta os resultados obtidos com o modelo RPTE com quatro lugares na fila de espera controlada.

Tabela 7. Resultados RTPE com quatro lugares na fila de espera com controle.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,1798	[0,1685; 0,1731]	4,1286
0,4	0,4855	[0,4813; 0,4897]	4,0530
0,6	0,6371	[0,6314; 0,6428]	4,0021
1,0	0,8281	[0,8170; 0,8392]	4,0961
2,0	1,0912	[1,0869; 1,0954]	4,1293

Comparando os resultados obtidos nas tabelas 6 e 7, percebemos que não houve mudanças relevantes nos tempos de execução do código e no tempo de espera.

Modelo Tropical Max-plus Temporizado Estocástica com controlador: Finalmente, procedemos com as simulações do modelo TMPTE com o controle de fila de espera, apresentados nas tabelas 8 e 9 respectivamente.

Tabela 8. Resultados modelo tropical Max-plus temporizado estocástico com controle.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,1711	[0,1673; 0,1750]	2,6702
0,4	0,4911	[0,4824; 0,4999]	2,0439
0,6	0,6364	[0,6291; 0,0107]	2,1756
1,0	0,8373	[0,8296; 0,8451]	2,1352
2,0	1,0758	[1,0671; 1,0847]	2,2364

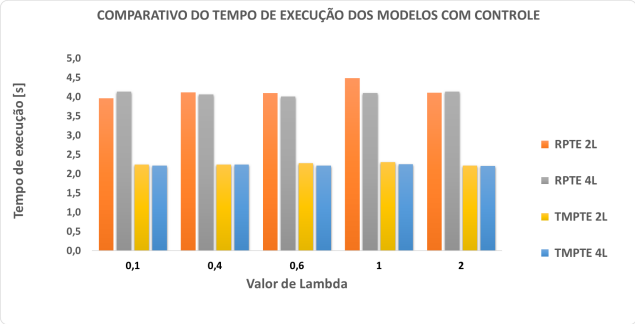

Figura 7. Gráfico comparativo doa tempos de execução dos modelos Monte Carlo com controle representados por RPTE e modelo TMPTE com dois e quatro lugares na fila de espera com a variação do valore de λ_a

Semelhante ao modelo RPTE, o modelo TMPTE apresentou os resultados de tempos de espera na fila muito próximos. Além disso, observou-se um aumento de aproximadamente 22% nos tempos de simulação.

Tabela 9. Resultados modelo tropical Max-plus temporizado estocástico com controle.

Parâmetro λ_a	Tempo médio de espera na fila [s]	Intervalo de confiança	Tempo de execução [s]
0,1	0,1681	[0,1630; 0,1733]	2,2072
0,4	0,4905	[0,4838; 0,4975]	2,2333
0,6	0,6354	[0,6278; 0,6429]	2,2047
1,0	0,8302	[0,8220; 0,8383]	2,2457
2,0	1,0764	[1,0713; 1,0816]	2,2006

Para o modelo TMPTE com quatro lugares na fila de espera, tanto os tempos de espera quanto os tempos de simulação não apresentaram alterações significativas.

Na figura 7, é apresentado o gráfico dos tempos de execução do código com as variações dos valores de λ_a com os respectivos modelos com controle de tempo de espera.

4.3 Avaliação do custo computacional

Modelo analítico: Conforme Maia (2022), a análise da complexidade na abordagem analítica é realizada considerando a composição paralela dos submodelos, onde a complexidade no pior caso é expressa pela seguinte equação:

$$O((\prod_{i=1}^{L} |G_i| \times \prod_{i=1}^{P} |T_i|)^3) \tag{27}$$

Neste contexto, O representa a ordem de crescimento do modelo, $|G_i|$ refere-se ao número de estados dos submo-

delos, e $|T_i|$ são os autômatos que representam a temporização dos eventos estocásticos com distribuição não exponencial ou não-markoviana.

Os termos elevado ao cubo refletem a complexidade cúbica associada à inversão das matrizes e outras operações computacionais intensivas, que crescem exponencialmente com o aumento do número de estados e mecanismos de temporização. Assim, à medida que o número de estados ou mecanismos de temporização aumenta, o custo computacional do sistema se eleva consideravelmente, refletindo a complexidade adicional introduzida por essas variáveis.

Modelos Monte Carlo: Na comparação entre os modelos de Monte Carlo representados por RPTE e modelo TMPTE, os dados mostram que os tempos de simulação não variam significativamente com o aumento do número de fichas, sugerindo que a complexidade e o custo computacional não são sensivelmente afetados.

No entanto, a introdução do controle no tempo de espera tem um impacto notável no tempo de execução e na complexidade. A implementação desse controle adiciona uma sobrecarga adicional, resultando em um aumento significativo no tempo de execução para ambos os modelos. Sendo assim, o comportamento da complexidade do sistema pode ser expresso pela seguinte equação:

$$O(N_t \times N_a \times N_r) \tag{28}$$

Onde N_t representa o número de transições, N_a o número de amostras e N_r o número de rodadas. Esta equação reflete a complexidade proporcional do sistema, sugerindo um crescimento linear na complexidade e no custo computacional. Em outras palavras, a complexidade do sistema não cresce exponencialmente, mas sim de maneira multiplicativa, conforme o número de parâmetros envolvidos. Na prática, N_a e N_r têm um impacto significativo devido ao grande volume de amostras e rodadas necessárias.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho realizou uma comparação entre três abordagens distintas para modelagem e análise de um sistema de fila simples, sendo o modelo anaítico representado por autômato estocástico e os modelos de Monte Carlo representados por rede de Petri temporizada estocástica e modelo tropical Max-plus temporizado estocástico.

O modelo analítico, via autômato estocástico, por apresentar resultados exatos, foi utilizado para o cálculo dos tempos de espera na fila. Este modelo requer um aprofundamento matemático maior, entretanto, o tempo computacional é quase instantâneo; isso pode ser interessante em aplicações que requerem resposta instantânea, ou "on-line".

A rede de Petri temporizada estocástica, permite desenvolver modelos computacionais de Monte-Carlo de forma compacta e transparente que permitem a análise matemática e o desenvolvimento de modelos matriciais, entretanto o custo do tempo computacional é muito maior do que aquele obtido pelo modelo analítico e modelo tropical Max-plus.

Modelos dinâmicos tropicais Max-plus estocásticos são compactos, descritos por equações recursivas, diretamente implementadas com os operadores "soma"e "maximização", o custo de implementação e de tempo computacional é, em geral, menor do que aquele da rede de Petri temporizada estocástica.

O artigo também apresenta resultado, muito preliminar, mas que mostra o potencial para o desenvolvimento de aplicações em controle.

A abordagem metodológica apresentada neste trabalho não apenas oferece uma compreensão mais profunda do sistema em estudo, mas também estabelece bases para pesquisas futuras. A aplicação conjunta de modelos estocásticos, rede de Petri t-temporizada e o modelo Tropical Max-plus abre novas perspectivas para a resolução de problemas complexos e aprimoramento contínuo de sistemas dinâmicos.

REFERÊNCIAS

Allamigeon, X., Benchimol, P., Gaubert, S., and Joswig, M. (2015). Tropicalizing the simplex algorithm. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 29(2), 751–795.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronisation and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems.* John Wiley and Sons, New York.

Cassandras, C.G. and Lafortune, S. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems.* Springer US.

Hardouin, L., Cottenceau, B., Shang, Y., and Raisch, J. (2018). Control and state estimation for max-plus linear systems. *Foundations and Trends® in Systems and Control*, 6(1), 1 – 118.

J.Komenda, Lahaye, S., Boimond, J.L., and den Boom, T. (2018). Max-plus algebra in the history of discrete event systems. *Annual Reviews in Control*, 45, 240–249.

Maia, C.A. (2022). Stochastic timed discrete-event systems: Modular modeling and performance evaluation through markovian jumps. *IEEE Access*, 10, 108332–108341. doi:10.1109/ACCESS.2022.3213697.

Schutter, B.D., van den Boom, T., Xu, J., and Farahani, S.S. (2020). Analysis and control ofmax-plus linear discrete-event systems: An introduction. *Discrete Event Dynamic Systems*, 30, 25 – 54.

Sernizon-Guimarães, L. and Maia, C.A. (2020). Just-in-time balancing of feedback assembly lines via constrained-linear tropical model. In *15th IFAC Workshop on Discrete Event Systems WODES 2020*, 62–67. Virtual.

Souza, L.M.G.D. and Maia, C.A. (2019). Analise de sistemas a eventos discretos via modelos modulares: Aplicação a sistemas de servico com abandono de cliente. *14 Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente -SBAI'14*, 503–508.

Wang, J. (1998). *Timed Petri Nets.* Kluwer Academic Publishers.