SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO PARA SISTEMAS DE GERAÇÃO TÉRMICA CONSIDERANDO AS PERDAS NO SISTEMA DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE ADAPTAÇÃO HOLOMÓRFICA DE FUNÇÕES

Francisco Damasceno Freitas*, Ana Catarina Salles Ramos*, Aluisio C. dos Santos Jr*

*Departamento de Engenharia Elétrica - Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro
Brasília, DF, Brasil - CEP: 70910-900

Emails: ffreitas@ene.unb.br, anasalles.df@gmail.com, aluisio.junior@aluno.unb.br

Abstract— This paper proposes the solution of the economic dispatch problem (EDP) of thermal machines in lossy transmission systems through the technique called holomorphic embedding functions. With this purpose, the methodology of the original economic dispatch problem is presented. Then a holomorphic embedding process is applied to the original equations. This is a non-linear problem. Therefore, the technique of holomorphic embedding model is employed to solve it. With this goal, initially an approximate solution by a Taylor series calculation is assessed. In order to extend the convergence region of the series, this expansion is converted into another problem based on a Padé approximant. For the method performance evaluation the problem is solved through a traditional Newton-Raphson (NR) method and by the proposed technique. Experiments are performed on an electrical system with six thermal units which supply a load through an interconnection. The obtained results demonstrate that the proposed technique presents results similar to those found by the NR method. The advantage of the proposed technique is that it does not require LU factorization for determining the coefficients of the Taylor series.

Keywords— Holomorphic embedding method, economic dispatch problem, Newton-Raphson method, power series, analytic continuation, Padé approximant

Resumo— Este artigo propõe a solução do problema de despacho econômico de máquinas térmicas em sistemas de transmissão com perdas através da técnica de aproximações por funções holomórficas. Com esta finalidade, apresenta-se a metodologia do problema de despacho econômico original e a partir deste problema, realiza-se a adaptação holomórfica das equações originais. Trata-se de um problema não-linear. Para solucioná-lo com a modelagem holomórfica, inicialmente, calcula-se uma aproximação da solução por série de Taylor. Para alargar a região de convergência da série, converte-se esta expansão em um outro problema baseado em uma aproximação de Padé. A fim de avaliar o desempenho do método, resolve-se o problema de forma tradicional, com o método de Newton-Raphson (NR) e pela técnica proposta. Testes são efetuados em um sistema elétrico com seis unidades térmicas que atendem uma carga por meio de uma interconexão. Os resultados obtidos demonstram que a técnica proposta apresenta resultados similares aos encontrados pelo método NR. A vantagem da técnica proposta é que a mesma não requer fatoração LU para calcular os coeficientes das séries de Taylor.

Palavras-chave— Método de Incorporação holomórfica, problema de despacho econômico, método de Newton-Raphson, série de potências, continuação analítica, aproximação de Padé

1 Introdução

O problema de despacho econômico (PDE) de máquinas térmicas em sistemas de potência é tratado de diversas formas. No caso mais simples, a carga é concentrada em um barramento onde é suprida por unidades geradoras, também concentradas nesse barramento (Grainger and Stevenson, 1994; Wood and Woolenberg, 1996). As unidades geradoras podem funcionar com diferentes combustíveis, e consequentemente, sujeitas a diferentes custos de operação. Estão sujeitas também a restrições dos seus limites operacionais máximo e mínimo de potência. No PDE tradicional, assume-se que a potência suprida pelas unidades geradoras à carga seja constante. Em alguns estudos, utilizam-se também restrições associadas a uma rampa de carga que é traduzida em um limite da taxa de variação da potência de saída da unidade geradora. Este limite da taxa de variação por rampa distingue o problema de despacho econômico dinâmico (DED) do tradicional, que é portanto um despacho econômico estático (Han et al., 2001). Neste trabalho, apenas a abordagem estática é tratada. Considerando este fato, o problema pode ser resolvido por meio da solução de sistemas lineares. Isto é, ao serem geradas as condições de otimalidade associadas ao problema de otimização correlato, originam-se sistemas lineares, cuja solução é obtida de forma imediata.

Uma abordagem mais realista assume que a carga, ainda que concentrada, seja suprida remotamente, através de um sistema de transmissão. A complexidade acrescentada ao se considerar o sistema de transmissão introduz não linearidades, o que altera a forma de resolver o problema em relação ao caso em que a carga fica concentrada no barramento da central térmica. Neste tipo de problema, costuma-se considerar apenas a influência da potência ativa. Em razão disso, é natural a existência de perdas de transmissão para o suprimento da carga. Como consequência, considera-se que o total de potência gerado pelas unidades atenda o suprimento da carga mais a perda de transmissão. Em (Grainger and Stevenson, 1994) foi proposta uma fórmula quadrática para modelar as perdas de transmissão como uma função da potência das unidades geradoras.

Diferentemente do PDE sem perdas, no PDE com perdas, as condições de otimalidade dão origem a equações não-lineares. Portanto, ao contrário do PDE sem perdas, torna-se necessário resolver um conjunto de equações não-lineares. Diversos trabalhos trataram deste problema usando diferentes abordagens. Em (Sydulu, 1999) foi apresentada uma técnica para solucionar o problema não-linear baseada em uma técnica não-iterativa denominada algoritmo lógica-λ para o despacho econômico de máquinas térmicas. Um algoritmo genético híbrido (AGH) foi proposto em (Yalcinoz and Altun, 2001). O algoritmo incorpora a solução produzida por uma rede neural do tipo Hopfield como parte da população inicial do AGH (Sydulu, 1999; Yalcinoz and Altun, 2001; Aldridge et al., 2001; Han et al., 2001; Liang and Glover, 1992; Tawfak et al., 2016).

Outros algoritmos propostos, como em (Aldridge et al., 2001; Liang and Glover, 1992; Tawfak et al., 2016), apresentam o PDE de máquinas térmicas em sistemas com perdas na transmissão com métodos alternativos. Porém, sempre o foco é a resolução de um problema não-linear em que técnicas de otimização baseadas em inteligência artificial e no método de Newton-Raphson são preferidas.

Recentemente, um método para resolução de sistema de equações não-lineares baseado em adaptação holomórfica de funções foi proposto em (Trias, 2012) para resolução de problemas de fluxo de carga tradicional. Trata-se de técnica não iterativa, na qual determina-se uma aproximação em série de Taylor para a solução do problema com expansão baseada em um fator de adaptação holomórfica α. Nesta aproximação, quando α assume valor unitário, a solução numérica do problema original é obtida. Ocorre que a série pode apresentar raio de convergência pequeno. Por isso, uma segunda etapa é necessária para transformar a série em uma aproximação de Padé. Esta aproximação resulta em raio de convergência melhor que o da série (G. Baker, 1996; Stahl, 1997). A abordagem em discussão foi aplicada para obtenção da solução do problema de fluxo de carga para um sistema elétrico de duas barras. Logo em seguida, melhoramentos foram introduzidos em outros trabalhos também sobre fluxo de carga, mas visando aplicações a sistemas de grande porte, como em (Feng, 2015; Rao et al., 2016).

Este trabalho propõe a resolução do problema de despacho econômico de máquinas térmicas, com perdas no sistema de transmissão, através de técnica de adaptação holomórfica de função associada à formulação básica do problema. A principal contribuição do artigo é apresentar um método numérico alternativo, não-iterativo, que soluciona o problema não-linear resultante das condições de otimalidade de primeira ordem. Os demais procedimentos visando obter a solução otimizada do problema seguem abordagem tradicional normalmente exploradas ao se estudar o PDE. O resultado obtido com a abordagem proposta é comparado com o determinado via método tradicional de Newton-Raphson (NR). Para aferir o desempenho da técnica proposta, são realizados testes em um sistema com 6 unidades geradoras para suprir uma carga atendida através de um sistema de transmissão com perdas.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, descreve-se o problema de despacho econômico clássico com perdas de transmissão. Uma introdução ao problema de adaptação holomórfica de funções é apresentada na Seção 3. Já a Seção 4 descreve a modelagem do problema de despacho econômico via abordagem das equações por funções holomórficas. A Seção 5 é dedicada à apresentação de testes e resultados, enquanto na Seção 6 são elencadas as principais conclusões do trabalho.

2 O Problema de Despacho Econômico com Perdas Clássico

O PDE clássico envolvendo apenas unidades térmicas consiste na alocação de geradores, $i = 1, 2, \ldots, N$, funcionando com uma dada potência ativa, P_i, para atender uma determinada carga global, P_D. Assume-se que a carga seja suprida por unidades geradoras concentradas em um barramento e que são conectadas à carga através de sistema de transmissão com perdas. Neste trabalho, somente o ajuste da potência ativa fornecida pelas unidades térmicas é o alvo de interesse. Além disso, as perdas no sistema de transmissão são modeladas por uma função quadrática dependente das potências individuais das unidades geradoras (Grainger and Stevenson, 1994).

O custo de cada unidade geradora, $F_i(P_i)$ para gerar a potência P_i depende da curva de calor $H_i(P_i)$ da unidade e do preço do combustível p_i. A curva $H_i(P_i)$ é assumida do tipo quadrática e o preço do combustível é constante. Desta forma, na formulação do problema de otimização que se segue considera-se a função custo $F_i(P_i) = p_i H_i(P_i)$ definida da seguinte forma:

$$F_i(P_i) = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 \tag{1}$$

Evidentemente, os parâmetros da curva $H_i(P_i)$ são mantidos sempre fixos. Porém, o preço p_i, embora possa flutuar, o mesmo será mantido constante para cada cenário. Assim, define-se um cenário cujo preço do combustível da unidade i é p_i.

Considerando a função de custo e as restrições operacionais do sistema, tais como o atendimento da carga P_D constante e as perdas de transmissão

P_p, o problema de otimização pode ser definido da seguinte forma:

$$Min \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) \qquad (2)$$

sujeito a

$$-P_p - P_D + \sum_{i=1}^{N} P_i = 0, \; com \; P_p = \sum_{i=1}^{N} d_i P_i^2$$

$$\underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

em que d_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ são coeficientes de perda que são atribuídos devido à contribuição de cada unidade para as perdas de transmissão; $\underline{P}_i$ e $\overline{P}_i$ correspondem, respectivamente, aos limites inferior e superior de potência da unidade i.

Como procedimento para realização do processo de otimização, define-se a função lagrangeana, incorporando a função objetivo, bem como as restrições de igualdade e desigualdade, como

$$L(P,\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) - \lambda[-P_p - P_D + \sum_{i=1}^{N} P_i] +$$

$$+ \sum_{i=1 \in \Omega}^{N} [\overline{\mu}_i (P_i - \overline{P}_i)] + \sum_{i=1 \in \Omega}^{N} [\underline{\mu}_i (-P_i + \underline{P}_i)] \quad (3)$$

em que $\overline{\mu}_i$ e $\underline{\mu}_i$ são variáveis de folga associadas à violação de limite superior e inferior de potência gerada, respectivamente; já Ω é um conjunto que indica status de violação de limite.

As condições de otimalidade de primeira ordem aplicadas à (3) requer a solução do seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{\partial F_i}{\partial P_i} + \lambda \frac{\partial P_p}{\partial P_i} - \lambda + \mu_i = 0, \; i = 1, \ldots, N \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_p + P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\mu}_i} = (P_i - \overline{P}_i) = 0, \; se \; i \in \Omega \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\mu}_i} = (-P_i + \underline{P}_i) = 0, \; se \; i \in \Omega \qquad (7)$$

em que $\mu_i = \overline{\mu}_i - \underline{\mu}_i$ e $\mu_i = 0$, caso nenhum limite seja violado; ou, $\mu_i = \overline{\mu}_i$, se o limite for violado em sua parte superior; ou, $\mu_i = -\underline{\mu}_i$, quando a parte violada é a inferior. note-se que apenas um dos valores de μ_i entre os três é usado.

As equações (4) e (5) são apresentadas de outra forma em que são explicitados os parâmetros do modelo para a unidade i ($i = 1, 2, \ldots, N$):

$$q_i(P_i, \lambda) = b_i + 2c_i P_i + 2d_i \lambda P_i - \lambda + \mu_i = 0, \quad (8)$$

$$g(P_i) = P_D + \sum_{i=1}^{N} d_i P_i^2 - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0 \qquad (9)$$

São exatamente as equações (8) e (9) que tornam o problema de otimização não-linear. Portanto, uma das opções para resolvê-lo é por meio do método de Newton-Raphson. Este método busca uma solução, dada uma estimativa inicial para as raízes do sistema não-linear. Tendo em vista que as perdas no sistema são reduzidas em comparação com a carga e com as potências geradas, uma sugestão de estimativa inicial é utilizar a solução do mesmo problema, mas sem o efeito das perdas e com os limites de geração livres. Assim, sem considerar o efeito das perdas e com os limites livres, deve-se resolver o seguinte sistema linear para se determinar P_i e λ:

$$\begin{bmatrix} 2c_1 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 2c_N & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdots \\ P_N \\ \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_N \\ P_D \end{bmatrix} \quad (10)$$

As equações (8) e (9), sem restrições de limites podem ser resolvidas iterativamente pelo método de Newton-Raphson. Utilizando-se, então, o resultado de (10) como $P_i^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, assumidos como estimativa inicial para cálculo da solução do problema não-linear, há a necessidade de resolver a cada iteração k um sistema linear do tipo:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \gamma_N & \beta_N \\ \beta_1 & \cdots & \beta_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1^{(k)} \\ \Delta P_2^{(k)} \\ \cdots \\ \Delta P_N^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_1^{(k)} \\ q_2^{(k)} \\ \cdots \\ q_N^{(k)} \\ g^{(k)} \end{bmatrix}$$

em que $\gamma_i = 2(c_i + \lambda^{(k)} d_i)$, $\beta_i = (-1 + 2d_i P_i^{(k)})$, $i = 1, \ldots, N$.

As equações (8) e (9) atendem aos requisitos quando as potências P_i estão dentro de seus limites operacionais. Porém, quando algum limite é violado, a variável de folga μ_i em (8) também dever ser utilizada. Ou seja,

$$q_i(P_i, \lambda) = b_i + 2c_i P_i + 2d_i \lambda P_i - \lambda + \mu_i = 0. \quad (11)$$

Em caso de violação dos limites, para atender às condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), os valores de $\underline{\mu}_i$ e $\overline{\mu}_i$ devem ser positivos. A situação em que uma dessas variáveis for negativa evidencia que o limite respectivo associado à variável de folga deve voltar a ser liberado.

Os Algoritmos 1 e 2 resumem os passos que devem ser seguidos para obtenção da solução do problema de otimização.

Algoritmo 1: Otimização com restrições

ENTRADA: valores iniciais $P_i^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, parâmetros do sistema
SAÍDA: potência ótima despachada dos geradores e custos incrementais

1) Fazer $\ell = 0$ e determinar $P_i^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$ para o caso sem perdas, através de (10);
2) Verificar se os limites das variáveis são atendidos. Em caso positivo, prosseguir para o passo 4); senão, continuar no passo 3.
3) Fixar valores de P_i no respectivo valor violado, retirar a equação violada em (8) e continuar para o passo 4)
4) Resolver o problema não-linear através do Algoritmo 2 e determinar os valores candidatos a ótimo $P_i^{(+)}$, $\lambda^{(+)}$ e $\mu_i^+ \neq 0$; verificar se P_i^+ atende limites para $i = 1, 2, \ldots, N$. Em caso negativo, fixar P_i no limite violado, fazer $\ell = \ell + 1$ e retornar para o passo 3); senão, continuar no passo 5).
5) Verificar todos os valores de μ_i^+. Se todos são positivos, a solução do problema foi determinada, sendo portanto, os últimos valores de $P_i^{(+)}$, $\lambda^{(+)}$ e $\mu_i^+ \geq 0$, fim; senão, nos casos em que $\mu_i^+ < 0$, liberar a respectiva variável P_i e retornar com a equação não-linear $q_i(P_i, \lambda)$, fazer $\ell = \ell + 1$ e retornar ao passo 4).

Algoritmo 2: Problema não-linear

ENTRADA: Estimativas iniciais $P_i^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, $\mu_i^{(0)}$ e tolerância para convergência ϵ
SAÍDA: P_i^+, λ^+
1) Fazer $k = 0$ e utilizar $P_i^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$ da última iteração ℓ do problema de otimização;
2) Calcular os resíduos $q_i(P_i, \lambda)^{(k)}$ e $g(P_i)^{(k)}$ e verificar se $max(|q_i^{(k)}|, |g^{(k)}|) < \epsilon$; em caso positivo, houve convergência e a solução é P_i^+ e λ^+; senão, proseguir para o passo 3).
3) Calcular os desvios $\Delta P_i^{(k)}$, $\Delta\lambda^{(k)}$, determinar os valores $P_i^{(k+1)}$, $\lambda^{(k+1)}$, fazer $k = k+1$ e retornar para o passo 2).

3 Solução por Abordagem com Função Holomórfica

Nesta seção aborda-se o assunto básico sobre função holomórfica. O objetivo é descrever de forma sucinta os conceitos sobre o tema a fim de aplicá-los na seção seguinte. Explica-se sobre a expansão em série de Taylor e em seguida jusifica-se a necessidade de se determinar uma função analítica com maior raio de convergência.

3.1 Função Holomórfica

Funções holomórficas são funções analíticas complexas que são infinitamente diferenciáveis em torno de todos os pontos pertencentes ao seu domínio. Sabe-se que a diferenciação complexa é linear e obedece às regras do produto, do quociente e da regra da cadeia. Isto implica que as somas, os produtos, as composições das funções holomórficas, bem como o quociente de duas funções holomórficas também são funções holomórficos, desde que o denominador do quociente não seja nulo. Uma importante propriedade destas funções é que elas podem ser representadas por suas séries de Taylor em torno da vizinhança de qualquer ponto em seu domínio e valem para um dado raio de convergência r, em geral de pequena abrangência (Rao et al., 2016).

A série de Maclaurin de uma função genérica $f(\alpha)$ é gerada quando uma série de Taylor é expandida próxima de zero (G. Baker, 1996):

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} f[i]\alpha^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}, \ |\alpha| \leq r \quad (12)$$

onde $f^{(i)}(\alpha)$ é a i-ésima derivada de $f(\alpha)$, $f[i]$ é o i-ésimo coeficiente da série de potências da função $f(\alpha)$ e r é o raio de convergência da série. Assumindo que uma função $V(\alpha)$ representando uma grandeza seja holomórfica, a mesma pode ser expandida em n termos de uma série de potências da seguinte forma (G. Baker, 1996):

$$V(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} V[i]\alpha^i, \quad para \ |\alpha| < r \quad (13)$$

em que $V[i]$ é a notação atribuída ao i-ésimo coeficiente da série da função $V(\alpha)$. Então a série de potências gerada contém todas as propriedades da função analítica $V(\alpha)$. É necessário considerar que para ser analítica, qualquer função $f(\alpha)$ deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann (Ahlfors, 1979). Uma condição equivalente no domínio complexo conhecida como derivada de Wirtinger (Ahlfors, 1979) requer que:

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha^*} = 0 \quad (14)$$

O processo de adaptação holomórfica pode reter a holomorficidade somente quando V^* (notação para o conjugado de V) é modificado com a variável α^* ao invés de α. A expansão truncada da série de Taylor de $V^*(\alpha)$ e $V^*(\alpha^*)$ são expressas como (Feng, 2015):

$$V^*(\alpha) = V[0]^* + V[1]^*\alpha^* + ... + V[n]^*(\alpha^*)^n \quad (15)$$

$$V^*(\alpha^*) = V[0]^* + V[1]^*\alpha + ... + V[n]^*(\alpha)^n \quad (16)$$

A variável $V^*(\alpha)$ em (15) é uma função de α^* e não de α. Entretanto, as equações de Wirtinger não são satisfeitas. Já a expansão de $V^*(\alpha^*)$ é independente de α^* de forma que $\frac{\partial V^*(\alpha^*)}{\partial \alpha^*} = 0$, o que implica que $V^*(\alpha^*)$ em (15) é uma função holomórfica. Então, o modelo deve usar a expressão de $V_i^*(\alpha^*)$ ao invés de $V_i^*(\alpha)$ para o processo de adaptação holomórfica das equações de interesse (Subramanian, 2014).

A série de potências de $V(\alpha)$ como mostrado em (13), quando calculada em $\alpha = 1$, produz a solução da equação não-linear original. Todavia, se a série de potências tiver um raio de convergênca inferior a 1, a soma dos termos da série de potências calculada em $\alpha = 1$ irá divergir. Então, uma técnica de continuação analítica pode ser aplicada para estender este raio de convergência.

A continuação analítica é uma técnica utilizada para estender o raio de convergência da série de potências, como apresentado em (13). A máxima continuação analítica de uma série de potências pode ser obtida calculando-se sua aproximação de Padé diagonal ou próxima à diagonal (a depender se a fração continuada é truncada em número de termos par ou ímpar, respectivamente). A aproximação pode ser representada como uma função racional de dois polinômios, que é calculada a partir da série de potências finita com n termos, a fim de se obter uma identidade analítica da forma (Rao et al., 2016):

$$[L/M]_\alpha = \frac{a[0] + a[1]\alpha + ... + a[L]\alpha^L}{1 + b[1]\alpha + ... + b[M]\alpha^M} = \\ = \sum_{n=0}^{L+M} f[n]\alpha^n \quad (17)$$

onde L e M são os graus do numerador e denominador da função racional, respectivamente, e n é o grau da série de potências.

Uma aproximação de Padé próxima à diagonal é uma aproximação racional cujo módulo da diferença entre os graus dos polinômios do numerador e denominador é igual a 1, ou seja, $(|L - M| = 1)$. Já em uma aproximação de Padé diagonal, os graus dos polinômios são iguais. Tanto as aproximações de Padé diagonal quanto as próximas à diagonal tiveram provadas sua convergência para a solução desejada. Mas neste trabalho, por simplicidade, optou-se por usar somente a aproximação de Padé diagonal. Desta forma, adotou-se $L = M = n/2$, com n um número par.

A obtenção de uma função analítica a partir de uma aproximação de Padé, passa inicialmente pelo cálculo dos coeficientes $V[n]$ da série de potências da função $V(\alpha)$. Em seguida, a partir da série de potências, é necessário determinar os coeficientes $a[i], i = 0, 1, 2, \ldots, L$ e $b[j], j = 1, 2, \ldots, M$ da fração racional de polinômios de Padé. Finalmente, calcula-se a função $V(\alpha)$, para o valor em $\alpha = 1$. Espera-se que a menos de uma tolerância de valor muito pequeno, o valor determinado de $V(\alpha)$, nestas condições, seja o valor de interesse da função (Trias, 2012).

Na seção que se segue, realiza-se a adaptação holomórfica das equações para o problema de despacho econômico. Nesta aplicação, as variáveis de interesse assumem valores puramente reais.

4 Aplicação ao Problema de Despacho Econômico de Geradores Térmicos

No problema de despacho econômico abordado neste artigo, o objetivo é calcular os despachos de potência dos geradores, P_i, o multiplicador de lagrange, λ, e as variáveis de folga, μ_i. Uma vez formulado o problema de otimização visando a minimização de custos de combustível, as condições de otimalidade de primeira ordem geram equações não-lineares que podem ser adaptadas como uma função holomórfica.

Existem diversas maneiras de se efetuar a adaptação holomórfica das condições de otimalidade associadas ao problema de otimização. Neste artigo, propõe-se que as equações (11) e (9) sejam adaptadas holomorficamente da seguinte forma:

$$b_i + 2c_iP_i - \lambda + \mu_i = -\alpha 2d_i\lambda P_i, \; i = 1, \ldots, N \quad (18)$$

$$P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i = -\alpha \sum_{i=1}^{N} d_i P_i^2 \quad (19)$$

em que α é o parâmetro de adaptação holomórfica no problema.

Note que em (18) o parâmetro μ_i pode ser calculado após definição se o limite da variável a ele associado foi violado. Por isso, é de interesse calcular, inicialmente, as variáveis P_i e λ, considerando limites não violados, conforme (8) e (9), ou seja, nos casos em que $\mu_i = 0$. Estas variáveis de interesse podem então ser expandidas como série de Taylor

$$\begin{aligned} P_i(\alpha) &= P_i[0] + P_i[1]\alpha + ... + P_i[n]\alpha^n \\ \lambda(\alpha) &= \lambda[0] + \lambda[1]\alpha + ... + \lambda[n]\alpha^n \end{aligned} \quad (20)$$

4.1 Cálculo da solução semente

Com base nas equações (18) e (19), a "solução semente"(Trias, 2012) ($P_i[0]$,$\lambda[0]$) é determinada fazendo-se $\alpha = 0$. Portanto, considerando apenas as unidades sem limites violados ($\mu_i = 0$), chegam-se às equações:

$$\begin{aligned} b_i + 2c_iP_i[0] - \lambda[0] = 0, \quad i \notin \Omega \\ P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i[0] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

que correspondem exatamente ao caso das equações de despacho econômico sem perdas de transmissão com limites não violados.

Na situação em que ocorre violação no limite da unidade j, $P_j(\alpha) = \overline{P}_j$ (ou $P_j(\alpha) = \underline{P}_j$) já é um valor conhecido, não sendo necessário efetuar o seu cálculo novamente. Consequentemente, $P_j = P_j[0] = \overline{P}_j$ (ou $\underline{P}_j$). Por outro lado, para as variáveis com limites livres, deduz-se as equações

$$P_i[0] = \frac{\lambda[0] - b_i}{2c_i}, \quad i \notin \Omega \tag{22}$$

$$P_D - \sum_{j\in\Omega} P_j - \sum_{i\notin\Omega} P_i[0] = 0 \tag{23}$$

A partir de (22) e (23) determina-se:

$$\lambda[0] = \frac{P_D - \sum_{j\in\Omega} P_j + \sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{b_i}{2c_i}\right)}{\sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{1}{2c_i}\right)} \tag{24}$$

Com o valor de $\lambda[0]$ calculado em (24), determina-se $P_i[0]$, $i \notin \Omega$, a partir de (22).

4.2 Cálculo dos coeficientes para $n > 0$

Novamente, calculam-se inicialmente apenas as variáveis que não tenham seus valores violados, pois as que têm limites superados têm os valores de potências fixados e os valores de folga calculados somente após os cálculos finais de P_i (sem limites superados) e λ.

No cálculo dos coeficientes das séries de $P_i(\alpha)$ e $\lambda(\alpha)$ para $n > 0$, devem ser levados em conta agora os termos quadráticos $\lambda(\alpha)P_i(\alpha)$ e $P_i^2(\alpha)$ que aparecem no lado direito de (18) e (19).

Na situação em que $n = 1$, deve-se igualar os coeficientes em α nos lados direito e esquerdo das equações (18) e (19) para se atender à equivalência dos coeficientes de α. este procedimento leva às equações:

$$\begin{aligned} 2c_iP_i[1] - \lambda[1] &= -2d_i\lambda[0]P_i[0], \quad i \notin \Omega \\ -\sum_{i\notin\Omega} P_i[1] &= -\sum_{i=1}^{N} d_iP_i^2[0] \end{aligned} \tag{25}$$

A partir de (25), calculam-se

$$\lambda[1] = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_iP_i^2[0] + \sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{d_i\lambda[0]P_i[0]}{c_i}\right)}{\sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{1}{2c_i}\right)} \tag{26}$$

$$P_i[1] = \frac{\lambda[1] - 2d_i\lambda[0]P_i[0]}{2c_i}, \quad i \notin \Omega$$

Quando $n = 2$, deduz-se que

$$\lambda[2] = \frac{\sum_{i\notin\Omega} 2d_i(P_i[0]P_i[1]) + \sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{W_i[1]}{c_i}\right)}{\sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{1}{2c_i}\right)}$$

$$P_i[2] = \frac{\lambda[2] - 2d_i(\lambda[0]P_i[1] + \lambda[1]P_i[0])}{2c_i}, \quad i \notin \Omega$$

com $W_i[1] = d_i(\lambda[0]P_i[1] + \lambda[1]P_i[0])$.

Cabe observar que o termo $\sum_{i=1}^{N} d_i^2P_i^2[0]$ computado em (26) requer a participação das N unidades. Mas, para $n \geq 2$, a contribuição do termo quadrático de perdas afeta apenas as unidades com limites não violados.

Considerando um n qualquer, os termos quadráticos podem ser desenvolvidos da seguinte forma:

$$\lambda(\alpha)P_i(\alpha) = W_i[0] + W_i[1]\alpha + ... + W_i[n]\alpha^n,$$

$$\sum_{i\notin\Omega} d_iP_i^2 = \tilde{W}[0] + \tilde{W}[1]\alpha + ... + \tilde{W}[n]\alpha^n,$$

em que os coeficientes são calculados para $n \geq 2$ como:

$$W_i[n] = \sum_{j=0}^{n} P_i[j]\lambda[n-j]$$

$$\tilde{W}[n] = \sum_{i\notin\Omega} d_i(\sum_{j=0}^{n} P_i[j]P_i[n-j])$$

Logo, para coeficientes genéricos, $n \geq 2$, deduz-se que

$$\lambda[n] = \frac{\sum_{i\notin\Omega} \tilde{W}_i[n-1] + \sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{W_i[n-1]}{c_i}\right)}{\sum_{i\notin\Omega}\left(\frac{1}{2c_i}\right)}$$

$$P_i[n] = \frac{\lambda[n] - 2d_iW_i[n-1]}{2c_i}, \quad i \notin \Omega$$

Portanto, demonstrou-se que os coeficientes das séries de $P_i(\alpha)$ e $\lambda(\alpha)$ podem ser calculados explicitamente, não requerendo inversões e/ou fatorações de matrizes, como usualmente requerido no método de Newton-Raphson.

A partir dos coeficientes de $P_i(\alpha)$ e $\lambda(\alpha)$ determina-se uma função analítica ou uma aproximação de Padé, conforme (17). Feito isto, calcula-se o valor de cada aproximação para o valor $\alpha = 1$. O resultado corresponde à solução numérica de interesse do problema não-linear. De posse deste resultado, deve ser verificado através do Algoritmo 1 se o mesmo é ótimo, calculando-se as variáveis de folga.

5 Testes e Resultados

Nesta seção é avaliado o desempenho numérico do método proposto baseado em adaptação holomórfica de função para solucionar o problema de despacho econômico de máquinas térmicas em sistema de transmissão com perdas. O resultado é comparado com aquele obtido com o método de Newton-Raphson clássico. Os testes são efetuados em um sistema térmico com 6 unidades ($N = 6$) conectados por meio de uma interconexão para atender uma carga de 1400 MW. A Tabela 1 indica as constantes das curvas de calor de cada unidade, assim como o preço do combustível.

Tabela 1: Dados da curva de calor $H_i(P_i)$, preço do combustível e coeficientes das curvas de perda

	par. Btu/h			preço	$d_i(10^{-5})$
Un.	a_i	b_i	$c_i(10^{-3})$	$\$/Btu$	MW^{-1}
1	510	7,2	1,42	1,10	3
2	310	7,8	1,94	1,00	9
3	78	7,9	4,82	1,00	12
4	125	7,0	3,00	1,05	8
5	240	7,9	2,50	1,08	10
6	340	7,4	1,70	1,03	13

Inicialmente, foram efetuados testes considerando o caso sem perdas de transmissão e os geradores operando sem restrições de potência. As potências despachadas para as unidades geradoras foram, em MW:

$$P^T = [318,6 \;\; 287,4 \;\; 105,3 \;\; 248,5 \;\; 71,0 \;\; 369,3]$$

O preço incremental para esta situação sem perdas indica $\lambda = 8,9152$ $\$/MWh$.

Na sequência, agora foram efetuados testes levando em conta perdas de transmissão. Foram avaliadas duas situações distintas: a) operação com limite de gerador livre, ou seja, sem limite (SL); b) operação com limite violado. Efetuou-se o cálculo do PDE utilizando, então, os Algoritmos 1 e 2 até que fosse alcançada convergência. Foram realizados cálculos por meio da técnica adaptação holomórfica de funções e do método de Newton-Raphson. A norma infinita do erro absoluto entre os resultados obtidos pelas duas técnicas seviu de base para comparação do desempenho das duas abordagens. Em particular, utilizou-se o método de Newton-Raphson como referência para se verificar a precisão da técnica baseada na abordagem por função holomórfica. Para aceitação da solução com o método NR, foi estabelecido *mismatch* das equações igual a 10^{-6}. Por sua vez, para a norma do erro entre as duas abordagens, fixou-se tolerância 10^{-4}.

Em todos os casos de solução das equações não-lineares pelo método NR houve convergência em 4 iterações. Com relação aos dados utilizados para se gerar a aproximação de funções holomórficas, foram calculados 9 coeficientes para as séries das variáveis P_i que variavam e de λ. Consequentemente, calcularam-se aproximações de Padé com polinômios de ordem 4, tanto no denominador quanto no numerador. Obviamente, na situação em que as variáveis P_i foram fixadas, devido a violação de limite, não é necessário determinar nenhuma série, pois o valor da variável coincide com o próprio valor do limite.

A Tabela 2 apresenta um sumário de dados e resultados de simulações, quando o PDE é avaliado considerando perdas de transmissão.

Tabela 2: Dados de limites e de simulações para busca da solução do PDE para três casos

Un.	$\underline{P}$ (MW)	$\overline{P}$ (MW)	caso 1	caso 2	caso 3
1	100	350	382,7	**350,0**	**350,0**
2	180	280	275,2	283,8	**280,0**
3	100	200	120,4	124,5	125,1
4	100	300	254,0	260,3	261,2
5	80	150	109,8	116,6	117,6
6	100	400	288,1	295,9	297,1

Na coluna 1 da Tabela 2, indica-se o número da unidade, ao passo que nas colunas 2 e 3 são fornecidos os valores de potência mínima e máxima da unidade. Nas colunas 4 a 6 são exibidos resultados referentes aos despachos das unidades geradoras para três cenários estudados. No primeiro (caso 1), os limites das unidades ficaram livres. Observa-se neste caso que a unidade 1 teve seu limite superior $P_1 = 350$ MW violado. O erro absoluto verificado quando se efetuou o cálculo das potências pelo método de Newton-Raphson e abordagem holomórfica foi $3,13 \times 10^{-5}$. O valor de λ resultou em 9,3297 $\$/MWh$. Em função deste resultado, passou-se a considerar o segundo cenário (caso 2), no qual apenas a unidade 1 foi despachada em seu limite máximo. Os resultados de despacho considerando esta situação são apresentados na coluna 5 da tabela. Mas, após se determinar novamente a solução do PDE, observou-se que a unidade 2 também extrapolou seu limite superior. O erro absoluto entre as duas abordagens numéricas implementadas foi $1,23 \times 10^{-5}$. Em vista desta violação adicional, considerou-se novo cenário (caso3). Nesta situação, as unidades 1 e 2, que tiveram seus limites superiores violados, foram despachadas com potência em valor máximo, ou seja, com $P_1 = 350$ MW e $P_2 = 280$ MW. Os resultados referentes ao despacho para esta última situação são mostrados na coluna 6 da Tabela 2. O erro absoluto calculado considerando as duas abordagens foi $1,34 \times 10^{-5}$. Após obter a solução do PDE para este último caso, verificou-se que todas as unidades passaram a operar dentro dos seus limites.

Avaliando o custo incremental e as variáveis de folga nas situações de violação de limites, identifica-se que no cenário 2, os valores de λ e da variável de folga $\overline{\mu}_1$ foram 9,3801 $\$/MWh$ e 0,1697 $\$/MWh$, respectivamente. Enquanto isto, para o cenário 3, os valores, em $\$/MWh$, foram: $\lambda = 9,3876$, $\overline{\mu}_1 = 0,1771$ e $\overline{\mu}_2 = 0,0281$. Diante dos resultados obtidos no cenário 3, com todas variáveis dentro dos seus limites e considerando que os valores das variáveis de folga são positivos, significa que os valores na coluna 6 da Tabela 2 são os ótimos do problema. Note-se que os custos incrementais das variáveis com limites não violados tiveram crescimento progressivo de 9,3297 $\$/MWh$ (caso 1) a 9,3876 $\$/MWh$ (caso 3).

Os cálculos foram realizados no aplicativo Matlab, em um notebook AMD Intel $Core^{TM}$ i7 CPU com 2,5 GHz e 16 GB RAM. Os resultados de tempo de execução dos cálculos para os dois métodos testados foram desprezíveis.

5.1 Análise de complexidade

Nas resoluções das equações não-lineares pelo método de Newton-Raphson, a cada iteração é necessário realizar uma fatoração LU da matriz jacobiana associada ao problema. Portanto, houve necessidade de 4 fatorações LU por sistema não-linear resolvido conforme o Algoritmo 2. Já pelo método de adaptação holomórfica de funções, os coeficientes das séries de potência foram calculadas direta e explicitamente, não requerendo fatoração LU em nenhum dos algoritmos.

6 Conclusões

Este artigo apresentou uma técnica baseada na adaptação holomórfica de funções para solucionar o problema de despacho econômico com perdas de transmissão. A técnica baseada em função holomórfica foi proposta recentemente como alternativa para solucionar o problema de fluxo de carga em sistemas de potência (Trias, 2012). A mesma foi adaptada neste trabalho para contemplar a aplicação investigada.

O método proposto mostrou-se bastante apropriado para aplicação ao problema de despacho econômico com perdas de transmissão, principalmente em razão da sua eficácia como ferramenta para solucionar o problema não-linear resultante das condições de otimalidade de primeira ordem.

A metodologia proposta foi comparada ao método Newton-Raphson, apresentando numericamente resultado similar. Os testes efetuados em um sistema com 6 unidade térmicas, demonstraram uma adequada precisão ao se comparar resultados dos dois métodos.

Em trabalhos futuros, os autores pretendem investigar a aplicação da técnica também ao problema de despacho econômico dinâmico (Han et al., 2001).

Referências

Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis: an Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, McGraw-Hill.

Aldridge, C. J., McKee, S., McDonald, J. R., Galloway, S. J., Dahal, K. P. and Macqueen, J. F. B. (2001). Knoowledge-based genetic algorithm for unit commitment, *IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution* **148**(2): 146–152.

Feng, Y. (2015). *Solving for the Low-Voltage/Large-Angle Power Flow Solutions by Using the Holomorphic Embedding Method*, PhD thesis, Arizona State Univ.

G. Baker, P. G.-M. (1996). *Padé approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press.

Grainger, J. J. and Stevenson, W. D. (1994). *Power System Analysis*, McGraw-Hill.

Han, X. S., Gooi, H. B. and Kirschen, D. S. (2001). Dynamic economic dispatch: Feasible and optimal solution, *IEEE Transaction on Power Systems* **16**(1): 22–28.

Liang, Z. X. and Glover, J. D. (1992). A zoom feature for a dynamic programming solution to economic dispatch including transmission losses, *IEEE Transaction on Power Systems* **7**(2): 544–549.

Rao, S., Feng, Y., Tylavsky, D. J. and Subramanian, M. K. (2016). The holomorphic embedding method applied to the power-flow problem, *IEEE Transactions on Power Systems* **31**(5): 3816–3828.

Stahl, H. (1997). The convergence of padé approximants to functions with branch points, *Journal of Approximation Theory* **91**(2): 139–204.

Subramanian, M. K. (2014). *Application of holomorphic embedding to the power-flow problem*, Master's thesis, Arizona State Univ.

Sydulu, M. (1999). A very fast and effective non-iterative λ-logic based algorithm for economic dispatch of thermal units, *Proc. of IEEE TENCON*, pp. 1434–1437.

Tawfak, L., Bahrani, A., Patra, J. C. and Kowalczyk, R. (2016). Multi-gradient pso algorithm for economic dispatch of thermal generating units in smart grid, *2016 IEEE Innovative Smart Grid Technologies - Asia (ISGT-Asia)*, pp. 258–263.

Trias, A. (2012). The holomorphic embedding load flow method, *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pp. 1–8.

Wood, A. J. and Woolenberg, B. F. (1996). *Power Generation, Operation and Control*, Wiley.

Yalcinoz, T. and Altun, H. (2001). Power economic dispatch using a hybrid genetic algorithm, *IEEE Power Engineering Review* **2**(3): 59–60.