

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO VARIANTE NO TEMPO VIA RESTRIÇÕES QUADRÁTICAS INTEGRAIS

THIAGO MARTINS SARDINHA*, ALBERTO MOTA SIMÕES*

*Praça Gen. Tibúrcio 80, Urca, CEP 22290-270

Departamento de Engenharia Elétrica - Instituto Militar de Engenharia

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Emails: thiagomsardinha@gmail.com , simoes@ime.eb.br

Abstract— This work discusses stability analysis of linear systems with time-varying delay via the Integral Quadratic Constraint (IQC) theory. In particular, the stability analysis considering a conic combination of different multipliers for the delay operator of interest is compared to the analysis via a small gain condition where the time delay is considered as an uncertain linear time-varying dynamics with bounded gain. Two numerical applications allow to compare conservativeness in both approaches.

Keywords— Time delay systems, IQC, time-varying delay.

Resumo— Este trabalho trata da análise de estabilidade de sistemas lineares com atraso variante no tempo a partir da teoria de Restrições Quadráticas Integrais. Em particular, a análise de estabilidade considerando-se a combinação cônica de diferentes multiplicadores para o operador atraso de interesse é comparada com a análise via uma condição de ganho pequeno considerando-se o atraso como uma dinâmica linear incerta variante no tempo e de ganho limitado. Duas aplicações numéricas permitem comparar o conservadorismo das abordagens.

Palavras-chave— Sistemas com atraso, Restrições Quadráticas Integrais, atraso variante no tempo.

1 Introdução

A análise de estabilidade de sistemas com atraso incerto é objeto de estudo há bastante tempo (WANG et al., 1987; Kharitonov, 1998). Sabe-se que a presença de atrasos no sistema pode degradar significativamente a resposta transitória, ou até mesmo levar à instabilidade. Muitas das vezes, o atraso decorre de uma limitação física, onde a disponibilização da informação em várias partes do sistema ao mesmo tempo não é possível (Gu et al., 2003). Há diversos sistemas que apresentam esse tipo de fenômeno devido às suas características intrínsecas, tais como linhas de transmissão em sistemas elétricos, redes pneumáticas e hidráulicas em sistemas mecânicos, ou ainda processos químicos (Debeljković and Nestorović, 2011). Em casos críticos como o de sistemas distribuídos, a robustez em relação ao tempo de atraso deve ser explicitamente abordada (Chiasson and Loiseau, 2007).

Dentre as ferramentas disponíveis na literatura para a análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo, destaca-se a análise via Restrições Quadráticas Integrais introduzida por Megretski and Rantzer (1997), mais comumente conhecida como análise IQC (do inglês, *Integral Quadratic Constraints*). O ferramental IQC constitui uma ferramenta poderosa para a análise de sistemas dinâmicos complexos potencialmente contendo elementos não-lineares, incertos, ou, como no presente caso, atrasos. A teoria IQC é tão flexível e geral que ela compreende como casos particulares, por exemplo, a chamada análise μ para sistemas incertos (Zhou et al., 1996), ou ainda o problema da estabilidade absoluta para

sistemas com não-linearidades do tipo limitadas em setor (Vidyasagar, 1992).

O cerne da abordagem IQC consiste em se identificar restrições quadráticas integrais satisfeitas pelo operador de interesse. Em Megretski and Rantzer (1997) são apresentadas algumas restrições para o operador de interesse modelando o atraso no presente trabalho. Em Kao and Rantzer (2007), o problema da análise de estabilidade para sistemas com atraso variante no tempo via IQC é mais profundamente discutido.

Em Zhu et al. (2015), é discutida uma abordagem um pouco diferente para o problema da análise de estabilidade de sistemas com atraso. Nesse trabalho, a ideia central consiste em se tratar o atraso como uma dinâmica linear variante no tempo incerta. O critério de estabilidade é, então, obtido a partir da aplicação de uma condição clássica de ganho pequeno.

O objetivo principal do presente trabalho é discutir a análise de sistemas lineares com atraso variante no tempo via o formalismo IQC, em particular mostrando que a abordagem do tipo ganho pequeno em Zhu et al. (2015) pode ser encontrada equivalentemente a partir do ferramental IQC. Dois exemplos numéricos são apresentados que permitem mostrar a flexibilidade da formulação IQC de Kao and Rantzer (2007), ao mesmo tempo que permitem dimensionar o conservadorismo na abordagem do tipo ganho pequeno em Zhu et al. (2015).

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 são apresentados os fundamentos da análise de estabilidade via restrições quadráticas integrais. A análise de estabilidade via IQC no

caso particular de sistemas com atraso é discutida em seguida na Seção 3. Na Seção 4, é discutido como a abordagem do tipo ganho pequeno de Zhu et al. (2015) relaciona-se com o formalismo IQC. Por fim, na Seção 5 são apresentadas duas aplicações numéricas ilustrando os pontos discutidos anteriormente.

Notação: O símbolo $\mathbf{L}_2^m$ denota o espaço das funções quadraticamente integráveis, com coeficientes em $\mathbb{R}^m$, definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$. $\mathbf{L}_{2e}^m$ denota o espaço $\mathbf{L}_2^m$ estendido. A notação $\mathbf{RL}_\infty$ denota o conjunto de funções racionais próprias com coeficientes reais sem polos no eixo imaginário, enquanto que $\mathbf{RH}_\infty$ denota o subespaço de $\mathbf{RL}_\infty$, conjunto de funções racionais próprias com coeficientes reais sem polos no semiplano direito. $\mathbf{RL}_\infty^{m \times n}$ e $\mathbf{RH}_\infty^{m \times n}$ denotam, respectivamente, o conjunto das matrizes $m \times n$ com elementos em $\mathbf{RL}_\infty$ e $\mathbf{RH}_\infty$. Símbolos $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ denotam, respectivamente, o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas e Hermitianas. A notação $\hat{y}(j\omega)$ denota a transformada de Fourier de um dado sinal $y(t)$.

2 Preliminares

Restrições Quadráticas Integrais, chamadas no presente trabalho por seu acrônimo em inglês, IQC, são desigualdades empregadas na análise de sistemas dinâmicos para descrever operadores sobre sinais. Constituem-se em uma ferramenta poderosa para se analisar sistemas dinâmicos complexos possuindo elementos não-lineares, variantes no tempo e incertos, entre outros. Introduce-se a seguir a definição precisa de IQC.

Definição 1 Diz-se que dois sinais $u \in \mathbf{L}_2^m[0, \infty)$ e $y \in \mathbf{L}_2^l[0, \infty)$ satisfazem a IQC definida por Π : $j\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^{(l+m)(l+m)}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0. \quad (1)$$

Via de regra, o denominado *multiplicador* Π em (1) pode ser qualquer função Hermitiana mensurável. Na maioria dos casos, porém, é suficiente se utilizar de funções racionais limitadas no eixo imaginário. Neste trabalho, considera-se que o multiplicador $\Pi(j\omega)$ é racional, hermitiano, e que pode ser decomposto em blocos da forma

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_1(j\omega) & \Pi_o(j\omega) \\ \Pi_o^H(j\omega) & \Pi_2(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Considerando-se Π um operador limitado no espaço $\mathbf{L}_2$, então o multiplicador define uma forma quadrática em $\mathbf{L}_2$ dada por

$$\begin{aligned} \sigma_\Pi(y, u) &\triangleq \left\langle \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}, \Pi \left(\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \right) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{y}(j\omega) \\ \hat{u}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Percebe-se, assim, pelo teorema de Parseval, que a IQC (1) descrevendo a distribuição de energia no espectro de frequências pode ser equivalentemente reescrita no domínio do tempo como $\sigma_\Pi(y, u) \geq 0$.

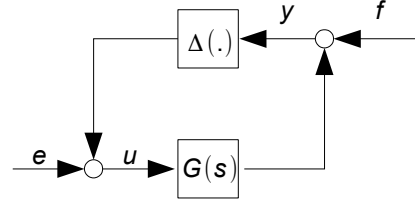


Figura 1: Representação de sistema realimentado.

Considere, agora, o sistema em malha fechada representado na FIG. 1, descrito por

$$\begin{cases} y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega) + f(j\omega), \\ u(j\omega) = \Delta(y(j\omega)) + e(j\omega), \end{cases} \quad (4)$$

com G e Δ operadores causais em $\mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ e $\mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$, respectivamente. Os sinais $f \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, \infty)$ e $e \in \mathbf{L}_{2e}^m[0, \infty)$ desempenham o papel de ruídos e perturbações da interconexão.

A interconexão da FIG. 1 representa uma abstração na qual se divide um sistema originalmente complexo em dois subsistemas realimentados mais simples. Assume-se que G é um operador linear invariante no tempo, com função de transferência $G(s)$ em $\mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$, e que o operador Δ possui ganho $\mathbf{L}_2$ limitado. Este último é o elemento do sistema que traduzirá um componente não linear, variante no tempo ou incerto. O teorema a seguir, introduzido por Megretski and Rantzer (1997), representa a ferramenta de análise central neste trabalho.

Teorema 1 Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$, e seja Δ um operador causal limitado. Se:

1. para cada $\rho \in [0, 1]$, a interconexão de G e $\rho\Delta$ é bem posta;
2. para cada $\rho \in [0, 1]$, a IQC (1) definida por Π é satisfeita por $\rho\Delta$;
3. existe $\epsilon > 0$ tal que, $\forall \omega \in [0, \infty)$,

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I; \quad (5)$$

então a interconexão entre G e Δ em (4) é estável.

As condições do Teorema 1, em especial o item 2, não são a princípio triviais de serem verificadas, no sentido de que nem sempre é uma tarefa simples encontrar uma IQC que satisfaça esta última condição. Assim, um tema ativo de pesquisa é a identificação de IQC satisfeitas por operadores de interesse prático. Na Seção 3, serão apresentadas IQC de interesse para a análise de sistemas com atraso.

Em consequência do Teorema 1, se forem satisfeitas as condições 1 e 2, o teste para saber se o sistema possui estabilidade se traduz em se verificar a validade da condição (5). É oportuno destacar que a inequação (5) é uma desigualdade matricial no domínio da frequência (ou FDI, do inglês *Frequency Domain Inequality*), portanto, de dimensão infinita.

É também importante notar que se $\rho\Delta$ satisfaz as IQC definidas por Π_i , $i = 1, \dots, n$, então a combinação cônica $x_1\Pi_1 + \dots x_n\Pi_n$, $x_i \geq 0$, também define uma IQC para $\rho\Delta$. Logo, uma condição suficiente para a estabilidade é a existência de escalares $x_1, \dots, x_n \geq 0$ tais que (5) valha para $\Pi \triangleq \Pi_1 + \dots \Pi_n$.

O formalismo matemático das IQC oferece uma forma simplificada para modelar sistemas complexos. Como exemplo, é possível representar sistemas que apresentam vários elementos incertos concomitantes, dividindo o sistema complexo em blocos elementares. Assim, é possível converter uma única IQC em um conjunto de IQC descrevendo os subsistemas menores. A obtenção das IQC para os subsistemas é uma parcela da análise. Encontradas as IQC, a questão da estabilidade do sistema geral se resume na solução direta da EQ. (5) para a IQC geral.

Considere, por exemplo, o caso em que o bloco Δ é constituído por n sub-operadores Δ_i , $i = 1, \dots, n$, de modo que

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n).$$

Seja o vetor de entrada y dividido de forma correspondente, $y = [y_1 \dots y_n]$, de modo que y_i representa a entrada do i -ésimo bloco Δ_i . Supõe-se que cada bloco Δ_i satisfaz uma IQC definida por um multiplicador Π_i correspondente, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y_i(t) \\ \Delta_i(y_i(t)) \end{bmatrix}^\top \Pi_i \left(\begin{bmatrix} y_i(t) \\ \Delta_i(y_i(t)) \end{bmatrix} \right) dt \geq 0, \quad (6)$$

e que o respectivo multiplicador $\Pi_i(j\omega)$ é particionado da forma

$$\Pi_i(j\omega) = \begin{bmatrix} \Pi_{i,1}(j\omega) & \Pi_{i,o}(j\omega) \\ \Pi_{i,o}^H(j\omega) & \Pi_{i,2}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Então, nesse caso a incerteza total Δ satisfaz a IQC (1) com o multiplicador

$$\Pi(j\omega) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\Pi_{1,1}(j\omega), \dots, \Pi_{n,1}(j\omega)) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega)^H, \dots, \Pi_{n,o}(j\omega)^H) \\ \text{diag}(\Pi_{1,o}(j\omega), \dots, \Pi_{n,o}(j\omega)) \\ \text{diag}(\Pi_{1,2}(j\omega), \dots, \Pi_{n,2}(j\omega)) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Na literatura, é possível se encontrar IQC para diversos elementos, tais como não linearidades limitadas em setores, incertezas, operadores passivos, etc (Veenman et al., 2016).

Um dos impulsionadores da análise de sistemas por IQC é o fato do problema poder ser tratado por meios computacionais de forma bastante eficiente. Na análise de estabilidade de um dado sistema, uma vez encontradas as IQC que satisfazem o Teorema 1, o passo seguinte consiste em se transformar o conjunto semi-infinito resultante de restrições no domínio da frequência em (5) em uma condição computacionalmente tratável, através do lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) (Rantzer, 1996; Iwasaki and Hara, 2005).

No presente trabalho, assume-se que os multiplicadores podem ser fatorados na forma

$$\Pi(j\omega) = \Psi(j\omega)^H \mathcal{P} \Psi(j\omega), \quad (9)$$

com $\mathcal{P}$ representando uma matriz real simétrica que pode ser representada por LMIs, e $\Psi(j\omega)$ uma matriz de transferência fixa. Para essa classe de multiplicadores, é conveniente a versão generalizada do Lema de KYP apresentada a seguir.

Lema 1 ((Veenman et al., 2016)) *Seja $\mathcal{P} \in \mathbf{S}^\bullet$ e $\mathcal{G} \in \mathbf{RL}^{\bullet \times \bullet}$ admitindo uma realização $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, com $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ e $\lambda(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$. Então, as condições a seguir são equivalentes:*

1. *é válida a FDI*

$$\mathcal{G}(j\omega)^H \mathcal{P} \mathcal{G}(j\omega) < 0. \quad (10)$$

2. *existe uma matriz $\mathcal{X} \in \mathbb{S}^{n_g}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

As equivalências correspondentes ainda persistem para:

- *desigualdades não estritas se, adicionalmente, o par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ for controlável,*
- *igualdades se, adicionalmente, $\mathcal{A}$ é Hurwitz e o par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ for controlável.*

Da fatoração (9), percebe-se que a inequação (10) está associada à FDI original (5) através da relação

$$\mathcal{G}(j\omega) = \Psi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}. \quad (12)$$

3 Análise de estabilidade de sistemas com atraso via IQC

3.1 Formulação do problema

Considere o sistema linear com atraso variante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d(x(t - \tau(t))), \quad (13)$$

com A e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes constantes, e $\tau(t)$ um parâmetro desconhecido variante no tempo que satisfaz

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_0, \quad |\dot{\tau}(t)| \leq d, \quad \forall t \geq 0. \quad (14)$$

Deseja-se analisar a estabilidade do sistema (13) para a classe de atrasos definida por (14).

Os dois operadores definidos a seguir são de particular interesse para o presente trabalho:

$$\mathcal{D}_\tau(y(t)) \triangleq y(t - \tau(t)), \quad (15)$$

$$\mathcal{S}_\tau(y(t)) \triangleq y(t) - y(t - \tau(t)). \quad (16)$$

No lema abaixo são apresentados limites sobre o ganho $\mathbf{L}_2$ dos operadores $\mathcal{D}_\tau$ e $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$.

Lema 2 ((Kao and Rantzer, 2007)) *Suponha que $d < 1$, e considere o conjunto de funções diferenciáveis $\Upsilon \triangleq \{s(t) | s(t) \in [0, \tau_0], |\dot{s}(t)| \leq d, \forall t\}$. Então:*

$$\sup_{\tau(t) \in \Upsilon} \|\mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \quad (17)$$

$$\sup_{\tau(t) \in \Upsilon} \left\| \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \right\|_{\mathbf{L}_2} = \tau_0. \quad (18)$$

É interessante notar no Lema 2 que o limite sobre o ganho $\mathbf{L}_2$ de $\mathcal{D}_\tau$ depende do limite sobre o módulo da taxa de variação temporal de τ , mas não depende diretamente de τ_0 . Por outro lado, o limite sobre o ganho $\mathbf{L}_2$ de $\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ depende de τ_0 , mas não do limite d sobre a taxa de variação temporal.

Na análise de estabilidade do sistema (13), o primeiro passo consiste em se rearranjar o sistema na forma da interconexão de G e Δ apresentado na FIG. 1 e descrito pela equação (4). Inicialmente, seja a equação de estado (13) reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d(x(t - \tau(t))) \\ &= (A + A_d)x(t) - A_d(x(t) - x(t - \tau(t))). \end{aligned} \quad (19)$$

Seja a saída da planta nominal definida como

$$y(t) = x(t). \quad (20)$$

Desse modo, a EQ. (19) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(y(t) - y(t - \tau(t))), \\ y(t) &= x(t). \end{cases} \quad (21)$$

Definindo-se $\Delta \triangleq \mathcal{S}_\tau$, tem-se então que o sistema com atraso (13) pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A + A_d)x(t) - A_d(u(t)), \\ y(t) &= x(t), \\ u(t) &= \Delta(y(t)). \end{cases} \quad (22)$$

A descrição acima corresponde exatamente à configuração G - Δ em (4), com $\Delta = \mathcal{S}_\tau$ e

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline I & 0 \end{array} \right]. \quad (23)$$

3.2 IQC satisfeitas pelo operador $\mathcal{S}_\tau$

São apresentadas agora IQC satisfeitas pelo operador $\mathcal{S}_\tau$, conforme discutido em Kao and Rantzer (2007). Essas IQC serão consideradas no Teorema 1 para a análise da estabilidade do sistema com atraso (13).

Inicialmente, note que se $|\dot{\tau}| \leq d < 1$, então o operador $\mathcal{D}_\tau$ satisfaz a IQC

$$\Pi_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d}X_1 & 0 \\ 0 & -X_1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

com $X_1 = X_1' \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^\top \Pi_{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{1-d} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^\top X_1 y(t) dt \\ & \quad - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_\tau(y(t))^\top X_1 \mathcal{D}_\tau(y(t)) dt \\ &= \frac{1}{1-d} \|X_1^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2^2 - \|X_1^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_\tau(y(t))\|_2^2 \\ &= \frac{1}{1-d} \|X_1^{\frac{1}{2}} y(t)\|_2^2 - \|\mathcal{D}_\tau(X_1^{\frac{1}{2}} y(t))\|_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade acima decorre do Lema 2.

O resultado acima permite mostrar que, se $|\dot{\tau}| \leq d < 1$ para todo t , então o operador $\mathcal{S}_\tau$ satisfaz a IQC

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{1-d}X_1 & X_1 \\ X_1 & -X_1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

com $X_1 = X_1' \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\tau(y(t)) &= y(t) - y(t - \tau(t)) \\ &= y(t) - \mathcal{D}_\tau(y(t)), \end{aligned} \quad (26)$$

de modo que

$$\mathcal{D}_\tau(y(t)) = y(t) - \mathcal{S}_\tau(y(t)). \quad (27)$$

Como o operador $\mathcal{D}_\tau$ satisfaz a IQC $\Pi_{\mathcal{D}}$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^\top \Pi_{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{D}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix}^\top \Pi_1 \begin{bmatrix} y(t) \\ \mathcal{S}_\tau(y(t)) \end{bmatrix} dt \geq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Ou seja, o operador $\mathcal{S}_\tau$ de fato satisfaz a IQC definida por Π_1 . O resultado acima está sumarizado na proposição a seguir.

Proposição 1 *Suponha que $|\dot{\tau}| \leq d < 1$. Então, o operador $\mathcal{S}_\tau$ satisfaz qualquer IQC definida por Π_1 em (25), com $X_1 = X'_1 \geq 0$.*

A seguir serão apresentadas mais três IQC satisfeitas pelo operador $\mathcal{S}_\tau$. Provas das proposições podem ser obtidas em Kao and Rantzer (2007).

Proposição 2 *Suponha que $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0$ e que $|\dot{\tau}| \leq d < 1$, para todo t . Então, o operador $\mathcal{S}_\tau$ satisfaz qualquer IQC definida por*

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} |\phi(jw)|^2 X_2 & 0 \\ 0 & -X_2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

onde $X_2 = X'_2 \geq 0$, e $\phi(s)$ é qualquer função de transferência racional limitada satisfazendo

$$\begin{cases} |\phi(jw)| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} & , \text{ se } \tau_0|w| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \\ |\phi(jw)| > \tau_0|w| & , \text{ se } \tau_0|w| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}} \end{cases} \quad (30)$$

Um exemplo de $\phi(s)$ que satisfaz (30) é

$$\phi(s) = k \frac{\tau_0^2 s^2 + c\tau_0 s}{\tau_0^2 s^2 + a\tau_0 s + kc}, \quad (31)$$

com $k = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}$, $a = \sqrt{2kc}$ para $c \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 3 *Suponha que $0 \leq \tau(t) \leq \tau_0$ e que $|\dot{\tau}| \leq d < 2$, para todo t . Então, o operador $\mathcal{S}_\tau$ satisfaz qualquer IQC definida por*

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} |\beta(jw)|^2 X_3 & 0 \\ 0 & -X_3 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

com $X_3 = X'_3 \geq 0$, e qualquer função de transferência $\beta(s)$ que satisfaça

$$|\beta(jw)| \geq g(w) + \delta, \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

para $\delta \in \mathbb{R}^+$ e

$$g(\omega) \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{2-d}} & , \text{ se } |\omega| > \frac{\pi}{\tau_0}, \\ \sqrt{\frac{8}{2-d}} \left| \sin\left(\frac{\pi}{\tau_0}\right) \right| & , \text{ se } |\omega| \leq \frac{\pi}{\tau_0}. \end{cases} \quad (34)$$

Um exemplo de transferência $\beta(s)$ que satisfaz a equação (33) é

$$\beta(s) = k \frac{\tau_0^2 s^2 + c\tau_0 s}{\tau_0^2 s^2 + a\tau_0 s + b} + \delta, \quad (35)$$

com $k = \sqrt{8/(2-d)}$, $a = \sqrt{6,5+2b}$, $b = \sqrt{50}$, $c = \sqrt{12,5}$ e δ é um número positivo arbitrariamente pequeno.

Proposição 4 *O operador $\mathcal{S}_\tau$ satisfaz qualquer IQC definida por*

$$\Pi_4(j\omega) = \begin{bmatrix} \tau_0^2 \omega^2 X_4 & 0 \\ 0 & -X_4 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

com $X_4 = X'_4 \geq 0$.

Note que a função G deve ser estritamente própria para se poder usar a IQC Π_4 .

A lista de IQC válidas para o operador $\mathcal{S}_\tau$ está sumarizada na Tabela 1, de acordo com o limite máximo d sobre o módulo da taxa de variação do atraso.

Tabela 1: Validade das IQC para o operador $\mathcal{S}_\tau$

	IQC válidas		
	$d < 1$	$1 \leq d < 2$	$d \geq 2$
Π_1	✓	-	-
Π_2	✓	-	-
Π_3	✓	✓	-
Π_4	✓	✓	✓

4 Análise de estabilidade via condição de ganho pequeno

Nesta seção, é discutida a análise de estabilidade do sistema com atraso variante no tempo (13) através da abordagem em Zhu et al. (2015), na qual o atraso é modelado como uma incerteza LTV e a estabilidade é verificada através de uma condição do tipo ganho pequeno.

Considere a seguinte classe de operadores LTV incertos repetidos diagonalmente:

$$\Delta_t \triangleq \{\Delta(y(t)) = [\delta(y_1(t)) \quad \cdots \quad \delta(y_l(t))]^T : \delta \in \mathbf{RL}_\infty, \|\delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma\}. \quad (37)$$

Considere, também, as seguintes classes de matrizes:

$$\mathbf{D}_r \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{l \times l} : \det D \neq 0\}, \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_{rd} \triangleq \{\hat{d}I_l : \hat{d} \in \mathbb{R}, \hat{d} \neq 0\}, \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_r \triangleq \{P = D^T D : D \in \mathbf{D}_r\}. \quad (40)$$

A condição de ganho pequeno apresentada no lema a seguir pode ser obtida a partir do formalismo IQC do Teorema 1.

Lema 3 *Seja $G(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$, e seja Δ uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente pertencente à classe Δ_t . Então a interconexão da Fig. 1 é estável para toda incerteza admissível se*

$$\|DG(s)D^{-1}\|_\infty < \gamma^{-1}, \quad D \in \mathbf{D}_r. \quad (41)$$

Prova. Mostra-se facilmente que $\Delta \in \Delta_t$ satisfaz IQC para o multiplicador

$$\Pi = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}P \end{bmatrix}, \quad P \in \mathbf{P}_r. \quad (42)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} y(t) \\ \Delta(y(t)) \end{bmatrix} dt \\ &= \|D^{\frac{1}{2}}y(t)\|_2^2 - \gamma^{-2}\|D^{\frac{1}{2}}\Delta(y(t))\|_2^2 \geq 0. \quad (43) \end{aligned}$$

A última desigualdade em (43) vem do fato de que $\|\delta\|_{\mathbf{L}_2} \leq \gamma$ e da linearidade de δ , de modo que

$$\begin{aligned} \|D^{\frac{1}{2}}\Delta(y(t))\|_2^2 &= \|\Delta(D^{\frac{1}{2}}y(t))\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^l \|\delta(D_i^{\frac{1}{2}}y(t))\|_2^2 \leq \gamma^{-2} \sum_{i=1}^l \|D_i^{\frac{1}{2}}y(t)\|_2^2 \\ &= \gamma^{-2}\|D_i^{\frac{1}{2}}y(t)\|_2^2. \quad (44) \end{aligned}$$

Acontece que, para o multiplicador (42), a condição suficiente para estabilidade dada pelo teste (5) do Teorema 1 torna-se

$$G(j\omega)^H D^H D G(j\omega) - \gamma^{-2} D^H D \leq -\epsilon I, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (45)$$

a qual é satisfeita se (41) é satisfeita. $\square$

O teorema a seguir apresenta uma condição de estabilidade a partir do resultado do Lema 3.

Teorema 2 ((Zhu et al., 2015)) *Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ é Hurwitz, e seja*

$$\hat{M}(s) \triangleq -(A_0 + A_1)(sI - (A_0 + A_1))^{-1}A_1 - A_1. \quad (46)$$

Então, a dinâmica com atraso (13) sujeito às condições (14) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:

1. $\|\hat{M}(s)\|_{\infty} < \tau_0^{-1}$,
2. $\inf_{D \in \mathbf{D}_{rd}} \|D^{-1}\hat{M}(s)D\|_{\infty} < \tau_0^{-1}$,
3. $\inf_{D \in \mathbf{D}_r} \|D^{-1}\hat{M}(s)D\|_{\infty} < \tau_0^{-1}$.

Prova. O sistema com atraso (13) pode ser representado na forma $G\text{-}\Delta$ em (4) alternativamente com $\Delta \triangleq \mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s}$ e com planta nominal $G(s)$ dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A + A_d & -A_d \\ \hline A + A_d & -A_d \end{array} \right] \\ &= -(A_0 + A_1)(sI - (A_0 + A_1))^{-1}A_1 - A_1, \end{aligned}$$

correspondendo a $\hat{M}(s)$ em (46). De acordo com o Lema 2, $\mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s} \in \mathbf{\Delta}_t$ para $\gamma = \tau_0$. Então, a condição do item 3 pode ser obtida a partir da aplicação do Lema 3 considerando-se a planta nominal em (46). As condições nos itens 1 e 2 decorrem do fato de que $\{I\} \subset \mathbf{D}_{rd} \subset \mathbf{D}_r$. $\square$

Da prova do Teorema 2, conclui-se que as condições apresentadas naquele teorema estão em ordem decrescente de conservadorismo. Cabe destacar também que a prova do Teorema 2 é baseada no fato de que o ganho $\mathbf{L}_2$ do operador $\mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s}$ é limitado por τ_0 . Ora, esse mesmo fato é utilizado para se mostrar que o operador $\mathcal{S}_{\tau}$ satisfaz a IQC para Π_4 . Conclui-se, assim, que o resultado contido no Teorema 2 é equivalente à análise IQC para o operador $\mathcal{S}_{\tau}$ com a IQC para Π_4 apenas. Note que as condições no Teorema 2 independem do valor d , o que explica seu potencial conservadorismo.

O último resultado a ser apresentado no teorema a seguir corresponde à consideração do operador $\text{diag}(\mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_{\tau})$ como constituído por duas dinâmicas LTV incertas repetidas diagonalmente.

Teorema 3 ((Zhu et al., 2015)) *Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ é Hurwitz, e sejam*

$$\hat{M}(s) = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} (sI - (A_0 + A_1))^{-1} \begin{bmatrix} A_1 A_0 & A_1^2 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{I}{\sqrt{1-d}} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Então, a dinâmica com atraso (13) sujeito às condições (14) é estável se qualquer uma das condições abaixo for verdadeira:

1. $\|\hat{M}(s)P\|_{\infty} < \tau_0^{-1}$,
2. $\inf_{d>0} \left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & d^{-1}I \end{bmatrix} \hat{M}(s)P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & dI \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \tau_0^{-1}$,
3. $\inf_{D \in \mathbf{D}_{rd}} \|D^{-1}\hat{M}(s)PD\|_{\infty} < \tau_0^{-1}$.
- 4.

$$\begin{aligned} \inf_{D_1, D_2 \in \mathbf{D}_r} \left\| \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}^{-1} \hat{M}(s)P \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \\ < \tau_0^{-1} \quad (49) \end{aligned}$$

A prova do Teorema 3 acima é análoga àquela do Teorema 2. Ela baseia-se no fato de que o sistema com atraso (13) pode ser representado na forma $G\text{-}\Delta$ em (4) com $\Delta \triangleq \text{diag}(\mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s}, \mathcal{S}_{\tau} \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_{\tau})$ e com planta nominal $G(s)$ dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= \left[\begin{array}{c|c|c} A + A_d & -A_d A & -A_d^2 \\ \hline I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} (sI - (A_0 + A_1))^{-1} \begin{bmatrix} A_1 A_0 & A_1^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

correspondendo a $\hat{M}(s)$ em (47). Note que, de acordo com o Lema 2,

$$\|\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} \leq \|\mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}\|_{\mathbf{L}_2} \|\mathcal{D}_\tau\|_{\mathbf{L}_2} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-d}}. \quad (50)$$

Assim, trata-se do caso de um operador misto com $\Delta_1 \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s}$ e $\Delta_2 \triangleq \mathcal{S}_\tau \circ \frac{1}{s} \circ \mathcal{D}_\tau$, onde os sub-operadores são tratados como uma dinâmica LTV incerta repetida diagonalmente com limite sobre o ganho $\mathbf{L}_2$ de τ_0 e $\tau_0/\sqrt{1-d}$, respectivamente.

5 Aplicação numérica

São discutidas a seguir duas aplicações numéricas, nas quais são comparadas a análise de estabilidade via IQC da Seção (3) com a análise via ganho pequeno apresentada na Seção (4).

5.1 Exemplo 1

Considere o sistema linear com atraso variante no tempo da forma (13) com

$$A = \begin{bmatrix} -0,4 & -1 \\ -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0,1 & -0,4 \\ 0 & -0,3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Para esse sistema, retirado de Zhu et al. (2015), deseja-se analisar qual o valor máximo de atraso para o qual o sistema permanece estável, para diferentes limites sobre o módulo da taxa de variação do atraso.

Inicialmente, é realizada a análise IQC da Seção 3, na qual a planta é representada na forma da interconexão $G - \Delta$ com o operador Δ dado por $\mathcal{S}_\tau$. O resultado da análise de estabilidade via IQC para esse problema está sintetizado nas FIG. 2 e 3, nas quais consta a curva do valor máximo de atraso τ_0 que a planta suporta antes da instabilidade em função da taxa de variação máxima d para o atraso.

A análise da estabilidade é realizada ponto a ponto, através da verificação da factibilidade das LMIs que traduzem, na verdade, a FDI associada à análise IQC. Para cada valor da taxa de variação elencada, é então verificado o valor máximo de atraso que o sistema comporta. O primeiro passo nesse processo consiste em se construir, para um determinado limite d sobre a taxa de variação do atraso, as funções auxiliares $\phi(s)$ e $\beta(s)$ de acordo com (31) e (35), respectivamente. Em seguida, verifica-se a factibilidade da LMI de estabilidade (11).

A análise, em si, baseia-se em um algoritmo que implementa o método da bisseção. Neste método, é suposto um intervalo qualquer onde hipoteticamente o valor desejado, que é o atraso máximo, se encontra, lembrando que a taxa é considerada como fixa. O aperfeiçoamento dos limites desse intervalo é incrementado a cada passo, na medida que o intervalo vai se reduzindo até estar dentro de uma margem aceitável. Para cada

teste é resolvida a LMI correspondente, tomando o valor da taxa constante e obtendo assim como resposta o valor do atraso. Em seguida, é feita a devida alteração no limite superior ou inferior do intervalo de teste, dependendo se foi encontrada ou não uma solução possível para a LMI. O processo se encerra quando o intervalo converge para um valor dentro da precisão exigida. Alcançado o valor, o processo é retomado para o próximo valor de interesse de taxa de variação.

Da análise da FIG. 2, evidencia-se uma constatação feita em Kao and Rantzer (2007): a de que o ganho em se considerar o multiplicador Π_2 é praticamente nulo, de modo que esse multiplicador pode ser desprezado na análise.

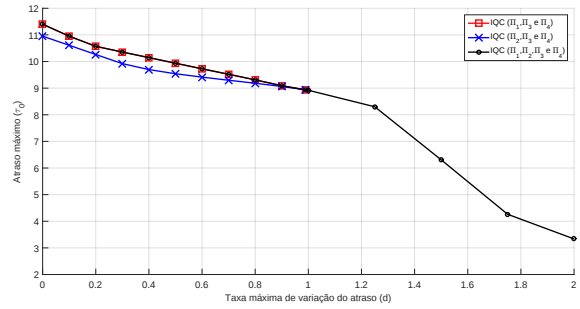


Figura 2: Análise IQC para a planta (51).

Na FIG. 3 é comparado o resultado da análise via IQC e via Teoremas 2 e 3. Conforme esperado, é possível se confirmar que o resultado obtido via Teorema 2 é equivalente ao obtido via análise IQC para o operador $\mathcal{S}_\tau$ com Π_4 apenas. Ainda na FIG. 3, fica evidente o conservadorismo do Teorema 3, em decorrência de se considerar o atraso como um incerteza LTV limitada em norma.

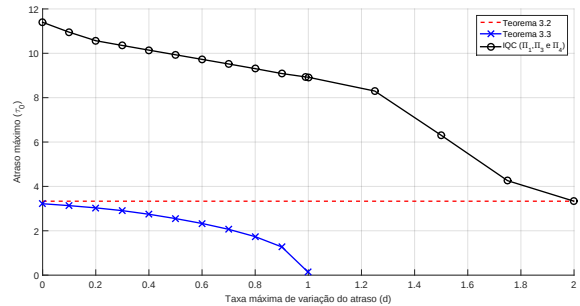


Figura 3: Atraso máximo admitido pela planta (51) obtidos por diferentes técnicas.

5.2 Exemplo 2

Considere, agora, o seguinte sistema apresentado em Gu and Niculescu (2000):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0,2 & -5,8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)). \quad (52)$$

O resultado da análise do maior atraso tolerado pelo sistema, analogamente ao realizado no exemplo anterior, é mostrado na FIG. 4. Também na presente aplicação, observa-se que a contribuição de Π_2 é desprezível, de modo que é mostrado o resultado da análise com os multiplicadores Π_1 , Π_3 e Π_4 apenas.

Sabe-se que esse sistema é estável para qualquer valor de atraso constante. Esse fato é confirmado na análise IQC mostrada na FIG. 4, onde observa-se que a tendência da curva é seguir assintoticamente o eixo vertical para d tendendo a zero. O fato de não haver um valor máximo de atraso corrobora que o sistema é sempre estável para um atraso constante. No entanto, o sistema não é estável independente do atraso. A análise IQC revela o comportamento da estabilidade à medida que uma maior taxa de variação é admitida para o atraso.

Os resultados dos Teoremas 2 e 3 também são apresentados na FIG. 4. Novamente, o resultado obtido via Teorema 2 é equivalente ao obtido via análise IQC para Π_4 apenas, e a análise via Teorema 3 se revela mais uma vez bastante conservadora.

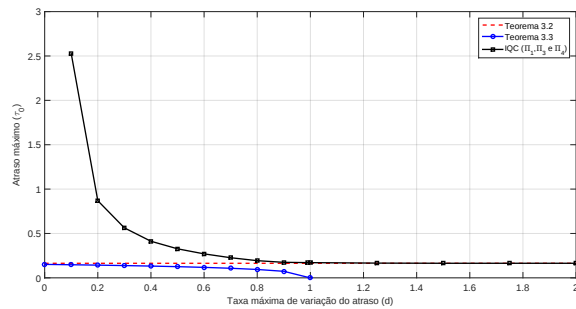


Figura 4: Atraso máximo admitido por (52).

6 Conclusões

No presente trabalho, foi discutida a análise de estabilidade de sistemas com atraso variante no tempo a partir da teoria IQC. Comparou-se a análise via IQC com uma análise via condição de ganho pequeno associada ao tratamento do atraso como uma incerteza. As aplicações numéricas apresentadas evidenciaram o conservadorismo da abordagem do tipo ganho pequeno, quando comparada com a análise via IQC.

Referências

Chiaasson, J. and Loiseau, J. J. (2007). *Applications of time delay systems*, Vol. 352, Springer.

Debeljković, D. L. and Nestorović, T. (2011). *Stability of Linear Continuous Singular and Dis-*

crete Descriptor Time Delayed Systems, In-Tech.

Gu, K., Chen, J. and Kharitonov, V. L. (2003). *Stability of time-delay systems*, Springer Science & Business Media.

Gu, K. and Niculescu, S. I. (2000). Additional dynamics in transformed time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(3): 572–575.

Iwasaki, T. and Hara, S. (2005). Generalized kyp lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(1): 41–59.

Kao, C. and Rantzer, A. (2007). Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays, *Automatica* **43**: 959–970.

Kharitonov, V. L. (1998). Robust stability analysis of time delay systems: A survey, *IFAC Proceedings Volumes* **31**(18): 1–12.

Megretski, A. and Rantzer, A. (1997). System analysis via integral quadratic constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(6): 819–830.

Rantzer, A. (1996). On the kalman-yakubovich-popov lemma, *Systems & Control Letters* **28**(1): 7–10.

Veenman, J., Scherer, C. W. and Köroğlu, H. (2016). Robust stability and performance analysis based on integral quadratic constraints, *European Journal of Control* **31**: 1–32.

Vidyasagar, M. (1992). *Nonlinear Systems Analysis (2Nd Ed.)*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

WANG, S.-S., CHEN, B.-S. and LIN, T.-P. (1987). Robust stability of uncertain time-delay systems, *International Journal of Control* **46**(3): 963–976.

Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

Zhu, J., Qi, T. and Chen, J. (2015). Small-gain stability conditions for linear systems with time-varying delays, *Systems & Control Letters* **81**: 42–48.