FILTRO DE KALMAN UNSCENTED ADAPTATIVO PARA ESTIMAÇÃO DE ATITUDE REPRESENTADA POR QUATÉRNIOS

ANTONIO C. B. CHIELLA*, BRUNO O. S. TEIXEIRA*, GUILHERME A. S. PEREIRA*

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brazil

Emails: acbchiella@ufmg.br, brunoot@ufmg.br, gpereira@ufmg.br

Abstract— Attitude estimation based on inertial sensors is a vital component in applications ranging from robotics to augmented reality. Therefore, algorithms that yields accurate estimates and are robust to measurement failures are of fundamental importance. In this work, an adaptive algorithm based on the unscented Kalman filter is presented for the estimation of attitude represented by unit quaternion. The proposed algorithm is tested with experimental data, and its results are compared to the results obtained from an open-source algorithm based on complementary filtering.

Keywords— Adaptive unscented Kalman filter, attitude estimation, covariance matching, AHRS.

Resumo— A estimação da atitude baseada em sensores inerciais é um componente vital para aplicações que variam de robótica à realidade aumentada. Diante disso, algoritmos que produzam estimativas precisas e que sejam robustos a falhas de medição são de fundamental importância. Neste trabalho, apresenta-se um algoritmo adaptativo baseado no filtro de Kalman *unscented* para estimação da atitude representada por quatérnios. O algoritmo proposto é testado com dados experimentais, e o seu resultado é confrontado com os resultados obtidos por um algoritmo *open-source* baseado em filtragem complementar.

Palavras-chave— Filtro de Kalman *unscented* adaptativo, estimação da atitude, *covariance matching*, AHRS.

1 Introdução

A estimação da atitude é necessária em diversas aplicações, como navegação e controle de movimento de veículos autônomos (Costanzi et al., 2016). Desta forma, estimativas de orientação precisas e confiáveis são de fundamental importância. A atitude pode ser representada por diferentes parametrizações, sendo mais comum a representação por ângulos de Euler e quatérnios unitários, sendo essa última preferida por não apresentar descontinuidades em sua representação (Crassidis et al., 2007).

Sistemas de referência de atitude e rumo (AHRS, do inglês *attitude and heading reference systems*) são sistemas que fornecem informações sobre a orientação 3D de um corpo em relação a um referencial fixo. Tipicamente, um AHRS consiste no conjunto de girômetros, acelerômetros e magnetômetros triaxiais. As informações desses sensores são combinadas por meio de algoritmos de fusão sensorial para então produzir as estimativas da orientação (Cavallo et al., 2014).

Entre os algoritmos de estimação, o filtro de Kalman (KF) se destaca por ser o mais utilizado. Para o problema de estimação de atitude, variações do KF para o caso não linear, como filtro de Kalman estendido (EKF) (Crassidis et al., 2007) e *unscented* (UKF) (Crassidis and Markley, 2003) foram desenvolvidos. Crassidis and Markley (2003) reportam o UKF como produzindo melhores resultados, sendo menos sensível a erros de inicialização, com o preço de um pequeno aumento do tempo de processamento. Com relação ao custo computacional, algoritmos baseados em filtragem complementar, como o desenvolvido em (Madgwick et al., 2011), são uma boa alternativa para *hardware* com baixo poder de processamento. No entanto, cada um desses algoritmos possuem diferentes parâmetros de sintonia que impactam diretamente em seu desempenho. Devido às variadas adversidades enfrentadas em aplicações reais, encontrar valores adequados para esses parâmetros é uma tarefa desafiadora.

Neste trabalho, a estimação de atitude com UKF utilizando a representação por quatérnios é investigada. Neste contexto, dois problemas surgem: (i) algoritmos baseados no UKF pertencem a sistematização Euclidiana, contendo operações de soma e ponderação que quando aplicadas aos quatérnios unitários podem violar a restrição de norma unitária, tal que, modificações no UKF tradicional são necessárias; (ii) devido às diferentes adversidades das aplicações reais, as medições providas pelos sensores podem ser corrompidas, gerando valores anormais. Nessas condições, algoritmos tradicionais, podem gerar estimativas incorretas e não confiáveis, devido à variação temporal da incerteza de medição.

A forma clássica de tratar a variação temporal da incerteza é através de filtros adaptativos, nos quais, os parâmetros estatísticos que caracterizam a incerteza são juntamente estimados com os estados dinâmicos do sistema. Neste contexto destacam-se abordagens baseadas nas técnicas referidas como *covariance matching* (CM) (Mehra, 1972; Myers and Tapley, 1976), múltiplos modelos, como IMM (do inglês, *interacting multiple* *models*) (Li and Bar-Shalom, 1994; Bar-Shalom et al., 2004) e *covariance scaling* (CS) (Hide et al., 2004; Hajiyev and Soken, 2016). Nota-se que, assim como o KF, essas abordagens adaptativas também pertencem a sistematização Euclidiana, necessitando assim modificações para serem utilizadas com quatérnios unitários. Desta forma, a principal contribuição deste trabalho é um algoritmo adaptativo baseado em UKF para estimação de atitude utilizando a representação por quatérnios. A restrição de norma unitária do quatérnio é garantida pelo uso da parametrização do quatérnio unitário em *vetor rotação* (Sipos, 2008; Menegaz and Ishihara, 2018). A parte adaptativa do algoritmo é baseada na abordagem originalmente conhecida como *covariance matching* (Mehra, 1972). Essa abordagem apresenta bons resultados na estimação da matriz de covariância, quando comparado com a abordagem CS, e também uma maior simplicidade, quando comparado com abordagens baseadas em múltiplos modelos. O algoritmo proposto é testado com dados reais coletados de girômetro, acelerômetro e magnetômetro triaxiais. O resultado é comparado com os resultados obtidos pelo algoritmo UKF modificado para quatérnios e com o algoritmo de código aberto baseado em filtragem complementar proposto em (Madgwick et al., 2011).

2 Quatérnios como Rotações

Os quatérnios formam uma álgebra de quatro dimensões sobre os números reais e podem ser utilizados para parametrizar o grupo de rotações em torno da origem $SO(3)$. Neste caso, os quatérnios são restritos à norma unitária. O conjunto dos quatérnios unitários, denotado por $\mathbb{H}_1$, forma um grupo sobre operações de multiplicação, porém não sobre soma, subtração e ponderação (Menegaz and Ishihara, 2018).

2.1 Álgebra dos Quatérnios Unitários

O quatérnio unitário pode ser representado como $e = (v,\ n) \in \mathbb{R}^4$ com $\|e\| = 1$. Aqui é usada a noção de que $v \in \mathbb{R}$ é a parte real e $n \in \mathbb{R}^3$ é a parte imaginária (ou vetorial), em analogia aos números complexos. Assim, dada a rotação de um ângulo θ sobre um eixo unitário w, também chamado de representação eixo-ângulo (w, θ), o quatérnio unitário correspondente é $e = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) w\right)$. Definidos dessa maneira, os quatérnios unitários cobrem o SO(3) duas vezes, o que significa que $e = -e$. A operação inversa para quatérnios unitários é igual ao seu conjugado, dada por $e^{-1} = e^* = (v,\ -n)$. O produto entre dois quatérnios é definido como $e_a \otimes e_b \triangleq \left(v_a v_b - n_a^T n_b, v_a n_b + v_b n_a + n_a \times n_b\right)$, em que $\otimes$ e $\times$ denotam os operadores de multiplicação de quatérnios e o produto vetorial, respectivamente (Sipos, 2008).

2.2 Parametrização em Vetor Rotação

Seja o quatérnio unitário $e = (v,\ n)$ e o *vetor rotação* $r = \theta w$ representando uma rotação θ em torno do eixo unitário w. O mapeamento do quatérnio para o *vetor rotação*, também referido como *mapeamento logaritmo*, é dado por (Menegaz and Ishihara, 2018)

$$r = \begin{cases} 2\arccos(v)\,\frac{n}{\|n\|},\ \text{se } \|n\| \neq 0, \\ [0]_{3\times 1}\,,\ \text{se } \|n\| = 0. \end{cases} \tag{1}$$

O mapeamento inverso, também referido como *mapeamento exponencial*, é dado por (Menegaz and Ishihara, 2018)

$$e = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{\|r\|}{2}\right),\ \sin\left(\frac{\|r\|}{2}\right)\frac{r}{\|r\|}\right),\ \text{se } \|r\| \neq 0 \\ (1,\ [0]_{3\times 1})\ \text{se } \|r\| = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Por brevidade, as operações que mapeiam o *vetor rotação* para o quatérnio unitário (2) e o inverso (1) são condensados nas operações $e = \mathrm{R2Q}(r)$ e $r = \mathrm{Q2R}(e)$, respectivamente.

2.3 Operações de Soma, Subtração e Média Ponderada

A diferença entre dois quatérnios e_a e $e_b \in \mathbb{H}_1$ é definida como

$$e_a \ominus e_b \triangleq \mathrm{Q2R}\left(e_a \otimes e_b^*\right), \tag{3}$$

resultando em um *vetor rotação*. Similarmente, para os vetores ξ_a e ξ_b pertencentes ao espaço Euclidiano, esta operação seria dada por $\xi_a - \xi_b$.

A operação de soma entre um quatérnio $e_a \in \mathbb{H}_1$ e um *vetor rotação* $r \in \mathbb{R}^3$, é definida como

$$e_a \oplus r \triangleq \mathrm{R2Q}\,(r) \otimes e_a, \tag{4}$$

resultando em um quatérnio unitário. Similarmente, no espaço Euclidiano, esta operação seria dada por $\xi_a + \xi_b$.

Por fim, define-se a operação de soma ponderada como

$$\bar{e} \triangleq \mathrm{WM}\,(E, W)\,, \tag{5}$$

em que $\bar{e}$ é a média ponderada, $E = \{e_1 ... e_{n_w}\}$ é um conjunto de quatérnios unitários e $W \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um vetor de pesos. Para o caso Euclidiano, a média ponderada é dada por $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{n_w} W_i \xi_i$. No caso de quatérnios unitários, essa operação não possui uma forma fechada. Neste trabalho, o algoritmo do gradiente descendente apresentado em (Pennec, 1998) é utilizado para o cálculo da média ponderada dos quatérnios.

3 Modelagem Matemática

Nesta seção, o modelo dinâmico a tempo discreto utilizado no algoritmo de filtragem é descrito. Primeiro, o modelo cinemático descrevendo a atitude do corpo em relação ao referencial fixo é apresentado. Neste modelo, consideram-se como entradas u_k as velocidades angulares $\omega_k = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \in \mathbb{R}^3$ provenientes de um girômetro triaxial. Na sequência, é apresentado o modelo de observação. Este modelo relaciona variáveis observadas com os estados a serem estimados. Considera-se que a atitude, representada por quatérnios unitários, é diretamente observada, ou seja $y_k = e$. Deste modo, diferentes formas podem ser utilizadas para medir a orientação, como visão computacional (Pereira et al., 2008), sensores estelares (Lee et al., 2017), sensores inerciais (Madgwick et al., 2011), entre outros.

3.1 Modelo Cinemático da Atitude representado por Quatérnios

O modelo de atitude é apresentado em sua forma discretizada por (Crassidis and Markley, 2003)

$$e_k = A_{k-1} e_{k-1}, \tag{6}$$

em que $e_k = [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3]^T \in \mathbb{R}^4$ é a representação vetorial no $\mathbb{R}^4$ do quatérnio unitário, k denota o tempo discreto e

$$A_{k-1} \triangleq \mathrm{c}\left(\frac{T}{2}||\omega||\right) \mathrm{I}_{4\times 4} + \frac{T}{2}\mathrm{s}\left(\frac{T}{2}||\omega||\right)\Omega(\omega),$$

$$\Omega(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Por conveniência, a partir deste ponto, o quatérnio unitário será sempre representado na forma vetorial no $\mathbb{R}^4$.

O vetor de entradas $u_k = \omega_k \in \mathbb{R}^3$ é corrompido por um termo de polarização (ou *bias*) e por um ruído aleatório, sendo modelado como

$$u_{\mathrm{m},k} = u_k + \beta_k + q_{\mathrm{u},k}, \tag{7}$$

no qual "m"denota que a variável é medida, $u_{\mathrm{m},k} = [\omega_{x_\mathrm{m}} \ \omega_{\mathrm{y_m}} \ \omega_{\mathrm{z_m}}]^T \in \mathbb{R}^3$ são as velocidades angulares medidas por meio de um girômetro, $\beta_k = [\beta_{\omega_\mathrm{x}} \ \beta_{\omega_\mathrm{y}} \ \beta_{\omega_\mathrm{z}}]^T \in \mathbb{R}^3$ são as componentes da polarização, e $q_{\mathrm{u},k} \sim \mathcal{N}([0]_{3\times 1}, Q_\mathrm{u}) \in \mathbb{R}^3$ é o ruido de entrada. Em (6), para se utilizar diretamente as medições, o termo de polarização e o ruído são estimados e subtraídos da medição, ou seja $u_k = u_{\mathrm{m},k} - \beta_k - q_{\mathrm{u},k}$.

Devido à polarização, que pode variar com o tempo, o modelo cinemático baseado nas medições do girômetro sofre com o *drift* temporal. Os termos de polarização β_k são então modelados como um processo *random walk*,

$$\beta_k = \beta_{k-1} + q_{\beta,k-1}, \tag{8}$$

em que $q_\beta \sim \mathcal{N}([0]_{3\times 1}, Q_\beta) \in \mathbb{R}^3$, sendo juntamente estimadas com os outros estados do sistema, constituindo um vetor de estimação conjunta de estados e parâmetros definido como $x_k \triangleq \begin{bmatrix} e_k^T & \beta_k^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^7$.

As Equações (6) e (8) compõem o *modelo de processo*, que pode ser reformulado de forma compacta como

$$x_k = f\left(x_{k-1}, u_{k-1}, q_{k-1}, k-1\right), \tag{9}$$

em que f denota uma função não linear do estado x_{k-1}, vetor de entradas u_{k-1}, e ruído de processo $q_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} q_{\mathrm{u},k-1}^T & q_{\beta,k-1}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$.

3.2 Modelo de Observação

Neste trabalho, assume-se que a medição da atitude é realizada diretamente em quatérnio unitário, o que significa que o vetor de medição é definido como

$$y_k \triangleq e_\mathrm{m}. \tag{10}$$

Devido à diversos fatores, as medições são geralmente corrompidas por erros aleatórios. Assim, o modelo de medição é dado por

$$e_\mathrm{m} = e_k \oplus r_k, \tag{11}$$

em que $r_k \sim \mathcal{N}([0]_{3\times 1}, R_k) \in \mathbb{R}^3$ é o ruído de medição parametrizado como *vetor rotação*. A Equação (11) forma o *modelo de observação*, que pode ser escrito na forma compacta como

$$y_k = h\left(x_k, r_k, k\right), \tag{12}$$

em que h denota uma função dos estados x_k e do ruído de medição r_k.

É importante notar que, em alguns casos a medição da orientação é feita indiretamente. Ou seja, em uma etapa de pré-processamento, dados oriundos de outros sensores, que não mensuram diretamente a orientação, são utilizados para calcular a orientação. Neste trabalho, enquanto os girômetros são utilizados como entrada do modelo de predição (9), em uma etapa de pré-processamento, dados de acelerômetro e de magnetômetro triaxiais são utilizados para calcular a atitude do corpo em ângulos de Euler, sendo estes convertidos para quatérnio unitário, e então utilizado no modelo de medição (12). Como a transformação de ângulos de Euler para quatérnio é não-linear, esta é realizada por meio de uma transformada *unscented*, similar ao realizado em (Terra et al., 2014).

4 Estimação dos Estados

Assume-se que o sistema é modelado pelas equações não lineares no espaço de estados (9) e (12) e que, $\forall k \geq 1$, os dados conhecidos são as saídas medidas y_k em (10) e as entradas u_{k-1} em (7). Assume-se também que, o ruído de processo $q_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_q}$ e de medição $r_k \in \mathbb{R}^{n_r}$ são mutualmente independentes e com matrizes de covariância $Q_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ e $R_k \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, respectivamente.

Dessa forma, sob as suposições anteriores, dada a sequência de medições até o momento presente $y_{1:k} = \{y_1,...,y_k\}$, o problema de estimação consiste em gerar aproximações para a média $\hat{x}_k$ e covariância P_k^{xx} que caracterizam a função de densidade *a posteriori* $\rho(x_k|y_{1:k})$.

Neste trabalho, uma abordagem baseada no filtro de Kalman *unscented* (Julier and Uhlmann, 2004) (UKF) é utilizada. Com relação a esta abordagem, dois problemas surgem: (i) o UKF pertence a sistematização Euclidiana, contendo desta forma operações de soma e ponderação. Como os quatérnios unitários, que representam a atitude, não são fechados sobre essas operações, modificações no UKF tradicional são necessárias para que as restrições de norma unitária sejam preservadas; (ii) o ruído de medição r_k pode ter propriedades estatísticas variáveis com o tempo, o que pode, no pior caso, fazer com que o filtro divirja.

Na sequência, um algoritmo de UKF baseado em (Sipos, 2008; Menegaz and Ishihara, 2018) que preserva as restrições de norma unitária é revisado. Contudo, o algoritmo apresentado considera que a medição é dada diretamente por quatérnio unitário. Em seguida, modificações são propostas para que o algoritmo consiga se adaptar às propriedades estatísticas da medição que variam com o tempo.

4.1 Transformada Unscented para Quatérnios

A transformada *unscented* (UT, do inglês *unscented transform*) é a principal operação do UKF. A UT aproxima a média $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ e sua covariância $P^{yy} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ de uma variável aleatória y obtida a partir da transformação não-linear

$$y = h(x_1, x_2, c), \tag{13}$$

sendo $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ variáveis aleatórias com médias $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ e matrizes de covariância $P^{x_1x_1} \in \mathbb{R}^{(n_1-1)\times(n_1-1)}$ e $P^{x_2x_2} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, respectivamente, e c é um vetor determinístico assumido ser conhecido. Nota-se que o ruído nos estados é parametrizado como *vetor rotação*, então a matriz de covariância tem sua dimensão reduzida.

Define-se o vetor de estados aumentado $\breve{x}_{k-1}$ como

$$\hat{\breve{x}}_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

na qual $\breve{x}_{k-1} \in \mathbb{R}^{\breve{n}}$, $\breve{n} = n_1 + n_2$, bem como a matriz de covariância aumentada $P^{\breve{x}\breve{x}} \in \mathbb{R}^{\breve{n}-1\times\breve{n}-1}$

$$P_{k-1}^{\breve{x}\breve{x}} = \begin{bmatrix} P^{x_1x_1} & [0]_{(n_1-1)\times n_2} \\ [0]_{n_2\times(n_1-1)} & P^{x_2x_2} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

A UT se baseia na escolha determinística de amostras, conhecidas como pontos sigma (SP, do inglês *sigma points*). Os pontos sigma $\mathcal{X}_{j,k-1} \in \mathbb{R}^{\breve{n}}$ e os pesos associados w_j, $j = 1,\ldots,2(\breve{n}-1)$ são escolhidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{k-1} &= \hat{\breve{x}}_{k-1}\,[1]_{1\times 2(\breve{n}-1)} \\ &\quad \oplus \sqrt{\breve{n}-1}\left[\left(P_{k-1}^{\breve{x}\breve{x}}\right)^{1/2} \; -\left(P_{k-1}^{\breve{x}\breve{x}}\right)^{1/2}\right], \end{aligned} \tag{16}$$

$$w_j = \frac{1}{2(\breve{n}-1)}, \tag{17}$$

sendo $\mathcal{X}_{j,k-1}$ a j-ésima coluna da matriz $\mathcal{X}_{k-1} \in \mathbb{R}^{\breve{n}\times 2(\breve{n}-1)}$, $(\cdot)^{1/2}$ é a a matriz triangular inferior da decomposição de Cholesky, e $[1]_{1\times 2(\breve{n}-1)} \in \mathbb{R}^{1\times 2(\breve{n}-1)}$ é um vetor linha com elementos igual a 1. Os SP (16) podem ser particionados como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{k-1}^{x_1} \\ \mathcal{X}_{k-1}^{x_2} \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{X}_{k-1}, \tag{18}$$

onde $\mathcal{X}_{k-1}^{x_1} \in \mathbb{R}^{n_1\times 2(\breve{n}-1)}$ and $\mathcal{X}_{k-1}^{x_2} \in \mathbb{R}^{n_2\times 2(\breve{n}-1)}$.

Então cada SP $\mathcal{X}_{j,k-1}$ é propagado através de h resultando em

$$\mathcal{Y}_{j,k} = h\left(\mathcal{X}_{j,k-1}^{x_1}, \mathcal{X}_{j,k-1}^{x_2}, c\right), \tag{19}$$

sendo $\mathcal{Y}_{j,k} \in \mathbb{R}^{n_y}$ a j-ésima coluna da matriz $\mathcal{Y}_k \in \mathbb{R}^{n_y\times 2(\breve{n}-1)}$.

A partir (19), obtém-se $\hat{y}_k$, P_k^{yy} e P_k^{xy}, que são dados por:

$$\hat{y}_k = \mathrm{WM}\left(\mathcal{Y}_k, w\right), \tag{20}$$

$$P_k^{yy} = \sum_{j=1}^{2(\breve{n}-1)} w_j \left(\mathcal{Y}_{j,k} \ominus \hat{y}_k\right)\left(\mathcal{Y}_{j,k} \ominus \hat{y}_k\right)^T, \tag{21}$$

$$P_k^{xy} = \sum_{j=1}^{2(\breve{n}-1)} w_j \left(\mathcal{X}_{j,k}^{x_1} \ominus x_1\right)\left(\mathcal{Y}_{j,k} \ominus \hat{y}_k\right)^T. \tag{22}$$

Por simplicidade, define-se a transformada *unscented* como a função UT compreendendo o conjunto de equações (16)-(22) , que é

$$\left(\hat{y}_k, P_k^{yy}, P_k^{xy}\right) = \mathrm{UT}\left(\hat{\breve{x}}_{k-1}, P_{k-1}^{\breve{x}\breve{x}}, c, h\right), \tag{23}$$

na qual $\hat{\breve{x}}_{k-1}$ e $P_{k-1}^{\breve{x}\breve{x}}$ são dadas por (14) e (15), respectivamente.

4.2 Algoritmo do UKF para Quatérnio Unitário

Daqui em diante, $\hat{x}_{k|k-1}$ indica uma estimativa de x_k no instante k com base na informação disponível até o instante $k-1$. Similarmente, $\hat{x}_k$ indica uma estimativa de x_k no instante k com base na informação disponível até o instante k. Considere que o ruído de processo é particionado em $q_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} q_{1,k-1}^T & q_{2,k-1}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_q}$ com matriz de covariância $Q_{k-1} \triangleq \operatorname{diag}\left(Q_{1,k-1}, Q_{2,k-1}\right) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$, em que $q_{1,k-1} \in \mathbb{R}^{n_q - n_x + 1}$ é o ruído não-linear relacionado com o estado, $q_{2,k-1} \in \mathbb{R}^{n_x - 1}$ é a parte aditiva relacionada ao estado, n_x é a dimensão do vetor de estados e $\operatorname{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ é uma operação que cria uma matriz bloco diagonal com os elementos A e B. Para melhorar a estabilidade numérica do algoritmo, é considerado que todos os estados possuem um ruído aditivo (Xiong et al., 2006). Então, a etapa de *predição* do algoritmo do UKF é dada por:

$$\left(\hat{x}_{k|k-1}, \tilde{P}^{xx}_{k|k-1}, \emptyset\right) = \mathrm{UT}\left(\hat{\breve{x}}_{k-1}, P^{\breve{x}\breve{x}}_{k-1}, u_{k-1}, f\right), \tag{24}$$

$$P^{xx}_{k|k-1} = \tilde{P}^{xx}_{k|k-1} + Q_{2,k-1}, \tag{25}$$

$$\left(\hat{y}_{k|k-1}, \tilde{P}^{yy}_{k|k-1}, P^{xy}_{k|k-1}\right) = \mathrm{UT}\left(\hat{x}_{k|k-1}, P^{xx}_{k|k-1}, 0, h\right), \tag{26}$$

$$P^{yy}_{k|k-1} = \tilde{P}^{yy}_{k|k-1} + R_k, \tag{27}$$

$$\nu_k = y_k \ominus \hat{y}_{k|k-1}, \tag{28}$$

em que ν_k é a inovação. O vetor de estados aumentado $\breve{x}_{k-1} \in \mathbb{R}^{\breve{n}}$ e a matriz de covariância correspondente $P^{\breve{x}\breve{x}}_{k-1} \in \mathbb{R}^{\breve{n} \times \breve{n}}$ são respectivamente

$$\breve{x}_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} x_{k-1}^T \\ q_{1,k-1}^T \end{bmatrix},$$

$$P^{\breve{x}\breve{x}}_{k-1} \triangleq \begin{bmatrix} P^{xx}_{k-1} & [0]_{(n_x-1)\times(n_q-n_x+1)} \\ [0]_{(n_q-n_x+1)\times(n_x-1)} & Q_{1,k-1} \end{bmatrix},$$

com $\breve{n} = n_q + 1$.

Os estados estimados e a matriz de covariância são corrigidos no instante k através da informação fornecida pela medição y_k na etapa de *assimilação dos dados*, dada por:

$$K = P^{xy}_{k|k-1}\left(P^{yy}_{k|k-1}\right)^{-1}, \tag{29}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} \oplus K\nu_k, \tag{30}$$

$$P^{xx}_k = P^{xx}_{k|k-1} - K P^{yy}_{k|k-1} K^T, \tag{31}$$

em que K é o chamado ganho de Kalman.

4.3 Matriz de Covariância Adaptativa

A incerteza da medição no UKF, apresentado na Seção 4.2, é representada pela matriz de covariância R_k. Este parâmetro é normalmente configurado antes do filtro operar e permanece constante durante o processo de filtragem. Se a incerteza com relação a medição variar, o filtro pode gerar estimativas erradas, podendo divergir completamente. Assim, a sintonia *online* deste parâmetro pode melhorar a robustez do algoritmo diante de falhas na medição.

Neste trabalho, as informações disponíveis na inovação ν_k em (28) são utilizadas para sintonizar de forma *online* a matriz de covariância da medição. Para tanto, a abordagem desenvolvida em (Mehra, 1972), referida aqui pelo seu nome em inglês *covariance-matching* (CM), é combinada com o algoritmo do UKF apresentado na Seção 4.2.

A ideia da abordagem por CM é fazer com que a sequência de inovação ν_k seja consistente com sua covariância, que é aproximada por $P^{yy}_{k|k-1}$ (27) pelo UKF. Então, por meio da sequência das últimas N amostras de inovação, estima-se $P^{yy}_{k|k-1}$ por

$$E[\nu_k \nu_k^T] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^{k} \nu_j \nu_j^T. \tag{32}$$

Nota-se que o UKF (veja Equação (27)) aproxima a covariância por

$$E[\nu_k \nu_k^T] \triangleq \tilde{P}^{yy}_{k|k-1} + R_k, \tag{33}$$

em que $\tilde{P}^{yy}_{k|k-1} \triangleq \sum_{j=1}^{2(n-1)} w_j \tilde{y}_{j,k|k-1} \tilde{y}^T_{j,k|k-1}$. Assim, R_k pode ser estimado por

$$\hat{R}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^{k} \nu_j \nu_j^T - \tilde{P}^{yy}_{k|k-1}. \tag{34}$$

Para evitar valores negativos devido a operação de subtração em (34) o seguinte tratamento é realizado

$$\hat{R}_k = \max\left(\frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^{k} \nu_j \nu_j^T - \tilde{P}^{yy}_{k|k-1}, R_0\right), \tag{35}$$

em que R_0 é um limiar inferior dado pela matriz de covariância nominal e $\max(A,B)$ é um operador que retorna uma matriz diagonal cujos elementos são os maiores entre os elementos das diagonais das matrizes A e B.

4.4 Filtro de Kalman Unscented Adaptativo para Quatérnios

Combinando (35) com as equações do UKF (24)-(31), obtemos um algoritmo de três passos intitulado de *filtro de Kalman unscented adaptativo baseado em covariance matching* (AUKF-CM, do inglês *adaptive unscented Kalman filter by covariance matching*), cuja etapa de predição é dada por (24)-(26) e (28). A segunda etapa, chamada aqui de *estimação do ruído*, é dada por (35) e (27), em que R_k em (27) é substituído por $\hat{R}_k$. Note que, $\hat{R}_k$ é calculado dentro de uma janela temporal de N amostras, sendo N um parâmetro de ajuste. Por fim, a etapa de *assimilação* dada por (29)-(31).

5 Resultados Experimentais

Nesta seção, o algoritmo proposto, AUKF-CM, é testado utilizando dados experimentais amostrados de girômetro, acelerômetro e magnetômetro triaxiais instalados em um celular Xiaomi Redmi Note 4. A frequência de amostragem é de 100Hz.

Os resultados do algoritmo adaptativo proposto são confrontados com o UKF para quatérnios apresentado na Seção 4.2 e também com um algoritmo de filtragem complementar apresentado em (Madgwick et al., 2011), referido apenas por filtro complementar (CF, do inglês *complementary filter*).

A parametrização dos algoritmos UKF e AUKF-CM baseiam-se nas configurações das matrizes de covariância e no caso do AUKF-CM, também no número de amostras N da sequência de inovação. Assim, $Q_{1,k-1} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ é determinada como uma matriz diagonal, cujos elementos estão relacionados com o ruído da velocidade angular medidas pelo girômetros, cujos desvios padrão foram estimados em $\sigma_\omega = [0{,}0025\ 0{,}0004\ 0{,}000225]^T$rad/s por meio de uma janela temporal em que o sinal estava estável. O ruído aditivo no processo se deve aos estados representando a atitude e aos termos de polarização do girômetro. Desta forma, a matriz diagonal $Q_{2,k-1} \in \mathbb{R}^{6\times6}$ é construída por meio do seguintes desvios padrão estimados $\sigma_{\mathrm{v}} = \left[1\times10^{-12}\right]_{3\times1}$rad $\sigma_\beta = \left[1\times10^{-9}\right]_{3\times1}$rad/s. O desvio padrão do ruído de medição é estimado como $\sigma_{\mathrm{ang}} = [0{,}000015\ 0{,}000015\ 0{,}0002]^T$rad. Para o AUKF-CM, a janela temporal foi parametrizada em $N = 20$ amostras. O algoritmo CF possui apenas um parâmetro que regula a frequência de corte do filtro complementar utilizado. Utilizando a metodologia indicada pelo autor, esse parâmetro foi configurado como sendo $\beta = 0{,}0433$.

Na sequência, três experimentos são mostrados para demonstrar o comportamento dos algoritmos em situações de perturbação na medição. Em todos os experimentos, o celular estava alinhado com o referencial inercial. Para melhor visualizar os resultados, as estimativas de orientação em quatérnio unitário são convertidas para ângulos de Euler.

No primeiro experimento o campo magnético é perturbado artificialmente com um imã, veja a Figura 1. As perturbações no campo magnético influenciam diretamente a estimativa no ângulo de rumo ψ. Nota-se pela Figura 2 que o UKF foi o mais afetado pelas perturbações na medição.

Em um segundo experimento, mostrado na Figura 3, o campo magnético é gradativamente modificado. Nota-se na Figura 4 que todos os algoritmos foram fortemente influenciados por esta perturbação. Porém, o algoritmo proposto mostrou melhores resultados, convergindo mais lentamente para a medição com falha.

Por fim, foi realizado um experimento no qual o celular foi submetido a acelerações lineares nos eixos x e y. A Figura 5 mostra resultados das estimativas do ângulo ϕ. Como o acelerômetro mede a aceleração linear juntamente com componentes da gravidade, a existência de acelerações lineares dificultam o cálculo dos ângulos ϕ e θ que necessitam da projeção da gravidade. Neste caso o algoritmo proposto mostrou resultados similares ao algoritmo CF. Ambos foram menos influenciados pela aceleração linear do que o UKF.

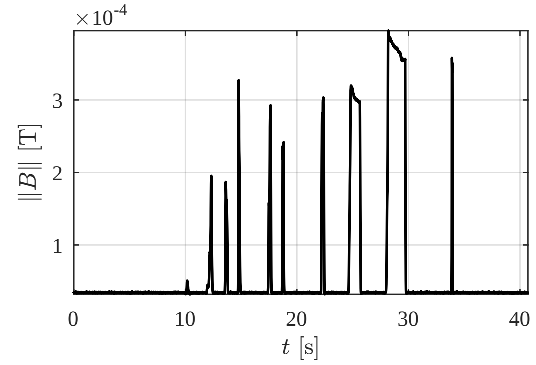

Figura 1: Norma do campo magnético. Neste experimento, perturbações abruptas no campo magnético são mostradas.

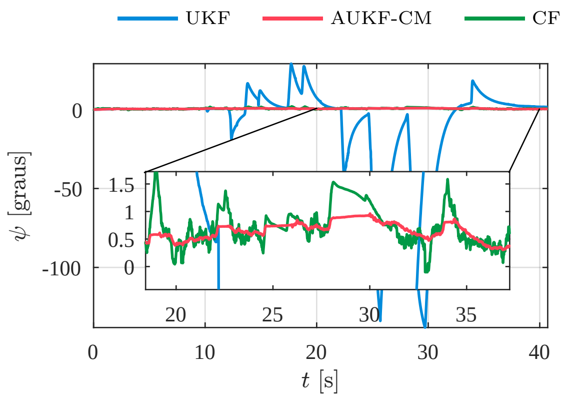

Figura 2: Resultados para o ângulo ψ decorrente de modificações abruptas no campo magnético.

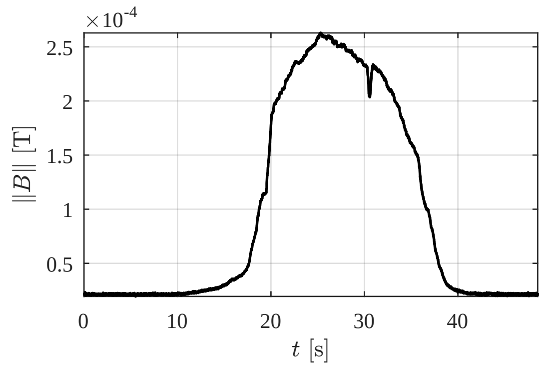

Figura 3: Norma do campo magnético. Neste experimento, a perturbação no campo magnético é lentamente modificada.

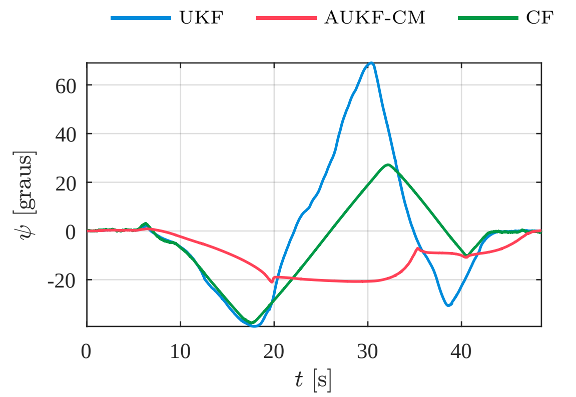

Figura 4: Resultados para o ângulo ψ decorrente de uma variação lenta do campo magnético.

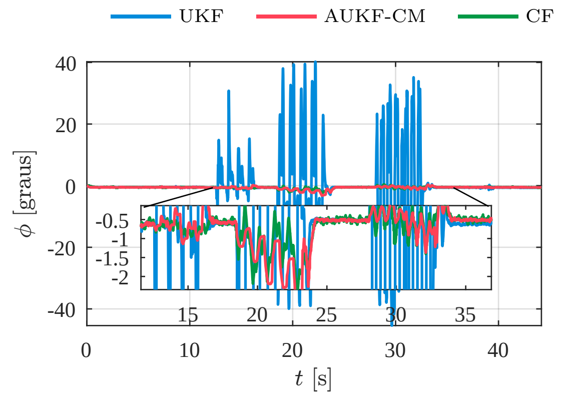

Figura 5: Resultados para o ângulo ϕ decorrente das acelerações lineares.

6 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentado um novo algoritmo baseado no filtro de Kalman *unscented* para estimação da atitude. O filtro proposto se adapta à incerteza das medições que são variáveis no tempo. O algoritmo utiliza quatérnios para representação da atitude e na etapa de assimilação dos dados admite que as medições sejam diretamente em quatérnios. A restrição de norma unitária é mantida pela parametrização em *vetor rotação* sem a necessidade de normalizações normalmente utilizadas para resolver o problema.

Experimentos com dados coletados de sensores reais foram realizados. Os resultados mostraram boa robustez do algoritmo proposto diante de perturbações na medição. Os resultados do algoritmo proposto foram confrontados com um algoritmo *open-source* (Madgwick et al., 2011) e também com o algoritmo do UKF para quatérnios (Seção 4.2). O algoritmo proposto se mostrou mais robusto às perturbações no campo magnético e teve resultados similares ao algoritmo CF na existência de acelerações lineares.

Os próximos passos dessa pesquisa incluem o aumento da robustez do algoritmo com a utilização de diferentes técnicas para avaliação da inovação. Pretende-se realizar experimentos em veículos aéreos e terrestres, quando o método proposto poderá compor sistemas completos de localização espacial.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES, FAPEMIG, processo TEC-APQ-00850-15 e CNPq, processo 465755/2014-3 (INCT). Antonio Chiella é bolsista da CAPES. Bruno Teixeira e Guilherme Pereira são bolsistas do CNPq.

Referências

Bar-Shalom, Y., Li, X. R. and Kirubarajan, T. (2004). *Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software*, John Wiley & Sons.

Cavallo, A., Cirillo, A., Cirillo, P., De Maria, G., Falco, P., Natale, C. and Pirozzi, S. (2014). Experimental comparison of sensor fusion algorithms for attitude estimation, *IFAC Proceedings Volumes* **47**(3): 7585–7591.

Costanzi, R., Fanelli, F., Monni, N., Ridolfi, A. and Allotta, B. (2016). An attitude estimation algorithm for mobile robots under unknown magnetic disturbances, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **21**(4): 1900–1911.

Crassidis, J. L. and Markley, F. L. (2003). Unscented filtering for spacecraft attitude estimation, *Journal of Guidance Control and Dynamics* **26**(4): 536–542.

Crassidis, J. L., Markley, F. L. and Cheng, Y. (2007). Survey of nonlinear attitude estimation methods, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **30**(1): 12–28.

Hajiyev, C. and Soken, H. E. (2016). Fault tolerant estimation of UAV dynamics via robust adaptive Kalman filter, *Complex Systems*, Springer, pp. 369–394.

Hide, C., Moore, T. and Smith, M. (2004). Adaptive Kalman filtering algorithms for integrating GPS and low cost INS, *Position Location and Navigation Symposium*, pp. 227–233.

Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proceedings of the IEEE* **92**(3): 401–422.

Lee, D., Vukovich, G. and Lee, R. (2017). Robust Adaptive Unscented Kalman Filter for Spacecraft Attitude Estimation Using Quaternion Measurements, *Journal of Aerospace Engineering* **30**(4): 04017009.

Li, X. R. and Bar-Shalom, Y. (1994). A recursive multiple model approach to noise identification, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **30**(3): 671–684.

Madgwick, S. O. H., Harrison, A. J. L. and Vaidyanathan, R. (2011). Estimation of imu and marg orientation using a gradient descent algorithm, *2011 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics*, pp. 1–7.

Mehra, R. (1972). Approaches to adaptive filtering, *IEEE Transactions on Automatic Control* **17**(5): 693–698.

Menegaz, H. T. and Ishihara, J. Y. (2018). Unscented and square-root unscented Kalman filters for quaternionic systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* pp. 1–28.

Myers, K. and Tapley, B. (1976). Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics, *IEEE Transactions on Automatic Control* **21**(4): 520–523.

Pennec, X. (1998). *Computing the mean of geometric features application to the mean rotation*, PhD thesis, INRIA - Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Nice, France.

Pereira, G. A. S., Iscold, P. and Torres, L. A. B. (2008). Airplane attitude estimation using computer vision: simple method and actual experiments, *Electronics Letters* **44**(22): 1303–1304.

Sipos, B. J. (2008). Application of the manifold-constrained unscented Kalman filter, *2008 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, pp. 30–43.

Terra, G. S., Tôrres, L. A. and Teixeira, B. O. (2014). Attitude estimation using a two-step unscented approach with gyro bias estimation and acceleration correction, *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte, Minas Gerais.*

Xiong, K., Zhang, H. and Chan, C. (2006). Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering, *Automatica* **42**(2): 261–270.