

ANÁLISE DOS MÉTODOS PRONY E MÍNIMOS QUADRADOS NA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE GERADORES SÍNCRONOS DE POLOS SALIENTES

Domingos Robson Silva Costa, Breno Avelar Rodrigues de Andrade, Niraldo Roberto Ferreira

Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE UFBA

Emails: dom.Robson@hotmail.com, Breno.ar.Andrade@gmail.com, Niraldo@UFBA.br

Abstract— This paper deals with two methodology for the estimation of parameters of unsaturated salient poles synchronous generator through a sudden three-phase short-circuit test at the machine terminals. The technique used here is an algorithm based on the least squares method, having its results compared to those obtained from an algorithm based on the Prony method. A comparative study is carried out between the two methods, analyzing the effects of sampling frequencies, number of samples and initial sampling time on the expected results. Based on the results, it was concluded that the Prony method and the least squares method produced viable solutions for the estimation of the parameters of the synchronous generators, being the least squares method more robust to the mentioned critical effects.

Keywords— Sudden three phase short-circuit, Least squares method, Synchronous Generators, Parameters estimation, Prony algorithm.

Resumo— Este artigo trata de duas metodologias para estimação de parâmetros de geradores síncronos de pólos salientes não saturados através de um ensaio de curto-circuito trifásico súbito nos terminais da máquina. A técnica aqui utilizada é um algoritmo baseado no método dos mínimos quadrados, tendo seus resultados comparados com aqueles obtidos de um algoritmo baseado no método de Prony. Realiza-se um estudo comparativo entre os dois métodos analisando os efeitos das frequências de amostragem, número de amostras e tempo inicial de amostragem nos resultados esperados. Com base nos resultados obtidos, conclui-se que o método de Prony e o método dos mínimos quadrados produziram soluções viáveis para a estimação de parâmetros dos geradores síncronos, sendo o método dos mínimos quadrados mais robusto aos efeitos críticos citados.

Palavras-chave— Curto-circuito trifásico súbito, Método dos mínimos quadrados, Geradores síncronos, Estimação de parâmetros, Algoritmo de Prony.

1 Introdução

A modelagem e simulação computacional do sistema elétrico são recursos importantes utilizados na Engenharia Elétrica de sistemas de potência. Deste modo pode-se prever o comportamento da rede ante as diversas contingências que podem ocorrer e antecipar as medidas saneadoras mais adequadas para evitar ou minimizar interrupções parciais ou totais da operação do sistema (Santana et al, 2012).

A simulação da operação do gerador requer o conhecimento de seus parâmetros característicos, tais como resistências, indutâncias, capacitâncias, reatâncias e constante de tempo. Com estes podem ser constituídos circuitos equivalentes que se comportam eletricamente como o gerador síncrono conectado na rede elétrica (Mouni et al, 2008).

Por apresentarem boa regulação de frequência e tensão, além de rendimento elevado, os geradores síncronos são amplamente utilizados nos sistemas de geração de energia elétrica. Em casos que demandem baixa velocidade, são empregados geradores síncronos de polos salientes. Eles têm rotor com o diâmetro de valor elevado devido a possibilidade de alojar uma grande quantidade de polos. (Boldea, 2006). Quando se opera em velocidades mais elevadas, o diâmetro do rotor é menor e a máquina possui polos lisos, como no caso dos turbogeradores utilizados em usinas termoeletricas (Kyriakides et al, 2002).

A modelagem dos geradores síncronos ocorre pela construção de circuitos equivalentes associados aos eixos direto e de quadratura. A

estimativa dos parâmetros das máquinas está incluso nesse processo de modelagem. Os ensaios de curto circuito são um dos métodos mais empregados nesta estimação de parâmetros, dentre outros métodos normatizados que viabilizam a obtenção prática destes (Al-Hamadi and El-Naggar, 2010).

Na modelagem das máquinas síncronas estas simplificações podem ser feitas ignorando problemas advindos de fenômenos físicos como a saturação (aplicar tensão entre 10 a 40% de tensão normal no ensaio), e a distribuição irregular do fluxo nas extremidades do circuito magnético. Isto é devido à geometria complexa que faz com que os parâmetros obtidos não tenham níveis confiáveis de aceitação (Santana, 2014).

Outros fatores colaboram para níveis baixos de precisão na obtenção dos parâmetros das máquinas, como por exemplo perda dos dados originais da máquina pelas concessionárias de serviços de geração elétrica ou variação de seus valores normais devido envelhecimento do equipamento ou ainda rebobinamento por queima dos equipamentos (Llerena and Ruppert Filho, 2010).

Os dados dos parâmetros advêm das características dependentes do desempenho dos geradores. Estas características podem admitir diferentes aspectos, por exemplo, dados de medições oriundos de testes realizados no equipamento e dados analíticos provenientes de estudos de simulação dos fenômenos eletromagnéticos que ocorrem no interior da máquina (Fard et al, 2005).

Este artigo apresenta um estudo comparativo sobre o desempenho dos métodos de

mínimos quadrados e do algoritmo Prony na estimativa de parâmetros do gerador síncrono de polos salientes. São considerados os efeitos da frequência de amostragem, do número de amostras e do tempo inicial de amostragem sobre os resultados esperados.

2 Desenvolvimento

Além de servirem de comprovação de que o projeto mecânico da máquina síncrona foi feito adequadamente para resistir aos esforços advindos de situações não usuais de operação, os ensaios de curto-circuito súbito também são importantes na definição de vários parâmetros da máquina síncrona.

O gerador deve estar operando com velocidade nominal sem carga até que se alcance o regime permanente. Aplica-se então um curto-circuito trifásico nos seus terminais e na sequência, são medidas tensão e corrente. Através deste ensaio, é possível definir os parâmetros do gerador síncrono e logo após legitimar ou não o modelo concebido (Mouni, 2008).

Durante um curto-circuito trifásico aplicado nos terminais da máquina, a corrente de armadura é constituída das seguintes componentes: componente simétrica, que compreende os regimes subtransitório, transitório e permanente, componente direta e a de segundo harmônico, como é possível observar em (1), (Santana et al, 2015)

$$\begin{aligned} i_a = & \frac{\sqrt{2} \cdot E_0}{2} \left(\frac{1}{X''_d} + \frac{1}{X''_q} \right) e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(\lambda) \\ & + \frac{\sqrt{2} \cdot E_0}{2} \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right) e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(2\omega_0 t + \lambda) \\ & - \sqrt{2} E_0 \left[\frac{1}{X_d} + \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-\frac{t}{T'_d}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) e^{-\frac{t}{T''_d}} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

Onde i_a representa o valor instantâneo da corrente de armadura no instante “t” na fase a, E_0 refere-se ao valor eficaz da tensão de circuito aberto antes da aplicação do curto-circuito, ω_0 é a frequência angular em rad/s, λ refere-se ao ângulo de incidência que depende do ponto do ciclo em que foi aplicado o curto, X_d, X'_d, X''_d , pertencem as reatâncias de eixo direto nos regimes estacionário, transitório, subtransitório, respectivamente, X''_q é a reatância subtransitória no eixo em quadratura, T_a, T'_d, T''_d , são as constantes de tempo de armadura, transitória e subtransitória, respectivamente.

2.1 Método de Prony

O método de Prony foi criado pelo matemático francês Gaspard Riche de Prony no ano de 1795. Ele consiste em um modelo de estimação de parâmetros que tem condições de ajustar uma soma de senóides exponencialmente amortecidas a um conjunto de N amostras de um sinal (Costa, 2005).

De acordo com Chen et al. (1987), o método pode ser detalhado em três partes:

- Primeira parte: identificar os coeficientes de um modelo de predição linear que modela as amostras;
- Segunda parte: Identificar as raízes do polinômio característico incorporadas à equação de predição linear.
- Terceira parte: Estimação das amplitudes e fase inicial de cada termo exponencial.

Assim, o método de Prony considera o modelo a seguir.

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} \quad (2)$$

Em que h_k e z_k são definidos como:

$$h_k = A_k e^{j\theta_k} \quad (3)$$

$$z_k = e^{[(\alpha_k + j2\pi f_k)\Delta T]} \quad (4)$$

Onde p é a ordem do modelo, z_k os polos, h_k a amplitude complexa, A_k a amplitude da senóide, θ_k a fase inicial da senóide de frequência f_k , α_k o amortecimento da senóide e ΔT o intervalo de amostragem.

Em cada exponencial amortecida há duas incógnitas, h_i e z_i . Assim no método original de Prony há 2p parâmetros a determinar e são usadas 2p amostras de sinal, produzindo um sistema perfeitamente determinado.

Porém, normalmente utiliza-se um número de amostras $N \gg 2p$, resultando em um sistema sobredeterminado, com muito mais equações que incógnitas.

Uma senóide pode ser vista como uma combinação linear de duas exponenciais complexas conjugadas e a equação (2) pode ser revista como:

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} + \sum_{k=1}^p h_k^* (z_k^{n-1})^* \quad (2a)$$

Onde (*) significa complexo conjugado e a equação acima pode ser escrita na forma matricial :

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 & z_1^{-1} & z_2^{-1} & \dots & z_p^{-1} \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 & z_1^{-2} & z_2^{-2} & \dots & z_p^{-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_p^{n-1} & z_1^{-n+1} & z_2^{-n+1} & \dots & z_p^{-n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} \quad (5)$$

Reescrevendo (5), tem-se:

$$zh = y \quad (6)$$

É aí que entra a contribuição de Prony, definir um polinômio $\phi(z)$, cujas raízes sejam os parâmetros $z_1, \dots, z_p$.

$$\phi(z) = \sum_{m=0}^p a_m z^{p-m} \quad (7)$$

Onde a_i são os coeficientes do polinômio e as raízes são os valores z_i . Comumente é estabelecido que a_0 faça-se unitário. Se z_i é raiz, $1/z_i$ também será, indicando que os coeficientes carecem ser simétricos em relação a a_p .

Dessa forma, determina-se um polinômio, referido por:

$$z^{2p} + a_1 z^{2p-1} + \dots + a_{p-1} z^{p+1} + a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_1 z + 1 = 0 \quad (8)$$

Da equação (8) define-se o vetor a :

$$a = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{p-1} \ a_p \ a_{p-1} \ \dots \ a_1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (9)$$

Multiplicando-se (6) por (9) tem-se o seguinte sistema de equações:

$$aZh = ay = 0 \quad (10)$$

Com base em (10), chega-se no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} & y[n] + a_1 y[n+1] + a_2 y[n+2] + \dots + \\ & a_p y[n+p] + a_{p-1} y[n+2p+1] + \dots + \\ & a_2 y[n+2p-2] + a_1 y[n+2p-1] + \\ & y[n+2p] = 0 \\ & n=1,2,\dots,N-2p \end{aligned} \quad (11)$$

Visto que o sistema é sobredeterminado, um algoritmo de mínimos quadrados é utilizado para a estimação dos coeficientes do polinômio. As raízes deste polinômio são aplicadas na estimação dos coeficientes de amortecimento α_i e das frequências f_i do sinal, nas seguintes equações:

$$\alpha_i = \frac{\ln|z_i|}{\Delta T} \quad (12)$$

$$f_i = \frac{\tan^{-1} \left[\frac{\Im(z_i)}{\Re(z_i)} \right]}{2\pi\Delta T} \quad (13)$$

Identificando os pólos z_i , é possível calcular os valores de h_i através do sistema de equações descrito em (5). E por fim, a partir dos valores de h_i é factível definir os valores das amplitudes A_i e das fases iniciais θ_i :

$$A_i = |h_i| \quad (14)$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \left[\frac{\Im(z_i)}{\Re(h_i)} \right] \quad (15)$$

O método de Prony é utilizado dividindo-o em três partes, cada uma delas correspondendo a um dos regimes.

No regime subtransitário, a relação entre os parâmetros da máquina e os parâmetros de Prony acontecem conforme as equações seguintes:

$$T_a = 1/\alpha_3 \quad (16)$$

$$T''_d = 1/\alpha_4 \quad (17)$$

$$x''_d = \frac{2}{\left(\frac{2A_1}{\sqrt{2}E} + \frac{\sqrt{2}A_3}{E} \right)} \quad (18)$$

$$x''_q = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}A_3}{E} - \frac{1}{X''_d} \right)} \quad (19)$$

$$x'_d = \frac{1}{\left(\frac{A_4}{\sqrt{2}E} - \frac{1}{X''_d} \right)} \quad (20)$$

Da mesma forma acontece para o regime permanente:

$$x_d = \frac{1}{\frac{A_1}{\sqrt{2}E}} \quad (21)$$

Por fim para o regime transitório.

$$T'_d = \frac{1}{\alpha_1} \quad (22)$$

2.2 Método dos mínimos quadrados

Fornecer uma estimativa ótima dos parâmetros do gerador síncrono a partir de amostras digitalizadas da corrente de curto-circuito súbito. Da mesma forma que acontece no método de Prony, a técnica proposta divide a corrente de armadura em três componentes, relativas ao regime subtransitário, transitório e estacionário. Também são analisados os efeitos críticos do algoritmo neste trabalho (Al-Kandari et al, 2015).

A equação da corrente de armadura durante curto-circuito súbito é não-linear e pode ser reescrita como:

$$i_a(x,t) = f(x,t) \quad (23)$$

Onde X é um vetor de parâmetros 8×1 a ser estimado e é dado por:

$$\underline{X} = (x_d, x'_d, x''_d, x'''_d, T'_d, T''_d, T_a, \lambda)^T \quad (24)$$

A equação (23) é altamente não linear. Então o problema é reformulado para superar a não-linearidade.

Admita que m amostras da corrente de curto-circuito estão acessíveis para o período circuitado, que deve ser suficientemente grande a fim de englobar os regimes subtransitório, transitório e permanente (Al-Kandari et al., 2015).

No regime estacionário a corrente de curto-circuito de armadura pode ser escrita na forma a seguir:

$$i_{ass}(t) = \sqrt{2} \frac{E_0}{X_d} \cos(\omega_0 t + \lambda) \quad (25)$$

Na equação anterior não há corrente transitória, subtransitória ou d.c. Ela pode então ser reescrita após a expressão do cosseno como:

$$i_{ass}(t) = \left(\frac{\cos \lambda}{X_d} \right) E_0 \sqrt{2} \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{\sin \lambda}{X_d} \right) E_0 \sqrt{2} \sin(\omega_0 t) \quad (26)$$

Os parâmetros X_1 e X_2 são definidos como:

$$X_1 = \frac{\cos \lambda}{X_d} \quad (27)$$

$$X_2 = \frac{\sin \lambda}{X_d} \quad (28)$$

As funções sujeitas ao tempo $h_1(t)$ e $h_2(t)$ serão definidas como:

$$h_1(t) = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega_0 t) \quad (29)$$

$$h_2(t) = -\sqrt{2} E_0 \sin(\omega_0 t) \quad (30)$$

A equação (26) torna-se então:

$$i_{ass}(t) = X_1 h_1(t) + X_2 h_2(t) \quad (31)$$

Se a corrente de armadura, no regime permanente, for amostrada a uma taxa pré-selecionada, chamada ΔT , então m amostras seriam obtidas em $t_1, t_1 + \Delta T, \dots, t_1 + (m-1)\Delta T$. Dessa forma a equação (31) se torna:

$$\begin{bmatrix} i_{ass}(t_1) \\ \vdots \\ i_{ass}(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(t_1) & h_2(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ h_1(t_m) & h_2(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

No formato vetorial, a equação (32) transforma-se em:

$$\underline{I}_{ass} = H \underline{X} + \underline{\xi} \quad (33)$$

Onde $\underline{I}_{ass}$ é o vetor de amostras $m \times 1$ da corrente estacionária, H é a matriz $m \times 2$ medida, $\underline{X}$ é o vetor de parâmetros 2×1 a ser estimado, e $\underline{\xi}$ é vetor de erros $m \times 1$ a ser minimizado. Se $m > 2$, a equação (33) torna-se um conjunto de equações sobredeterminada. A solução para (33) com base em mínimos quadrados é:

$$\underline{X} = [H^T H]^{-1} H^T \underline{I}_{ass}(t) \quad (34)$$

Tendo identificado os parâmetros do vetor X , então X_d e λ podem ser determinados como:

$$X_1^2 + X_2^2 = \frac{(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}{X_d^2} = \frac{1}{X_d^2} \quad (35)$$

$$X_d = [X_1^2 + X_2^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tan \lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \frac{X_d X_2}{X_d X_1} = \frac{X_2}{X_1} \quad (36)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{X_2}{X_1} \right)$$

Desta forma, os parâmetros X_d e λ são identificados usando a corrente de armadura de curto-circuito de estado estacionário.

No regime transitório, a corrente de curto-circuito de armadura no período transitório pode ser escrita como:

$$i_{atr}(t) = \sqrt{2} E_0 \left[\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right] e^{\frac{-t}{T'_d}} \cos(\omega_0 t + \lambda) \quad (37)$$

Observe que os valores de X_d e λ são os identificados no procedimento anterior. Usando os primeiros quatro termos de expansão das séries de Taylor para o termo exponencial $e^{\frac{-t}{T'_d}}$ e definindo $\left(\frac{1}{X'_d} \right)_T = \left[\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right]$, teremos:

$$\begin{aligned} i_{atr}(t) = & \left[\frac{\sqrt{2} E_0}{(X'_d)_T} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) - \\ & \left[\frac{\sqrt{2} E_0 t}{(X'_d)_T T'_d} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ & + \left[\frac{0.5 \sqrt{2} E_0 t^2}{(X'_d)_T T'^2_d} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) - \\ & \left[\frac{\sqrt{2} E_0 t^3}{6 (X'_d)_T T'^3_d} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \end{aligned} \quad (38)$$

Os parâmetros são definidos como:

$$\begin{aligned} y_1 = \left(\frac{1}{X'_d} \right)_T &= \left[\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right] \\ y_2 &= \frac{1}{T'_d (X'_d)_T} \end{aligned} \quad (39)$$

$$y_3 = \frac{1}{T'^2_d(X'_d)_T}$$

$$y_4 = \frac{1}{T'^3_d(X'_d)_T}$$

E as funções dependentes do tempo:

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \sqrt{2}E_0 \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ b_2(t) &= -\sqrt{2}E_0 t \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ b_3(t) &= 0.5\sqrt{2}E_0 t^2 \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ b_4(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{6}E_0 t^3 \cos(\omega_0 t + \lambda) \end{aligned} \quad (40)$$

Então, a equação (38) torna-se:

$$i_{atr}(t) = b_1(t)y_1 + b_2(t)y_2 + b_3(t)y_3 + b_4(t)y_4 \quad (41)$$

Para m_1 amostras da corrente de indução de curto-circuito disponível. Então (41) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} i_{atr}(t_1) \\ \vdots \\ i_{atr}(t_{m_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(t_1) & \cdots & b_4(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(t_{m_1}) & \cdots & b_4(t_{m_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Que na forma vetorial se torna:

$$\underline{I}_{atr} = B \underline{Y} + \underline{\Psi} \quad (43)$$

Onde $\underline{I}_{atr}$ são as amostras de regime permanente e transitório $m_1 \times 1$, B é matriz $m_1 \times 4$ medida, $\underline{Y}$ é o vetor de parâmetros 4×1 a ser estimado e $\underline{\Psi}$ é o vetor de erro $m_1 \times 1$ a ser minimizado. A solução para (43) com base em mínimos quadrados é dada por:

$$\underline{Y} = [B^T B]^{-1} B^T \underline{I}_{atr} \quad (44)$$

Tendo identificado o vetor de parâmetros $\underline{Y}$, então os parâmetros transientes X'_d e T'_d podem ser calculado scomo:

$$X'_d = \frac{1}{y_1 + \frac{1}{X_d}} \quad (45)$$

$$T'_d = \left[\frac{y_1}{y_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

No regime subtransitório, os primeiros ciclos da corrente de curto-circuito de armadura apresentam a corrente subtransitória, sobreposto nesta corrente está o componente d.c da corrente da armadura. Isso pode ser expresso como:

$$i_{astr}(t) = \sqrt{2}E_0 \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right] e^{\frac{-t}{T''_d}} \cos(\omega_0 t + \lambda) + i_{dc} \quad (47)$$

Do ponto de vista de estimação, i_{dc} pode ser considerado como um ruído sobreposto à corrente subtransitória. Seguindo os passos explicados anteriormente, substituindo o termo exponencial $e^{\frac{-t}{T''_d}}$ pelos quatro primeiros termos da série de Taylor e definindo $(\frac{1}{X''_d})_T = \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right]$, obtemos:

$$\begin{aligned} i_{astr}(t) &= \left[\frac{\sqrt{2}E_0}{(X''_d)_T} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ &\quad - \left[\frac{\sqrt{2}E_0 t}{T''_d(X''_d)_T} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ &\quad + \left[\frac{0.5\sqrt{2}E_0 t^2}{T''_d{}^2(X''_d)_T} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \\ &\quad - \left[\frac{\sqrt{2}E_0 t^3}{6T''_d{}^3(X''_d)_T} \right] \cos(\omega_0 t + \lambda) \end{aligned} \quad (48)$$

Os parâmetros podem ser definidos da seguinte maneira:

$$\theta_1 = \frac{1}{(X''_d)_T} = \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right] \quad (49)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{T''_d(X''_d)_T} \quad (50)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{(T''_d)^2(X''_d)_T} \quad (51)$$

$$\theta_4 = \frac{1}{(T''_d)^3(X''_d)_T} \quad (52)$$

Então, a equação (47) torna-se:

$$i_{astr}(t) = b_1(t)\theta_1 + b_2(t)\theta_2 + b_3(t)\theta_3 + b_4(t)\theta_4 \quad (53)$$

Se m_2 amostras da corrente de curto-circuito de armadura amostrada em $t_1, t_2 = t_1 + \Delta T, \dots, t_1 + (m_2-1) \Delta T$ estão disponíveis, então (53) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} i_{astr}(t_1) \\ \vdots \\ i_{astr}(t_{m_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(t_1) & \cdots & b_4(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(t_{m_2}) & \cdots & b_4(t_{m_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_4 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Na forma vetorial, (54) pode ser reescrita como:

$$\underline{I}_{astr} = B \underline{\theta} + \underline{\zeta} \quad (55)$$

Onde I_{astr} é $m_2 \times 1$ amostras atuais disponíveis no período em estudo, B é $m_2 \times 4$ matriz de medição, $\underline{\theta}$ é o vetor de parâmetros 4×1 a ser estimado e ζ é $m_2 \times 1$ vetor de erro a ser minimizado. Este vetor de erros contém a corrente d.c atual. A solução para (55) em mínimos quadrados é:

$$\underline{\theta} = [B^T B]^{-1} B^T I_{astr} \quad (56)$$

Tendo identificado o vetor de parâmetros $\underline{\theta}$, então os parâmetros do período subtransitório X'_d e T''_d podem ser calculados como:

$$X''_d = \frac{1}{\theta_1 + \frac{1}{X''_d}} \quad (57)$$

$$T''_d = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (58)$$

Tendo identificado X_d , X'_d , X''_d , T'_d e T''_d então a componente d.c. da corrente de curto-circuito pode ser obtida como:

$$\begin{aligned} i_\alpha(t) - i_{sts}(t) = & -E_0 \left[\frac{1}{X''_d} - \right. \\ & \left. \frac{1}{X''_q} \right] e^{-\frac{t}{T_\alpha}} (0.5\sqrt{2} \cos \lambda) \\ & + E_0 \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right] e^{-\frac{t}{T_\alpha}} [0.5\sqrt{2} \cos(2\omega_0 t + \lambda)] \end{aligned} \quad (59)$$

Onde $i_{sts}(t)$ é a corrente a.c. de armadura subtransitória, transitória e estacionária calculada no tempo t usando os parâmetros estimados nas seções anteriores. O lado esquerdo da equação (59) é a corrente de armadura d.c.

$$\begin{aligned} i_{dc}(t) = & -E_0 \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right] \\ & \left[1 - \frac{t}{T_\alpha} + \frac{t^2}{2T_\alpha^2} \right] (0.5\sqrt{2} \cos \lambda) \\ & + E_0 \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right] \left[1 - \frac{t}{T_\alpha} + \frac{t^2}{2T_\alpha^2} \right] \\ & [0.5\sqrt{2} \cos(2\omega_0 t + \lambda)] \end{aligned} \quad (60)$$

$$\theta_s = \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right] \quad (61)$$

$$\theta_d = \left[\frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X''_q} \right] \quad (62)$$

Os parâmetros são definidos como:

$$\begin{aligned} \phi_1 = \theta_s; \quad \phi_4 = \theta_d \\ \phi_2 = \theta_s / T_\alpha; \quad \phi_5 = \theta_d / T_\alpha \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 = \theta_s / T_\alpha^2; \quad \phi_6 = \theta_d / T_\alpha^2 \\ c_1(t) = -0.5\sqrt{2} E_0 \cos \lambda \\ c_2(t) = 0.5\sqrt{2} t E_0 \cos \lambda \end{aligned} \quad (64)$$

$$c_3(t) = -0.25\sqrt{2} t^2 E_0 \cos \lambda$$

$$c_4(t) = -0.5\sqrt{2} E_0 \cos(2\omega_0 t + \lambda)$$

$$c_5(t) = 0.5\sqrt{2} t E_0 \cos(2\omega_0 t + \lambda)$$

$$c_6(t) = -0.25\sqrt{2} t^2 E_0 \cos(2\omega_0 t + \lambda)$$

Então, a equação (41) torna-se:

$$(t) = \phi_1 c_1(t) + \phi_2 c_2(t) + \phi_3 c_3(t) + \phi_4 c_4(t) + \phi_5 c_5(t) + \phi_6 c_6(t) \quad (65)$$

Se M amostras da corrente d.c estiverem disponíveis em $t_1, t_1 + \Delta T, \dots, t_1 + (M-1) \Delta T$. Então, equação(65) podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} i_{dc}(t_1) \\ \vdots \\ i_{dc}(tM) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(t_1) & \cdots & c_6(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1(tM) & \cdots & c_6(tM) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_6 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Que na forma vetorial pode ser reescrita como:

$$I_{dc} = C \underline{\phi} + \underline{v} \quad (67)$$

A solução para (67) no método dos mínimos quadrados é:

$$\underline{\phi}^* = [C^T C]^{-1} C^T I_{dc} \quad (68)$$

Tendo identificado o vetor de parâmetros $\underline{\phi}^*$, então os parâmetros X''_q e T_α podem ser calculados como:

$$X''_q = 2/(\phi_1 - \phi_4) \quad (69)$$

$$T_\alpha = \phi_1 / \phi_2 \quad (70)$$

3 Resultados

Foram realizadas simulações com o software Matlab, considerando um gerador síncrono trifásico de polos salientes de 555 MVA, 24 KV, 60 Hz. Os testes foram realizados considerando os parâmetros apresentados na tabela 1. Aplicando-se

40% da tensão normal para evitar a região de saturação e poder utilizar a equação (1).

Tabela 1. Parâmetros reais do gerador síncrono

x_d	1,81p.u
x'_d	0,30 p.u
x''_d	0,23 p.u
x''_q	0,25p.u
T'_d	1,3260 s
T''_d	0,023 s
T_a	0,0195 s
λ	0

A figura 1 mostra a forma de onda da corrente de armadura na fase *a*. Com os períodos subtransitório, transitório e o regime permanente.

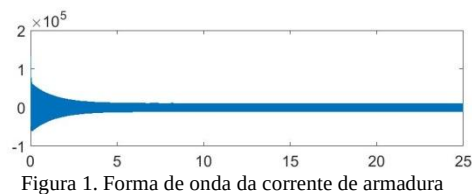


Figura 1. Forma de onda da corrente de armadura

As tabelas a seguir apresentam os resultados dos métodos de Prony e mínimos quadrados para frequência de amostragem de 1200 Hz, tempo inicial de amostragem 0.0001 segundos e são analisados os efeitos críticos do número de amostras para os dois métodos.

Tabela 2. Efeito crítico do número de amostras

Número de amostras (2000)	Erro em % Prony	Erro em % Mínimos quadrados
x_d	0	0
x'_d	0.234	0
x''_d	0.6194	0.0584
x''_q	0.6197	0
T'_d	0	0.0018
T''_d	0.0478	5.7773
T_a	0.0041	0

Foram feitos testes para o método de Prony com diversas quantidades de amostras diferentes. Percebeu-se que para o método de Prony ser capaz de estimar os parâmetros da máquina é necessário que o número de amostras do sinal analisado seja superior a 600.

Com um número de amostras entre 600 e 1500 os resultados não são tão satisfatórios para todos os parâmetros, sendo a reatância estacionária de eixo direto o parâmetro que mais depende de uma quantidade grande de amostras.

Entre 1500 e 2000 amostras, os resultados são muito bons, sendo que a partir de 2000 amostras o erro de estimação mantém-se praticamente constante.

Para o método dos mínimos quadrados, nas mesmas condições em que foram feitas as simulações para o método de Prony, a reatância subtransitória de eixo direto, a constante de tempo transitória e subtransitória de eixo direto são mais sensíveis a menores quantidades de amostras. a partir de 27 amostras, o erro na estimação de todos os parâmetros é bem próximo de zero.

Nas tabelas 4 e 5 estão os resultados referentes aos efeitos críticos do tempo inicial de amostragem para os métodos de Prony e mínimos quadrados. Foram realizadas simulações com 30000 amostras e frequência de amostragem de 1200 Hz.

Tabela 3. Efeito crítico do tempo inicial de amostragem

Tempo inicial de amostragem em segundos (0.0001)	Erro em % Prony	Erro em % Mínimos quadrados
x_d	0	0
x'_d	0.2343	0
x''_d	0.6194	0.0785
x''_q	0.6197	0
T'_d	0	0
T''_d	0.0478	0.3356
T_a	0.0041	0

O método de Prony é muito sensível ao tempo inicial de amostragem. Para 30000 amostras e frequência de amostragem de 1200 Hz, o método só começa a estimar os parâmetros com erros menores que um por cento para todos os parâmetros, com tempo inicial de amostragem inferior a 0.0002 segundos.

Para o método de Prony, as reatâncias transitórias e subtransitórias de eixo direto, a reatância subtransitória de eixo em quadratura, a constante de tempo subtransitória de eixo direto e a constante de tempo de armadura são os parâmetros mais sensíveis e dependentes de tempo inicial de amostragem baixo.

Nas mesmas condições em que foram realizadas as simulações para o método de Prony, os resultados para o método dos mínimos quadrados foram mais robustos em relação ao tempo inicial, apresentando erros inferiores a um por cento com tempo inicial de amostragem menores que 5 segundos.

A reatância subtransitória de eixo direto e a constante de tempo subtransitória de eixo direto são os parâmetros mais dependentes de tempo inicial de amostragem baixos.

Nas tabelas 6 e 7 estão os resultados referentes aos efeitos críticos da frequência de amostragem para os métodos de Prony e mínimos quadrados. Foram realizadas simulações para 30000 amostras, tempo inicial de 0,0001 segundos e frequências variáveis.

Tabela 6. Efeito crítico da frequência de amostragem

Frequência de amostragem em Hz (800)	Erro em % Prony	Erro em % Mínimos quadrados
x_d	0	0
x'_d	0.2387	0
x''_d	0.6189	0.0463
x'''_d	0.6190	0
T'_d	0	0
T''_d	0.0513	0.1984
T_a	0.0030	0

Para frequências menores que 780 Hz, o método de Prony não consegue estimar os parâmetros da máquina. Com frequências de amostragem entre 780 e 800 Hz o método de Prony consegue estimar os parâmetros da máquinas para todos os regimes, no entanto, erros menores que um por cento só foram possíveis para frequências superiores a 800 Hz.

Nas mesmas condições de simulação do método de Prony, as simulações para o método dos mínimos quadrados se mostraram mais robustas, pois é capaz de estimar os parâmetros da máquina mesmo em frequências bem baixas. No entanto, erros inferiores a um por cento só são encontrados para simulações com frequências superiores a 550 Hz.

A reatância e a constante de tempo subtransitórias de eixo direto são os parâmetros mais sensíveis a baixas frequências de amostragem para o método dos mínimos quadrados.

4 Conclusões

A técnica de estimação de parâmetros de geradores síncronos através do método dos mínimos quadrados aplicada neste trabalho, apresenta resultados mais satisfatórios que o método o método de Prony, pois é mais robusta aos efeitos críticos advindos do número de amostras, de frequências de amostragem variáveis e tempo inicial de amostragem maiores.

No entanto, o método de Prony também é capaz de estimar os parâmetros de geradores síncronos com erros inferiores a um por cento dependendo de certas aplicações. Na sequência da pesquisa pretende-se avaliar o desempenho das duas metodologias quando os dados estão contaminados com ruído. Também considerar uma modelagem não linear a partir das equações diferenciais da máquina.

Agradecimentos

Agradecemos à Capes e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia pelo apoio na realização do trabalho.

Referências

Al-Hamadi, H. M. and El-Naggar, K. M. (2010). Measurement of synchronous machine parameters using Kalman filter based fuzzy logic estimator - Measurement, Vol. 43, pp. 1327-1335.

Al-Kandari, A. M. and Madouh, J. Y. and Alkandari, B. A. and Soliman, S. A. (2015). Modeling and Estimation of Synchronous Machine Parameters from Digitized Sudden Short-Circuit Armature Current. J. Electrical Systems, Vol. 11, no. 2, pp. 230-248.

Boldea, I. (2006). The Electric Generators Handbook: Synchronous generators, Taylor & Francis.

Chen, C. S. and Liu, C. W. and Jiang, J. A. (2006). Application of combined adaptive fourier filtering technique and fault detector to fast distance protection. Power Delivery, IEEE Transactions on, Vol. 21, no. 2, pp. 619-626.

Costa, F. F. (2005). Estimação de Harmônicos e Inter-Harmônicos em Sistemas Elétricos, tese de doutorado, Dept. de Eng. Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande.

Fard, R. D. and Karrari, M. and Malik, O. P. (2005). Synchronous generator model identification for control application using volterra series, Energy Conversion, IEEE Transactions on, Vol. 20, no. 4, pp. 852-858.

Kyriakides, E. and Heydt, G. T. and Vittal, V. (2004). On-Line Estimation of Synchronous Generator Parameters Using a Damper Current Observer and a Graphic User Interface - IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 19, no. 3.

Llerena, M. T. M. and Ruppert Filho, E. (2010). Estimation of synchronous generator parameters using Gauss-Newton methods for different models and operation conditions. In: Intercon, Puno- Perú.

Mouni, E. and Tnani, S. and Champenois, G. (2008). Synchronous generator modelling and parameters estimation using least squares method. Simulation Modelling Practice and Theory, Vol. 16, pp. 678-689.

Santana, D. M. M. and Ferreira, N. R. and Costa F. F. and Lima, A. C. C. (2012). Estimação de Parâmetros Transitórios e Subtransitórios de Geradores Síncronos Utilizando o Algoritmo de Prony. In: IV Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, Goiânia. SBSE 2012.

Santana, D. M. M. and Ferreira, N. R. and Costa, F.

F. and Lima, A. C. C. (2015). A Novel Prony Approach for Synchronous Generator Parameter Estimation. *Przeglad Elektrotechniczny*, Vol. 1, pp. 50-54.

Suni, J. C. P. (2009). Sobre a determinação de parâmetros de geradores síncronos para estudos de comportamento dinâmico de sistemas elétricos, dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas.