

FILTRAGEM DE SISTEMAS NÃO-LINEARES: CONSIDERANDO A VARIAÇÃO DA ESTIMATIVA COMO FONTE DE INCERTEZA

MARCOS R. FERNANDES*, RAFAEL F. SOUTO†, JOÃO BOSCO R. DO VAL*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
Campinas, SP, Brasil*

*†Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília (IFB)
Brasília, DF, Brasil*

Emails: marofe@dt.fee.unicamp.br, rafael.souto@ifb.edu.br, jbosco@dt.fee.unicamp.br

Abstract— In this paper, we propose a modified version of Extended Kalman Filter (EKF) for nonlinear state estimation, considering the linearization error and model uncertainties as an error-dependent noise and the estimation variation itself as a possible source of uncertainty. The update step of the filter is derived from a modified version of Regularized Mean Squares Problem (RLS). A systematic way to implement it in real-time applications and a numerical example is presented to illustrate the benefits of the new approach.

Keywords— Stochastic Filtering, Nonlinear Kalman Filtering, Uncertain models, Robust Filtering.

Resumo— Este trabalho propõe uma versão modificada do Filtro de Kalman Estendido (FKE) para estimação não-linear, considerando os erros de linearização e incertezas de modelagem como ruídos dependentes do erro de estimação e a própria variação da estimativa como possível fonte de incerteza. O passo de atualização é obtido através de uma versão modificada do problema de Mínimos Quadrados Regularizados e uma forma sistemática para implementação em aplicações de tempo real é disponibilizada. Ao final, um exemplo numérico é apresentado para ilustrar os benefícios da nova abordagem.

Palavras-chave— Filtragem Estocástica, Filtro de Kalman Estendido, Modelos Incertos, Filtragem Robusta.

1 Introdução

A filtragem estocástica tem um papel crucial nas áreas de processamento de sinais e sistemas de controle. O famoso Filtro de Kalman (FK), apresentado em (Kalman, 1960), é amplamente explorado em diversas áreas da Engenharia. Quando aplicado a sistemas lineares com distribuição Gaussiana e modelo precisamente conhecido, o FK apresenta o mínimo erro quadrático médio (MSE). No entanto, uma vez que no mundo real o comportamento dos sistemas são em geral não-lineares e ainda podem estar sujeitos a incertezas de modelagem, é interessante a extensão de novos algoritmos para tratar os sistemas não-lineares.

Desde os trabalhos de Rudolf Emil Kalman em 1960, vários outros algoritmos foram propostos na literatura, como o Filtro de Kalman Estendido (FKE), o Filtro de Kalman *Unscented* (FKU) e o Filtro de Partículas (FP). Em particular, o FKE foi uma das primeiras variações do FK tradicional e é utilizado em diversas aplicações, como em sistemas de radar, visão computacional, robótica móvel e estimação de atitude. O FKE faz uso da expansão em série de Taylor do modelo não-linear em torno da estimativa do estado, gerando um modelo linear aproximado para cada instante de tempo. No entanto, tal linearização torna o filtro subótimo e introduz inevitavelmente erros que podem degradar severamente o seu desempenho (Einicke and White, 1999).

Com o intuito de melhorar o desempenho

do FKE convencional diferentes abordagens foram desenvolvidas nas últimas décadas. Alguns exemplos são dados a seguir. Em (Einicke and White, 1999) o erro de linearização é tratado como função do erro de estimação e uma versão robusta do FKE é desenvolvida através de otimização $\mathcal{H}_\infty$. Um filtro robusto com custo garantido é proposto em (Souto et al., 2009) considerando o modelo linearizado com incertezas limitadas por norma. Em (Kwon and Han, 2015), um algoritmo no qual realiza-se a predição do erro de linearização é desenvolvido. Já em (Yengera et al., 2017), um FKE robusto é implementado utilizando-se da abordagem baseada em regularização com penalidade apresentada em (Ishihara et al., 2015).

Diferentemente dos trabalhos citados acima, este artigo adota uma forma alternativa para a representação das incertezas e erros de modelagem, motivado pelos trabalhos na área de controle estocástico de (do Val and Souto, 2017) e (Pedrosa et al., 2017), nos quais as incertezas de modelo, devido a linearizações ou mesmo dinâmicas não consideradas, são representadas por ruídos Gaussianos dependentes do estado e do controle. Em tais abordagens, a excursão do controle e do estado para valores distantes do ponto de operação atua como uma fonte de incerteza. Essa abordagem é chamada em inglês de *Control Variation Increase Uncertainty* (CVIU). Uma característica interessante do controle CVIU é o surgimento de uma região no espaço de estados na qual o ótimo é a não variação do sinal de controle.

Uma versão “dual” da abordagem CVIU para filtragem de sistemas não-lineares é proposta aqui, em que as incertezas são representadas por ruídos dependentes do erro de estimação e, na etapa de atualização, considera-se que a própria variação da estimativa pode atuar como fonte de incerteza. É demonstrado que tais ideias, ao serem incorporadas ao projeto do filtro, podem fornecer melhores resultados comparados com o FKE convencional.

O trabalho é organizado da seguinte forma. Na Seção 2 o problema de filtragem não-linear é formulado e os erros devido a linearização são discutidos. Uma versão modificada do FKE é apresentada na Seção 3, e em seguida, na Seção 4 um exemplo numérico é desenvolvido e comparações com o FKE são realizadas. Por fim, as conclusões são apresentadas na Seção 5.

Notação: $\mathbb{R}^n$ representa o espaço Euclidiano n -dimensional, $\text{Diag}(X)$ é a matriz formada pelos elementos diagonais de X , $\text{diag}(|x|)$ é uma matriz diagonal formada pelos elementos do vetor $[|x_1| \dots |x_n|]'$, $x \in \mathbb{R}^n$. X' indica o transposto de X . $X \succ (\succeq) 0$ denota que X é uma matriz positiva (semi) definida, $(M)(\cdot)'$ e $\text{He}(M)$ indicam MM' e $M + M'$ respectivamente, no qual M pode ser uma expressão matricial, $\mathbb{E}\{x\}$ denota o valor esperado de x , $\hat{x}_{j|k}$ indica a estimativa de x_j dado o conjunto de medidas $Y^k = \{y_0, \dots, y_k\}$ e $\|x\|_W^2 = x'Wx$.

2 Filtragem de sistemas não-lineares

Considere o sistema estocástico não-linear dado por

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + \sigma_k w_k, \quad (1)$$

$$y_k = h_k(x_k) + \nu_k \varepsilon_k, \quad (2)$$

no qual $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções diferenciáveis, $\sigma_k \in \mathbb{R}^{n \times s}$, $\nu_k \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e w_k, ε_k são processos Gaussianos multidimensionais, i.i.d., com média nula e satisfaz

$$\mathbb{E}\{w_k w_k'\} = I, \quad \mathbb{E}\{\varepsilon_k \varepsilon_k'\} = I, \quad \mathbb{E}\{w_k \varepsilon_k'\} = 0.$$

As matrizes $R_k = \nu_k \nu_k'$, $Q_k = \sigma_k \sigma_k'$ indicam respectivamente a covariância do ruído de medição e do modelo¹. O problema de filtragem não-linear consiste em obter a melhor estimativa do estado x_k , atendendo a um critério de desempenho, através do conjunto de medidas Y^k .

Uma forma de tratar o problema é buscar por aproximações lineares para o modelo. Assumindo que se tenha a disposição as estimativas $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k|k-1}$ do estado, pode-se aplicar a expansão em série de Taylor em (1) e (2) ao redor de $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k|k-1}$ respectivamente, conforme apresentado em

¹Em geral, Q_k e R_k não são perfeitamente conhecidas.

(Anderson and Moore, 1979, pg.195), o que resulta em

$$\begin{aligned} f_k(x_k) &= f_k(\hat{x}_{k|k}) + A_k e_k + \delta f_k(e_k), \\ h_k(x_k) &= h_k(\hat{x}_{k|k-1}) + H_k e_k^- + \delta h_k(e_k^-), \end{aligned}$$

em que $e_k = x_k - \hat{x}_{k|k}$, $e_k^- = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$ e

$$A_k = \left. \frac{\partial f_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}}, \quad H_k = \left. \frac{\partial h_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}},$$

são os Jacobianos de f e h . Assim, o modelo do sistema pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + \theta_k + \sigma_k w_k + \delta f_k(e_k), \\ y_k &= H_k x_k + \Omega_k + \nu_k \varepsilon_k + \delta h_k(e_k^-), \end{aligned}$$

com

$$\theta_k = f_k(\hat{x}_{k|k}) - A_k \hat{x}_{k|k}, \quad (3)$$

$$\Omega_k = h_k(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k \hat{x}_{k|k-1}. \quad (4)$$

Note que $\delta f_k(e_k)$ e $\delta h_k(e_k^-)$ representam os termos de ordem superiores não considerados da série, assim como também possíveis imprecisões de modelagem

$$\begin{aligned} \delta f_k(e_k) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f_k(x_k)}{\partial x_k^n} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} (e_k)^n \pm \Delta_1, \\ \delta h_k(e_k^-) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n h_k(x_k)}{\partial x_k^n} \right|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}} (e_k^-)^n \pm \Delta_2. \end{aligned}$$

Em (Anderson and Moore, 1979) tais incertezas são desconsideradas e o FKE é derivado através da aplicação do FK tradicional. Uma versão modificada do FKE de forma a considerar tais imprecisões é apresentada a seguir.

3 FKE Modificado

Motivado pela abordagem CVIU, é proposta a seguinte representação para o sistema

$$x_{k+1} = A_k x_k + \theta_k + \sigma_k w_k + \tilde{\sigma}_f(e_k) \varepsilon_k^x, \quad (5)$$

$$y_k = H_k x_k + \Omega_k + \nu_k \varepsilon_k + \tilde{\sigma}_h(e_k^-) \varepsilon_k^y, \quad (6)$$

em que

$$\begin{aligned} \delta f_k(e_k) &\approx \tilde{\sigma}_f(e_k) \varepsilon_k^x \equiv (\sigma_f + \bar{\sigma}_f \text{diag}(|e_k|)) \varepsilon_k^x, \\ \delta h_k(e_k^-) &\approx \tilde{\sigma}_h(e_k^-) \varepsilon_k^y \equiv (\sigma_h + \bar{\sigma}_h \text{diag}(|e_k^-|)) \varepsilon_k^y, \end{aligned}$$

e $\varepsilon_k^x, \varepsilon_k^y$ são processos Gaussianos multidimensionais, i.i.d., com média nula, variâncias unitárias e não correlacionados com w_k, ε_k . Os parâmetros $\sigma_f, \bar{\sigma}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma_h, \bar{\sigma}_h \in \mathbb{R}^{p \times n}$ indicam a magnitude das incertezas do modelo.

3.1 Atualização

Tendo a disposição uma estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ com covariância $P_{k|k-1} \succ 0$, na etapa de atualização o filtro busca melhorar a estimação utilizando-se da informação disponível na medição. Conforme apresentado em (Bryson, 1975), o passo de atualização do FK clássico pode ser obtido através da minimização da seguinte medida de desempenho

$$\bar{J}(x, y) = \|x - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|y - Hx\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (7)$$

de forma que

$$\hat{x}_{k|k} = \arg \min_x \bar{J}(x, y).$$

No entanto, diante de incertezas de modelagem e erros de linearização, adota-se aqui uma variação da medida (7), de forma a considerar possíveis imprecisões na matriz H , dado pela seguinte expressão

$$J(v, z) = \mathbb{E}\{v' P_{k|k-1}^{-1} v + \|H_k v - z + \tilde{\sigma}_h(v) \varepsilon_k^v\|_{R_k^{-1}}^2 | Y^k\}, \quad (8)$$

com

$$\begin{aligned} v &= \hat{x}_{k|k} - \hat{x}_{k|k-1}, \\ z &= y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1}), \\ \tilde{\sigma}_h(v) &\equiv \sigma_h + \bar{\sigma}_h \text{diag}(|v|), \end{aligned} \quad (9)$$

no qual v representa a variação da estimativa entre os instantes *a priori* e *a posteriori*, z o resíduo da estimativa.

Note que, considerando a matriz H como $(H_k \pm \delta H)$, tem-se $\tilde{\sigma}_h(v) \varepsilon_k^v \approx \delta H v$, indicando as incertezas presentes no modelo de medição, e ε_k^v é um processo Gaussiano multidimensional, i.i.d., com média nula e não correlacionado com os demais processos.

A equação (8) é uma versão adaptada do problema de Mínimos Quadrados Regularizado, ou do inglês *Regularized Mean Squares* (RLS), que pode ser encontrado em detalhes em (Kailath et al., 2000, pg.51). A estimativa *a posteriori* é então dada por $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + v^*$, em que

$$v^* = \arg \min_v J(v, z).$$

Ou seja, busca-se a variação da estimativa que minimiza a medida de incerteza adotada para cada instante de tempo. Para tal estratégia é cunhado o termo em inglês *Estimation Variation Increase Uncertainty* (EVIU). Note que (8) é não diferenciável na origem, devido (9). Portanto, para obtenção da solução deve-se empregar ferramentas de otimização não-suave como o subgradiente

(Clarke et al., 2008). Uma vez obtido o subgradiente de (8), pode-se obter a solução ótima v^* através de

$$\partial_v J(v, z) = 0.$$

Contudo, para obter o valor ótimo $v^* = [v_1^* \dots v_n^*]'$, verifica-se que é necessário conhecer o sinal de cada componente de v^* *a priori*.

Avaliando o comportamento do subgradiente em relação ao resíduo z é possível inferir o sinal de cada componente v_i^* , conforme definido pelo Lema 1.

Lema 1 (Sinal da solução) *Para a medida de incerteza definida em (8), cuja solução ótima é o vetor $v^* = [v_1^* \dots v_n^*]'$, tem-se*

$$\begin{cases} v_i^* > 0, & \text{se } z \in \mathcal{Z}_i^+, \\ v_i^* < 0, & \text{se } z \in \mathcal{Z}_i^-, \\ v_i^* = 0, & \text{se } z \in \mathcal{Z}_i^0, \end{cases}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_i^+ &= \{z \in \mathbb{R}^p : \lim_{v_i \downarrow 0} \partial_{v_i} J(v, z) < 0\}, \\ \mathcal{Z}_i^- &= \{z \in \mathbb{R}^p : \lim_{v_i \uparrow 0} \partial_{v_i} J(v, z) > 0\}, \\ \mathcal{Z}_i^0 &= \{z \in \mathbb{R}^p : (\mathcal{Z}_i^+ \cup \mathcal{Z}_i^-)^c\}. \end{aligned}$$

A notação $\partial_{v_i} J(v, z)$ indica *i*-ésima componente do subgradiente² de J em relação a v .

Prova: [Sinal da solução] Considere as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{w' \phi w\} &= \text{tr}(\phi \text{cov}(w)), \\ \text{tr}[\phi \text{diag}(|\eta|)^2] &= \eta' \text{Diag}(\phi) \eta, \\ \text{tr}[\phi \text{diag}(|\eta|)] &= \mathcal{S}'(\eta) \text{Diag}(\phi) \eta, \\ \mathcal{S}(\eta) &= [s_1(\eta_1) \dots s_n(\eta_n)]', \quad (10) \\ s_i(\eta_i) &= \begin{cases} +1, & \text{if } \eta_i > 0, \\ -1, & \text{if } \eta_i < 0, \\ [-1, 1], & \text{if } \eta_i = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

no qual ϕ é uma matriz, w um vetor aleatório, η um vetor determinístico e $\text{cov}(w)$ indica covariância do vetor w . Expandindo (8), obtém-se

$$\begin{aligned} J(v, z) &= v'(P_{k|k-1}^{-1} + H_k' R_k^{-1} H_k) v + z' R_k^{-1} z \\ &\quad - 2z' R_k^{-1} H_k v + \text{tr}[(\sigma_h + \bar{\sigma}_h \text{diag}(|v|))' R_k^{-1} (\cdot)] \\ &= v' M_k v + z' R_k^{-1} z - (2z' R_k^{-1} H_k - \mathcal{S}'(v) \Delta_h) v + \\ &\quad + \text{tr}[\sigma_h' R_k^{-1} \sigma_h], \quad (11) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} M_k &= P_{k|k-1}^{-1} + H_k' R_k^{-1} H_k + \Lambda_h, \\ \Lambda_h &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_h' R_k^{-1} \bar{\sigma}_h), \\ \Delta_h &= \text{Diag}(\sigma_h' R_k^{-1} \bar{\sigma}_h + \bar{\sigma}_h' R_k^{-1} \sigma_h). \end{aligned}$$

²Para mais informações sobre subgradiente e análise não-suave pode-se consultar (Clarke et al., 2008).

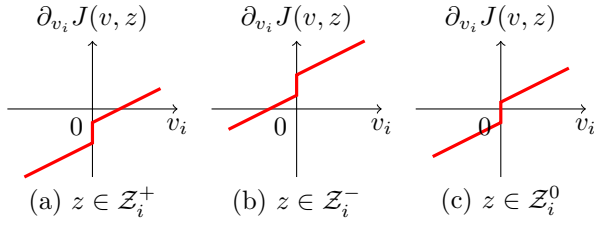


Figura 1: Comportamento de $\partial_{v_i} J(v, z)$ para z em diferentes regiões do $\mathbb{R}^p$. No caso (c), tem-se $v_i^* = 0$.

Note que $P_{k|k-1}^{-1} \succ 0$, $H'_k R_k^{-1} H_k \succeq 0$ e $\Lambda_h \succeq 0$ então $M_k \succ 0$ e (11) é estritamente convexo em v . Para cada $(v, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, o subgradiente de (11) é dado por

$$\partial_v J(v, z) = 2M_k v - 2H'_k R_k^{-1} z + \Delta_h \mathcal{S}(v). \quad (12)$$

Baseado no fato que (11) é convexo, tem-se que $\partial_{v_i} J(v, z)$ é crescente em v_i . Assim, pode-se determinar o sinal de v_i^* avaliando apenas $\partial_{v_i} J(v, z)|_{v_i=0}$, conforme ilustrado na Figura 1. Observe que

$$\lim_{v_i \downarrow 0} \partial_{v_i} J(v, z) = \max \partial_{v_i} J(v, z)|_{v_i=0}, \quad (13)$$

$$\lim_{v_i \uparrow 0} \partial_{v_i} J(v, z) = \min \partial_{v_i} J(v, z)|_{v_i=0}, \quad (14)$$

logo

$$\begin{aligned} \lim_{v_i \downarrow 0} \partial_{v_i} J(v, z) < 0 &\Rightarrow v_i^* > 0, \\ \lim_{v_i \uparrow 0} \partial_{v_i} J(v, z) > 0 &\Rightarrow v_i^* < 0, \end{aligned}$$

e Z_i^0 é definido como

$$Z_i^0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^p : 0 \in \partial_{v_i} J(v, z)|_{v_i=0} \right\}.$$

□

Pode ocorrer de Z_i^+ e Z_i^- serem conjuntos suficientemente grandes tal que Z_i^0 é uma região degenerada. O próximo lema apresenta condições para que Z_i^0 , $i = 1, \dots, n$, exista como uma região não-degenerada.

Lema 2 Se para algum $i = 1, \dots, n$ tem-se

$$(\Delta_h)_{ii} = (\bar{\sigma}_h R_k^{-1} \sigma_h + \sigma'_h R_k^{-1} \bar{\sigma}_h)_{ii} > 0$$

então a região Z_i^0 é não-degenerada.

Prova: Deve-se verificar, para cada componente de v^* , se o intervalo

$$\lim_{v_i \uparrow 0} \partial_{v_i} J(v, z)|_{v=v^*} \leq 0 \leq \lim_{v_i \downarrow 0} \partial_{v_i} J(v, z)|_{v=v^*}$$

pode ser vazio. De (12), (13) e (14), tem-se

$$-(\Delta_h)_{ii} \leq -2M_{k,i} v|_{v_i^*=0} + 2H'_{k,i} R_k^{-1} z \leq (\Delta_h)_{ii},$$

em que $M_{k,i}$, $H'_{k,i}$ indicam o i -ésimo vetor linha de M_k , H'_k e $(\Delta_h)_{ii}$ o i -ésimo elemento da diagonal de Δ_h . Se $(\bar{\sigma}'_h R_k^{-1} \sigma_h + \sigma'_h R_k^{-1} \bar{\sigma}_h)_{ii} > 0$ então conclui-se que Z_i^0 é não-degenerada. □

Corolário 3 (Inação) Dado um vetor z . Se z satisfaz

$$-(\Delta_h)_{ii} \leq 2H'_{k,i} R_k^{-1} z \leq (\Delta_h)_{ii} \quad (15)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, então $v^* = 0$.

Nesse caso, (15) representa hiper-planos que delimitam uma região na qual a solução ótima é a não-variação. Essa região é chamada de Inação.

A solução de (8) é então obtida pelo Teorema 4.

Teorema 4 (Solução) Um vetor v^* que minimiza (8) satisfaz

$$[I - \Phi + \Phi M_k] v^* = \Phi(H'_k R_k^{-1} z - \beta_k), \quad (16)$$

no qual

$$\Phi = \text{diag}(\gamma(v^*)), \quad (17)$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \Delta_h \mathcal{S}(v^*), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \gamma(v^*) &= [\gamma_1(v_1^*) \dots \gamma_n(v_n^*)]', \\ \gamma_i(v_i^*) &= \begin{cases} 0, & \text{se } v_i^* = 0, \\ +1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Prova: Note que se $z \notin \cup_{i=1}^n Z_i^0$ então $v_i^* \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Nesse caso, tem-se $\Phi = \text{diag}(\gamma(v^*)) = I$ e de (12) obtém-se

$$M_k v^* = H'_k R_k^{-1} z - \beta_k,$$

e dado que $M_k \succ 0$, existe, portanto, uma única solução para v^* . Se $z \in \cap_{i=1}^n Z_i^0$, pelo Lema 1 tem-se $v^* = 0$ e $\Phi = \text{diag}(\gamma(v^*))$ resulta na matriz nula. Se $z \in \cup_{i=1}^n Z_i^0 - \cap_{i=1}^n Z_i^0$ então deve-se resolver $\partial_{v_i} J(v, z) = 0$ para cada $v_i^* \neq 0$. De (12) constrói-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} M_{k,i} v &= H'_{k,i} R_k^{-1} z - \frac{1}{2} (\Delta_h)_{ii} s_i(v_i), \text{ se } s_i(v_i) = \pm 1 \\ v_i &= 0, \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Reescrevendo de forma matricial, obtém-se

$$[I - \Phi + \Phi M_k] v = \Phi(H'_k R_k^{-1} z - \beta_k).$$

□

Note que, para $[I - \Phi + \Phi M_k] \succ 0$, de (16) tem-se

$$v^* = [I - \Phi + \Phi M_k]^{-1} \Phi(H'_k R_k^{-1} z - \beta_k).$$

Assim, para o modelo (5)-(6) com uma estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ e respectiva covariância $P_{k|k-1}$, conclui-se que o passo de atualização é dado por

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{K_k(y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1})) - W_k \beta_k}_{v^*}, \quad (20)$$

em que $K_k = W_k H'_k R_k^{-1}$ e W_k é uma matriz que satisfaz

$$\Phi = [I - \Phi + \Phi M_k] W_k.$$

A matriz $P_{k|k}$ é dada pelo Lema 5.

Lema 5 Para a matriz $P_{k|k}$ definida por

$$P_{k|k} = \mathbb{E} \{ (x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})' | Y^k \}, \quad (21)$$

tem-se a equação de atualização de $P_{k|k}$ dada por

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)' + K_k \tilde{R}_k K_k' + (I - K_k H_k) \tilde{e}_k \beta_k' W_k + W_k \beta_k \tilde{e}_k' (I - K_k H_k)' + W_k \beta_k \beta_k' W_k, \quad (22)$$

em que

$$\tilde{e}_{k+1} = A_k (I - K_k H_k) \tilde{e}_k + A_k W_k \beta_k, \quad (23)$$

$$\tilde{R}_k = R_k + (\sigma_h + \bar{\sigma}_h \text{diag}(|\tilde{e}_k|))(\cdot)'. \quad (24)$$

Prova: De (5)-(6) e (20) tem-se

$$\begin{aligned} e_k &= x_k - \hat{x}_{k|k} \\ &= x_k - \hat{x}_{k|k-1} - K_k (y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1})) + W_k \beta_k \\ &= (I - K_k H_k) e_k^- - K_k \xi + W_k \beta_k, \end{aligned} \quad (25)$$

em que $\xi = \nu_k \varepsilon_k + \tilde{\sigma}_h (e_k^-) \varepsilon_k^y$. Substituindo (25) em (21) obtém-se (22), que é uma versão modificada da Forma de *Joseph*, no qual $\tilde{e}_k = \mathbb{E}\{e_k^- | Y^k\}$ e

$$\tilde{R}_k \approx \mathbb{E}\{\xi \xi' | Y^k\}.$$

De (5) e (27), tem-se

$$\begin{aligned} e_{k+1}^- &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \\ &= A_k e_k + \sigma_k w_k + \tilde{\sigma}_f (e_k) \varepsilon_k^x. \end{aligned} \quad (26)$$

Substituindo (25) em (26) e tomando-se o valor esperado condicionado à Y^k obtém-se a recursão (23). $\square$

3.2 Predição

Após a etapa de atualização, pode-se então fazer a predição do estado futuro do sistema, como no FKE convencional, através de

$$\hat{x}_{k+1|k} = f_k(\hat{x}_{k|k}). \quad (27)$$

A matriz $P_{k+1|k}$ é dada por

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k' + \tilde{Q}_k,$$

em que

$$\tilde{Q}_k = Q_k + (\sigma_f + \bar{\sigma}_f \text{diag}(|\tilde{e}_k|))(\cdot)', \quad (28)$$

$$\tilde{e}_k = (I - K_k H_k) A_{k-1} \tilde{e}_{k-1} + W_k \beta_k, \quad (29)$$

com $\tilde{Q}_k \approx \mathbb{E}\{(\sigma_k w_k + \tilde{\sigma}_f (e_k) \varepsilon_k^x)(\cdot)' | Y^k\}$. A recursão (29) é obtida atrasando (26) em uma amostra, substituindo em (25) e tomando-se o valor esperado condicionado à Y^k .

A Tabela 1 apresenta o algoritmo completo do filtro proposto e um diagrama conceitual é ilustrado na Figura 2. Daqui em diante, o algoritmo da Tabela 1 é referenciado como FKE-EVIU (Filtro de Kalman Estendido EVIU).

Tabela 1: Algoritmo para FKE-EVIU

Inicialização:

Define $\hat{x}_{0|-1}, \bar{e}_0, \tilde{e}_0, P_{0|-1}$ e A_0

Atualização:

- 1: $\Delta_h \leftarrow \text{Diag}(\bar{\sigma}_h' R_k^{-1} \sigma_h + \sigma_h' R_k^{-1} \bar{\sigma}_h)$
 - 2: $\Lambda_h \leftarrow \text{Diag}(\bar{\sigma}_h' R_k^{-1} \bar{\sigma}_h)$
 - 3: $z_k \leftarrow y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1})$
 - 4: Obtem $\mathcal{S}(v_k)$ pelo Lema 1
 - 5: $\Phi \leftarrow \text{diag}(\gamma(v_k))$
 - 6: Obtem W_k que satisfaz $\Phi = (I - \Phi + \Phi(P_{k|k-1}^{-1} + H_k' R^{-1} H_k + \Lambda_h)) W_k$
 - 7: $K_k \leftarrow W_k H_k' R_k^{-1}$
 - 8: $\beta_k \leftarrow \frac{1}{2} \Delta_h \mathcal{S}(v_k)$
 - 9: $\hat{x}_{k|k} \leftarrow \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k - W_k \beta_k$
 - 10: $\tilde{R}_k \leftarrow R_k + (\sigma_h + \bar{\sigma}_h \text{diag}(|\tilde{e}_k|))(\cdot)'$
 - 11: $P_{k|k} \leftarrow (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)' + K_k \tilde{R}_k K_k' + W_k \beta_k \beta_k' W_k + \text{He}((I - K_k H_k) \tilde{e}_k \beta_k' W_k)$
 - 12: $\tilde{e}_{k+1} \leftarrow A_k [(I - K_k H_k) \tilde{e}_k + W_k \beta_k]$
- #### Predição:
- 13: $\hat{x}_{k+1|k} \leftarrow f_k(\hat{x}_{k|k})$
 - 14: $\bar{e}_k \leftarrow (I - K_k H_k) A_{k-1} \bar{e}_{k-1} + W_k \beta_k$
 - 15: $\tilde{Q}_k \leftarrow Q_k + (\sigma_f + \bar{\sigma}_f \text{diag}(|\bar{e}_k|))(\cdot)'$
 - 16: $P_{k+1|k} \leftarrow A_k P_{k|k} A_k' + \tilde{Q}_k$

Comentário 1 Note que fazendo $\bar{\sigma}_f = \sigma_f = \bar{\sigma}_h = \sigma_h = 0$ recupera-se o FKE convencional. Ou seja, o filtro proposto coincide com o FKE caso os erros de linearização e incertezas sejam desconsiderados. E caso o sistema seja linear, recupera-se o FK clássico.

Comentário 2 Se para um dado z_k , o corolário 3 for satisfeito, então tem-se $W_k = 0, K_k = 0$ e $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1}$ e $P_{k|k} = P_{k|k-1}$. Portanto, para um resíduo suficientemente pequeno o filtro comporta-se em “malha-aberta”.

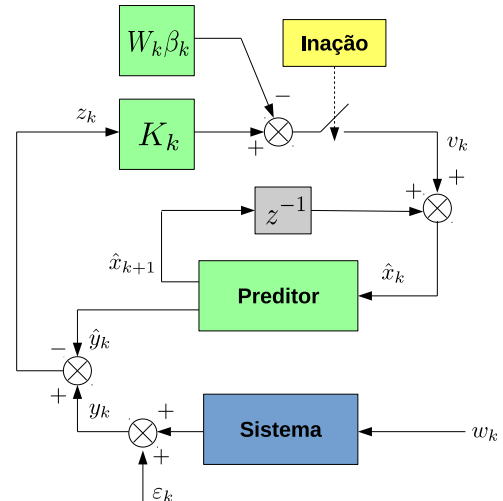


Figura 2: Diagrama conceitual do filtro proposto.

4 Exemplo Numérico

Para fins de demonstração, adota-se o modelo cinemático simplificado de um robô móvel, ilustrado

na Figura 3, dado por

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_k + v_k \cos(\theta_k) \Delta t \\ y_k + v_k \sin(\theta_k) \Delta t \\ \theta_k + \alpha_k \Delta t \end{bmatrix}}_{f(\tilde{x}_k)} + 0.01 w_k$$

no qual Δt é o tempo de amostragem, w_k é o ruído Gaussiano de processo, v_k e α_k são velocidades linear e angular respectivamente. Para esse exemplo, considera-se $\Delta t = 0.05s$, $v_k = 0.5$ m/s e $\alpha_k = 0.2$ rad/s para todo o horizonte de tempo.

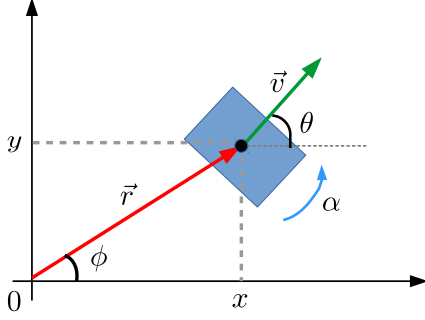


Figura 3: Ilustração do modelo cinemático.

A medição é dada por

$$\tilde{y}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ \phi_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \tan^{-1} \left(\frac{y_k}{x_k} \right) \\ \theta_k \end{bmatrix}}_{h(\tilde{x}_k)} + 0.1 \varepsilon_k,$$

em que ε_k é o ruído Gaussiano de medição. Os jacobianos desse sistema são dados por

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_k \sin(\theta_k) \Delta t \\ 0 & 1 & v_k \cos(\theta_k) \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{x}_k = \hat{x}_{k|k}$$

$$H_k = \begin{bmatrix} \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} & \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} & 0 \\ \frac{-y_k}{x_k^2 + y_k^2} & \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{x}_k = \hat{x}_{k|k-1}$$

São realizadas 1000 simulações Monte Carlo com 500 amostras cada utilizando-se do algoritmo da Tabela 1 e FKE convencional, apresentado em (Anderson and Moore, 1979, pg. 195). A inicialização é dada por $x_0 = [10 \ 10 \ 0]'$, $\hat{x}_{0|-1} = 0.95x_0$, $\bar{e}_0 = \tilde{e}_0 = [0 \ 0 \ 0]'$, $P_{0|-1} = 100I$, $Q = 0.0001I$ e $R = 0.1I$ para todas as realizações. Após os experimentos, é computado o *Mean Squared Error* (MSE) seguindo a metodologia utilizada em (Sayed, 2001), no qual o MSE é dado pela média amostral

$$\mathbb{E}\{\|\hat{x}_{k|k} - x_k\|^2\} \approx \frac{1}{1000} \sum_{j=1}^{1000} \|\hat{x}_{k|k}^{(j)} - x_k^{(j)}\|^2,$$

em que $\hat{x}_{k|k}^{(j)}$ representa a estimativa *a posteriori* na realização j .

Por simplicidade, é definido $\sigma_f = \bar{\sigma}_f = 0$ e $\sigma_h = \bar{\sigma}_h = \lambda I$, com $0.5 \leq \lambda \leq 2$. Verifica-se que o FKE-EVIU apresenta um melhor desempenho com $\lambda = 0.84$ para o exemplo tratado, conforme ilustra a Figura 4, sendo o ganho de desempenho dado pela relação entre as somatórias dos MSE durante as últimas 200 amostras

$$G(\%) = \left(1 - \frac{\sum_{k=300}^{500} \sum_{j=1}^{1000} \|\hat{x}_{k|k}^{(j)} - x_k^{(j)}\|^2}{\sum_{k=300}^{500} \sum_{j=1}^{1000} \|\bar{x}_{k|k}^{(j)} - x_k^{(j)}\|^2} \right) \times 100$$

em que $\hat{x}_{k|k}$ e $\bar{x}_{k|k}$ são as estimativas geradas respectivamente pelo FKEM e FKE.

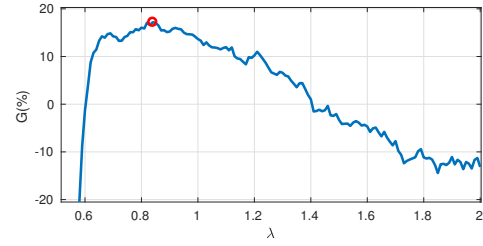


Figura 4: Ganho de desempenho em função de λ .

Observa-se que o erro do FKE-EVIU é consideravelmente menor do que o FKE no início da realização, conforme indica a Figura 5, ou seja, a trajetória estimada pelo FKE-EVIU converge para próximo do real mais rápido que o FKE convencional e ainda apresenta um ganho de desempenho de 18.8% considerando as últimas 200 amostras. A Figura 6 apresenta as trajetórias geradas em uma realização para o FKE Modificado (EVIU) e FKE convencional. E na Figura 7 é apresentado o erro absoluto relativo a cada estado para essa mesma realização.

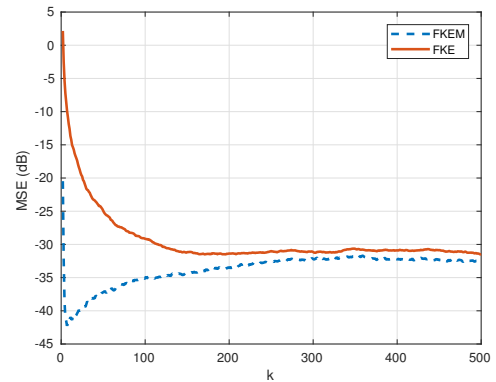


Figura 5: Curvas do MSE relativos ao FKE e FKEM (EVIU).

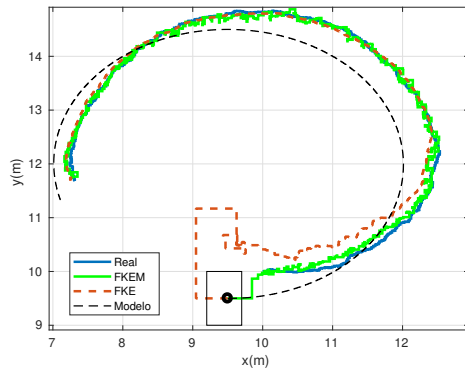


Figura 6: Trajetórias (sentido anti-horário) estimadas pelo FKE e FKEM (EVIU) com $\hat{x}_{0|-1} = [9.5 \ 9.5 \ 0]'$. A tracejada em preto é gerada apenas pelo modelo cinemático.

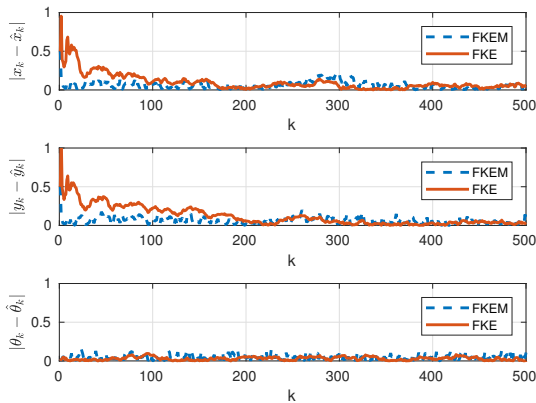


Figura 7: Erro absoluto para x_k e y_k e θ_k .

5 Conclusão

Esse trabalho apresenta uma nova abordagem para o problema de filtragem de sistemas não-lineares, na qual os erros de linearização são tratados como ruídos dependentes do erro de estimação. E diante das incertezas inerentes ao modelo, o filtro é equipado de forma a considerar que variações na estimativa podem aumentar as incertezas. A magnitude da variação a ser considerada ou não, é fornecida ao se obter a solução do RLS modificado no passo de atualização. Assim, uma versão modificada do FKE para filtragem em tempo real é desenvolvida e experimentos numéricos mostram que o filtro proposto apresenta desempenho superior ao FKE convencional, do ponto de vista do MSE, com uma escolha adequada dos parâmetros $\sigma_f, \tilde{\sigma}_f, \sigma_h, \tilde{\sigma}_h$.

6 Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio do CNPq Processo No.: 421486/2016-3 - Universal 01/2016.

Referências

- Anderson, B. D. and Moore, J. B. (1979). Optimal filtering, *Englewood Cliffs* **21**: 22–95.
- Bryson, A. E. (1975). *Applied optimal control: optimization, estimation and control*, CRC Press.
- Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Stern, R. J. and Wolenski, P. R. (2008). *Nonsmooth analysis and control theory*, Vol. 178, Springer.
- do Val, J. B. R. and Souto, R. F. (2017). Modeling and control of stochastic systems with poorly known dynamics, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(9): 4467–4482.
- Einicke, G. A. and White, L. B. (1999). Robust extended kalman filtering, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(9): 2596–2599.
- Ishihara, J. Y., Terra, M. H. and Cerri, J. P. (2015). Optimal robust filtering for systems subject to uncertainties, *Automatica* **52**: 111–117.
- Kailath, T., Sayed, A. H. and Hassibi, B. (2000). *Linear estimation*, Prentice Hall.
- Kalman, R. (1960). *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of basic Engineering.
- Kwon, B. K. and Han, S. (2015). A robust extended kalman filtering for linearization errors, *2015 15th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, pp. 1485–1487.
- Pedrosa, F. C., Nereu, J. C. and do Val, J. B. R. (2017). Stochastic optimal control of systems for which control variation increases uncertainty: A contribution to the discrete time case, *2017 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 2279–2284.
- Sayed, A. H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(7): 998–1013.
- Souto, R. F., Ishihara, J. Y. and Borges, G. A. (2009). Estimation for nonlinear discrete-time systems with uncertain linearization and noises statistics, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 2819–2824.
- Yengera, G., Inoue, R., Narasimhappa, M. and Terra, M. H. (2017). Computation of extended robust kalman filter for real-time attitude and position estimation, *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Porto Alegre-RS*.