

ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS TELEOPERADOS BILATERAIS SUJEITOS A ATRASO NO TEMPO E SATURAÇÃO NOS ATUADORES

MATHEUS V. DE LIMA*, FERNANDO DE O. SOUZA†

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil.*

†*Departamento de Engenharia Eletrônica - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil.*

Emails: matheusvl@ufmg.br, fosouza@cpdee.ufmg.br

Abstract— The stability analysis of bilateral teleoperated systems subject to saturation in actuators and time-varying delays is addressed. Two distinct delays are considered, one in the master-slave communication channel and the other in the slave-master channel. The methodology used is based on Lyapunov-Krasovskii theory and on the use of linear matrix inequalities. The control law chosen is composed of three terms: i) proportional to the error, ii) damping factor and iii) gravity compensation.

Keywords— Teleoperation, Time-Delay, Lyapunov-Krasovskii, LMIs.

Resumo— A análise de estabilidade de sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a saturação nos atuadores e atrasos variantes no tempo é abordada. São considerados dois atrasos distintos, um no canal de comunicação mestre-escravo e outro no canal escravo-mestre. A metodologia utilizada baseia-se na teoria de Lyapunov-Krasovskii e no uso de desigualdades matriciais lineares. A lei de controle escolhida é composta por três termos: i) proporcional ao erro, ii) fator de amortecimento e iii) compensação de gravidade.

Palavras-chave— Teleoperação, Atraso no tempo, Lyapunov-Krasovskii, LMIs.

1 Introdução

Um sistema de teleoperação viabiliza a extensão das capacidades da manipulação humana a um ambiente remoto. Tipicamente um sistema bilateral é composto por operador humano, robô mestre, canal de comunicação, robô escravo e ambiente (Anderson and Spong, 1989). O operador humano aplica torque ao robô mestre o qual está conectado ao robô escravo por um canal de comunicação. O robô escravo segue o movimento do mestre e retorna ao mestre as forças de interação com o ambiente. Com a percepção do ambiente, o operador pode interagir remotamente e realizar diferentes tarefas.

Devido a rede de comunicação presente no sistema é inevitável a ocorrência de atrasos no tempo na troca de dados entre o mestre e o escravo. É bem conhecido que a existência de atrasos no canal de comunicação pode causar degradação no desempenho no sistema e, até mesmo, levá-lo a instabilidade.

Anderson and Spong (1989) foram os pioneiros no estudo de técnicas de controle para sistemas teleoperados, utilizando conceitos de passividade e analogia com linhas de transmissão. Assim, a linha de transmissão conectada aos robôs mestre e escravo, que define mapeamentos passivos de força para velocidade, enquanto o operador humano e o ambiente de atuação do robô escravo constituem os terminais da linha de transmissão. Desta forma, devido as propriedades de passividade, a estabilidade \mathcal{L}_2 é garantida para todo o sistema, sob a suposição de que o operador humano e as

forças de interação com o ambiente definam um mapeamento passivo.

A principal desvantagem do método supra-mencionado é que somente a estabilidade do sistema é garantida, a transparência entre os manipuladores não é alcançada. Lee and Spong (2006) provaram que um controlador com esquema similar ao Proporcional-Derivativo (PD), onde as informações de posições e velocidades das juntas de um robô estão atrasadas, é capaz de alcançar estabilidade e transparência para sistemas teleoperados sujeitos a atraso constante e simétrico. Nuno et al. (2008) mostraram que um controlador com somente a ação proporcional mais um termo de amortecimento é suficiente para estabilidade e transparência do sistema sujeito a atraso contante, desta forma evita-se o uso de informações atrasadas das velocidades juntas.

O critério de estabilidade de sistemas teleoperados sujeitos a atrasos variantes no tempo foi abordado por Hua and Liu (2010), que utiliza desigualdades matriciais lineares (LMIs) para encontrar o maior atraso que mantém o sistema estável. Islam et al. (2015) também analisam o sistema sujeito a atrasos variantes no tempo, mas diferentemente de Hua and Liu (2010) não utilizam LMIs, mas inovam em se aproveitar do conhecimento da taxa de variação do atraso e considerar as forças do operador humano e de interação com ambiente constantes.

Todos os trabalhos já mencionados não consideram saturação nos atuadores, Hashemzadeh et al. (2013) são os primeiros a discutirem tal problema, cuja a presença pode fazer com que o

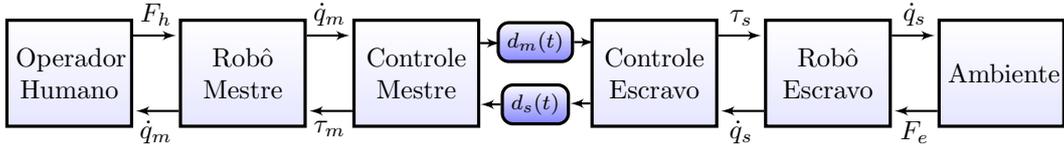


Figura 1: Sistema Teleoperado Bilateral

sistema não consiga estabilizar caso as condições iniciais dos manipuladores sejam muito diferente, mas não discutem o domínio de atração relacionado. Recentemente Hua et al. (2017) consideraram a presença de saturação nos atuadores e por meio da Teoria de Lyapunov-Krasovskii propuseram um método de análise de estabilidade que fornece a estimação do domínio de atração.

O presente trabalho foca em desenvolver um critério de análise de estabilidade dependente do atraso variante no tempo e capaz de estimar o domínio de atração. Utiliza-se na construção do funcional de Lyapunov-Krasovskii o lema da Combinação Reciprocamente Convexa Aprimorada apresentado por Seuret and Gouaisbaut (2016) que é menos conservador que o corolário apresentado em Seuret and Gouaisbaut (2013) utilizado na análise de Hua et al. (2017).

Notação: I e 0 denotam respectivamente matriz identidade e matriz nula de dimensões apropriadas. $*$ em uma matriz simétrica representa os elementos abaixo da diagonal principal. Define-se $diag\{\cdot\}$ como bloco diagonal de matrizes e $\lambda_{max}(X)$ o máximo autovalor da matriz simétrica X . \mathbb{R}^n denota o espaço Euclidiano n -dimensional. $\mathbb{R}^{n \times m}$ denota o conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$. $X > 0$ ($X \geq 0$) significa que a matriz X é simétrica, real e definida positiva (semidefinida positiva). $He\{X\}$ indica $X + X^T$. \bullet denota m (mestre) e s (escravo).

2 Preliminares

2.1 Modelagem

O sistema de teleoperação bilateral como ilustrado pela figura 1 é descrito por

$$\begin{cases} M_m(q_m)\ddot{q}_m + C_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m + g_m(q_m) \\ M_s(q_s)\ddot{q}_s + C_s(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s + g_s(q_s) \end{cases} \begin{matrix} = \tau_m - F_h \\ = \tau_s + F_e \end{matrix} \quad (1)$$

na qual $q_\bullet \in \mathbb{R}^n$ é a posição das juntas, e $\dot{q}_\bullet, \ddot{q}_\bullet$ são respectivamente a velocidade e aceleração; $M_\bullet(q_\bullet) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia definida positiva; $C_\bullet(q_\bullet, \dot{q}_\bullet) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de torques centrípetas e de coriolis; $g_\bullet(q_\bullet) \in \mathbb{R}^n$ representa o torque gravitacional; $F_h \in \mathbb{R}^n$ e $F_e \in \mathbb{R}^n$ são os torques aplicados respectivamente pelo operador humano e pelo ambiente; $\tau_\bullet \in \mathbb{R}^n$ é o torque

aplicado ao sistema, o qual é limitado tal que cada elemento de $\tau_{\bullet j}$ de τ_\bullet satisfaz $|\tau_{\bullet j}| \leq T_j, \forall j$, sendo T_j o parâmetro de saturação do atuador.

Conforme apresentado em Spong et al. (2006), a dinâmica de robôs de elos seriais com juntas de revolução e n -graus de liberdade modelados pelo formalismo de Euler-Lagrange possuem as seguintes propriedades.

Propriedade 1 A matriz de inércia é inferiormente e superiormente limitada, isto é, existe escalares positivos $\varrho_{\bullet 1}$ e $\varrho_{\bullet 2}$ tais que $0 < \varrho_{\bullet 1}I \leq M_\bullet(q_\bullet) \leq \varrho_{\bullet 2}I < \infty$.

Propriedade 2 A matriz $\dot{M}_\bullet(q_\bullet) - 2C_\bullet(q_\bullet, \dot{q}_\bullet)$ é anti-simétrica.

Propriedade 3 Para manipuladores com juntas de revolução, cada elemento $g_{\bullet j}(q_\bullet)$ do vetor de forças gravitacionais $g_\bullet(q_\bullet)$ é limitado.

2.2 Suposições Gerais

Para o sistema mestre-escravo (1) as seguintes suposições são assumidas.

Suposição 1 Seguindo as considerações padrões, é assumido que o operador humano e o ambiente definem mapeamentos passivos de força para velocidades, isto é $\int_0^t \dot{q}_m^T(\sigma)F_h(\sigma)d\sigma \geq 0$ e $\int_0^t -\dot{q}_s^T(\sigma)F_e(\sigma)d\sigma \geq 0$ para todo $t \geq 0$.

Suposição 2 Para os atrasos variantes no tempo $d_m(t)$ e $d_s(t)$, existem os escalares $d_{\bullet 2}, \mu_{\bullet 1}$, e $\mu_{\bullet 2}$, tais que $0 \leq d_\bullet(t) \leq d_{\bullet 2} < \infty$ e $\mu_{\bullet 1} \leq \dot{d}_\bullet(t) \leq \mu_{\bullet 2}$ para todo $t \geq 0$.

Suposição 3 É definido os seguintes limitantes para as condições iniciais e parâmetros dos sistema:

- $\max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\dot{q}_{m0}(\theta)\| \leq \delta_m$;
- $\max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\dot{q}_{s0}(\theta)\| \leq \delta_s$;
- $\max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|q_{m0}(\theta) - q_{s0}(\theta)\| \leq \delta_{e1}$;
- $\max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\dot{q}_{m0}(\theta) - \dot{q}_{s0}(\theta)\| \leq \delta_{e2}$;
- $|g_{\bullet j}(q_\bullet)| \leq \gamma_j$ para $j = 1, 2, \dots, n$;

sendo $\delta_m, \delta_s, \delta_{e1}, \delta_{e2}, \gamma_j$ escalares positivos e $d_2 = d_{m2} + d_{s2}$.

2.3 Lei de controle

A lei de controle é definida como proporcional ao erro de posição mais injeção de amortecimento (P+d) saturados com compensação dos efeitos gravitacionais como

$$\begin{cases} \tau_m = \text{sat}(-K_m(q_m - q_s(t - d_s(t))) - \alpha_m \dot{q}_m) \\ \quad + g_m(q_m) \\ \tau_s = \text{sat}(-K_s(q_s - q_m(t - d_m(t))) - \alpha_s \dot{q}_s) \\ \quad + g_s(q_s) \end{cases} \quad (2)$$

sendo K_m, α_m, K_s e α_s matrizes de ganhos, $d_m(t)$ é o atraso de rede do mestre para o escravo e $d_s(t)$ é o atraso de rede do escravo para o mestre, $\text{sat}(\cdot)$ é a função saturação que satura com valor do vetor S . Cada elemento de S satisfaz $S_j \leq T_j - \gamma_j$. Cabe ressaltar que os atrasos $d_\bullet(t)$ não são conhecidos a priori, mas $q_s(t - d_s(t))$ é considerado no cálculo de $\tau_m(t)$ no instante t devido ao atraso. O mesmo ocorre com $q_m(t - d_m(t))$ no cálculo de $\tau_s(t)$.

2.4 Lemas Instrumentais

Os lemas a seguir serão utilizados para a obtenção do resultado principal deste artigo

Lema 1 (Gu, 2000). Para qualquer matriz constante $R \in \mathbb{R}^{n \times n}, R = R^T > 0$, escalar $d > 0$, função vetorial $\omega : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as integrais a seguir sejam bem definidas, então

$$d \int_0^d \omega^T(\sigma) R \omega(\sigma) d\sigma \geq \int_0^d \omega^T(\sigma) d\sigma R \int_0^d \omega(\sigma) d\sigma \quad (3)$$

Lema 2 (Seuret and Gouaisbaut, 2013). Considere $R \in \mathbb{R}^{n \times n}, R = R^T > 0$. Então, para todas as funções vetoriais $\omega(t)$ continuamente diferenciáveis em $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\int_a^b \dot{\omega}^T(\sigma) R \dot{\omega}(\sigma) d\sigma \geq \frac{1}{b-a} \Omega_1^T R \Omega_1 + \frac{3}{b-a} \Omega_2^T R \Omega_2, \quad (4)$$

sendo $\Omega_1 = \omega(b) - \omega(a)$ e $\Omega_2 = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(\sigma) d\sigma$.

Lema 3 (Seuret and Gouaisbaut, 2016). Considere $R \in \mathbb{R}^{n \times n}, R = R^T > 0$. Se existe $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, X_i = X_i^T > 0$ e $Y_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i = 1, 2$ tal que

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ * & R \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ * & 0 \end{bmatrix} - (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 & Y_2 \\ * & X_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5)$$

para $\alpha = 0, 1$, então a seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} R & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} R \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & Y_1 \\ * & X_2 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} X_1 & Y_2 \\ * & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

vale para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Os lemas acima são ferramentas matemáticas uteis para transformar condições de estabilidade de Lyapunov em LMIs, como realizado no Teorema 1. Neste artigo seguiremos as diretrizes básicas apresentadas em Hua et al. (2017) para tratar a saturação na lei de controle, as quais se baseiam nos seguintes lemas.

Lema 4 (Hu and Lin, 2001). Seja \mathcal{D} o conjunto das matrizes diagonais $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cujos elementos são 0 ou 1. Claramente o número de matrizes pertencentes a \mathcal{D} é 2^n . Da mesma forma denotando $D_i^- = I - D_i$, então $D_i^- \in \mathcal{D}$. Sejam as matrizes F e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, h_j denota a j -ésima linha de H . Para $x \in \mathbb{R}^n$, se $|h_j x| \leq S_j, j = 1, 2, \dots, n$ então

$$\text{sat}(Fx) = \text{co}\{D_i Fx + D_i^- Hx, i = 1, 2, \dots, 2^n\}$$

no qual $\text{co}\{\cdot\}$ denota a casca convexa de um conjunto.

Lema 5 (Hu and Lin, 2001) Dizer que o elipsoide $\varepsilon(Q, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q x \leq 1\}$ com $Q > 0$ está contido em $(L(H) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|h_i x\| \leq S_i, i = 1, 2, \dots, n\})$ é equivalente a seguinte LMI ser satisfeita

$$\begin{bmatrix} S_i^2 & h_i \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7)$$

para $i = 1, \dots, n$ e sendo h_i a i -ésima linha de H .

3 Resultado Principal

Nesta seção um novo funcional de Lyapunov-Krasovskii é construído e um método de análise de estabilidade dependente do atraso é proposto para o sistema (1) com o controlador (2).

Teorema 1 Considere o sistema de teleoperação (1) com o controlador (2), definido $d(t) = d_m(t) + d_s(t)$, se existir as matrizes definidas positivas W, Z, R, X_1, X_2 e as matrizes $Y_1, Y_2, H_{km}, H_{ks}, H_{\alpha m}$ e $H_{\alpha s}$ com dimensões apropriadas tais que as seguintes LMIs sejam factíveis

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ * & 0 \end{bmatrix} \geq 0; \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_2 \\ * & X_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} S_i^2 & h_{mi} \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0; \quad \begin{bmatrix} S_i^2 & h_{si} \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

$$\Theta_k(\dot{d}(t)) - \Upsilon^T \Phi(d(t)) \Upsilon < 0, \quad k = 1, \dots, 2^n, \quad (10)$$

então o sistema (1) é estável e o domínio de atração pode ser estimado por

$$\Gamma = \{\dot{q}_{m0}, \dot{q}_{s0}, q_{m0} - q_{s0} : \Gamma_\delta \leq 1\}.$$

Sendo $\Gamma_\delta = (\varrho_{m2} + \frac{1}{2}d_{m2}^2\lambda_{max}(R_m))\delta_m^2 + (\varrho_{s2} + \frac{1}{2}d_{s2}^2\lambda_{max}(R_s))\delta_s^2 + (\lambda_{max}(W) + d_2\lambda_{max}(Z))\delta_{e1}^2 + \frac{1}{2}d_2^3\lambda_{max}(R)\delta_{e2}^2$. As outras matrizes usadas no teorema estão definidas no topo da próxima página.

Prova: Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii $V = \sum_{i=1}^4 V_i$ com

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{\bullet=m,s} \{ \dot{q}_\bullet^T M_\bullet(q_\bullet) \dot{q}_\bullet \} + 2 \int_0^t \dot{q}_m^T(\sigma) F_h(\sigma) \\ &\quad - \dot{q}_s^T(\sigma) F_e(\sigma) d\sigma \\ V_2 &= e^T(t) W e(t), \quad V_3 = \int_{t-d_2}^{t-d(t)} e^T(\sigma) Z e(\sigma) d\sigma \\ V_4 &= \sum_{\bullet=m,s} \int_{-d_{\bullet 2}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{q}_\bullet^T(\sigma) R_\bullet \dot{q}_\bullet(\sigma) d\sigma d\theta \\ &\quad + d_2 \int_{-d_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(\sigma) R \dot{e}(\sigma) d\sigma d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

com $e(t) = q_m(t) - q_s(t)$ e d_2 como na suposição 3.

Utilizando a Propriedade 2 a derivada temporal de V_1 é

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2 \{ \dot{q}_m^T \text{sat}(-K_m(q_m - q_s(t - d_s(t)))) - \alpha_m \dot{q}_m \} \\ &\quad + \dot{q}_s^T \text{sat}(-K_s(q_s - q_m(t - d_m(t)))) - \alpha_s \dot{q}_s \} \end{aligned}$$

Escrevendo os termos com atraso na forma de integral e rearranjando outros tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2 \left\{ \dot{q}_m^T \text{sat}(-K_m(e(t) + \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s(\sigma) d\sigma) \right. \\ &\quad - \alpha_m \dot{q}_m) + \dot{q}_s^T \text{sat}(K_s(e(t) \\ &\quad \left. - \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m(\sigma) d\sigma) - \alpha_s \dot{q}_s) \right\} \end{aligned}$$

Aplicando o lema 4

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2 \sum_{k=1}^{2^n} \eta_k \{ \dot{q}_m^T [(-D_k K_m + D_k^- H_{km}) \\ &\quad \times \left(e(t) + \int_{-d_{s2}}^t \dot{q}_s(\sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + (-D_k \alpha_m + D_k^- H_{\alpha m}) \dot{q}_m] \\ &\quad + \dot{q}_s^T [(D_k K_s + D_k^- H_{ks}) \\ &\quad \times \left(e(t) - \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m(\sigma) d\sigma \right) \\ &\quad + (-D_k \alpha_s + D_k^- H_{\alpha s}) \dot{q}_s] \} \end{aligned}$$

A derivada temporal de V_2 é

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= 2e^T(t) W \dot{e}(t) \\ &= 2e^T(t) W (\dot{q}_m - \dot{q}_s) \end{aligned} \quad (12)$$

Aplicando a regra de Leibniz em \dot{V}_3 tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= (1 - \dot{d}(t)) e^T(t - d(t)) Z e(t - d(t)) \\ &\quad - e^T(t - d_2) Z e(t - d_2) \end{aligned} \quad (13)$$

Derivando em relação ao tempo o termo V_4 temos

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \sum_{\bullet=m,s} \left\{ d_{\bullet 2} \dot{q}_\bullet^T R_\bullet \dot{q}_\bullet - \int_{t-d_{\bullet 2}}^t \dot{q}_\bullet^T(\sigma) R_\bullet \dot{q}_\bullet(\sigma) d\sigma \right\} \\ &\quad + d_{12}^2 \dot{e}^T R \dot{e} - d_2 \int_{t-d_2}^t \dot{e}^T(\sigma) R \dot{e}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (14)$$

Nos termos na primeira caixa aplica-se a desigualdade de Jensen (Lema 1). O termo na segunda caixa pode ser reescrito como $-d_2 \left[\int_{t-d(t)}^t \dot{e}^T(\sigma) R \dot{e}(\sigma) d\sigma + \int_{t-d_2}^{t-d(t)} \dot{e}^T(\sigma) R \dot{e}(\sigma) d\sigma \right]$ e então aplica-se a desigualdade de Wirtinger (Lema 2).

Após a aplicação das desigualdades é possível utilizar o Lema 3 com $\alpha = \frac{d(t)}{d_2}$. A aplicação do Lema 3 implica nas LMIs em (8).

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &\leq \sum_{\bullet=m,s} \left\{ d_{\bullet 2} \dot{q}_\bullet^T R_\bullet \dot{q}_\bullet - \frac{1}{d_{\bullet 2}} \int_{t-d_{\bullet}(t)}^t \dot{q}_\bullet^T(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. \times R_\bullet \int_{t-d_{\bullet}(t)}^t \dot{q}_\bullet(\sigma) d\sigma \right\} + d_2^2 \dot{e}^T R \dot{e} \\ &\quad - \xi^T \Upsilon^T \Phi(d(t)) \Upsilon \xi \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente obtém-se

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^4 \dot{V}_i \leq \sum_{k=1}^{2^n} \eta_k \xi^T (\Theta_k(\dot{d}(t)) - \Upsilon^T \Phi(d(t)) \Upsilon) \xi$$

conforme definições apresentadas no topo da próxima página.

$$\xi^T = \left[\dot{q}_m^T(t) \dot{q}_s^T(t) \int_{t-d_m}^t \dot{q}_m^T(\sigma) d\sigma \int_{t-d_s}^t \dot{q}_s^T(\sigma) d\sigma e^T(t) e^T(t-d(t)) \right. \\ \left. e^T(t-d_2) \frac{1}{d(t)} \int_{t-d(t)}^t e^T(\sigma) d\sigma \frac{1}{d_2-d(t)} \int_{t-d_2}^{t-d(t)} e^T(\sigma) d\sigma \right]$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 0_{n \times 4n} & I & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0_{n \times 4n} & I & I & 0 & -2I & 0 \\ 0_{n \times 4n} & 0 & I & -I & 0 & 0 \\ 0_{n \times 4n} & 0 & I & I & 0 & -2I \end{bmatrix}$$

$$\Phi(d(t)) = \frac{d_2-d(t)}{d_2} \left(\begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & Y_2 \\ * & 0 \end{bmatrix} \right) + \frac{d(t)}{d_2} \left(\begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_1 \\ * & X_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Theta_k(\dot{d}(t)) = \begin{bmatrix} \Theta_{1,1} & -d_2^2 R & 0 & \Theta_{Km} & \Theta_{Km} + W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \Theta_{2,2} & -\Theta_{Ks} & 0 & \Theta_{Ks} - W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \frac{-R_m}{d_{m2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \frac{-R_s}{d_{s2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & (1-\dot{d})S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -S & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$\Theta_{1,1} = He\{-D_k \alpha_m + D_k^- H_{\alpha m}\} + d_{12}R + d_{m2}Rm$; $\Theta_{2,2} = He\{-D_k \alpha_s + D_k^- H_{\alpha s}\} + d_{12}R + d_{s2}Rs$
 $\Theta_{Km} = -D_k K_m + D_k^- H_{km}$; $\Theta_{Ks} = D_k K_s + D_k^- H_{ks}$; $H_m = [H_{\alpha m} \ 0 \ H_{km}]$; $H_s = [0 \ H_{\alpha s} \ H_{ks}]$
 $\tilde{R} = \text{diag}\{R, 3R\}$ e $Q = \text{diag}\{\varrho_{m1}I, \varrho_{s1}I, W\}$.

Portanto, se as LMIs em (10), em conjunto com as LMIs em (8), são satisfeitas, então $\dot{V} < 0$. Ademais, conforme Hua et al. (2017), se

$$\varepsilon(Q,1) = \{x \triangleq [\dot{q}_m, \dot{q}_s, e] \in \mathbb{R}^{3n} : x^T Q x \leq 1\}$$

pertencer à interseção dos conjuntos

$$L(H_m) = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : |h_{mi}x| \leq S_i, i = 1, \dots, n\}$$

$$L(H_s) = \{x \in \mathbb{R}^{3n} : |h_{si}x| \leq S_i, i = 1, \dots, n\}$$

de acordo com o Lema 5 esta condição é equivalente às LMIs em (9), então $\dot{V} < 0$ para todo $x \in \varepsilon(Q,1) \setminus \{0\}$. Neste caso, considerando os limitantes apresentados na Suposição 3, temos que

$$x(t)^T Q x(t) \leq V(x_t) < V(x_0) \leq \Gamma_\delta$$

sendo Q dado no topo da página e $\Gamma_\delta = (\varrho_{m2} + \frac{1}{2}d_{m2}^2 \lambda_{\max}(R_m))\delta_m^2 + (\varrho_{s2} + \frac{1}{2}d_{s2}^2 \lambda_{\max}(R_s))\delta_s^2 + (\lambda_{\max}(W) + d_2 \lambda_{\max}(Z))\delta_{e1}^2 + \frac{1}{2}d_2^3 \lambda_{\max}(R)\delta_{e2}^2$, um majorante de $V(x_0)$. Assim, a estimação do domínio de atração pode ser obtida por $\Gamma_\delta \leq 1$, completando a prova. \square

Observação 1: Sendo a matriz $\Theta(\dot{d}(t)) - \Upsilon^T \Phi(d(t)) \Upsilon$ afim com respeito a $d(t)$ e $\dot{d}(t)$, para $\dot{V} < 0$ é necessário e suficiente assegurar a factibilidade das LMIs (10) nos vértices do domínio $[0, d_2] \times [\mu_1, \mu_2]$.

Observação 2: Conforme apresentado em Hua et al. (2017) para $\delta_m = \delta_s = \delta_{e1} = \delta_{e2} = \delta_{\max}$ a maior estimação do domínio de atração pode ser obtida resolvendo o seguinte problema de otimização

min $\bar{\omega}$
sujeito a

$$a) \ \omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, 5, W > 0, Z > 0, R_m > 0, R_s > 0, R > 0$$

$$b) \ \omega_1 I - W \geq 0, \omega_2 I - Z \geq 0, \omega_3 I - R_m \geq 0, \omega_4 I - R_s \geq 0, \omega_5 I - R \geq 0$$

$$c) \ \text{LMIs (8), (9) e (10)}.$$

$$\text{com } \bar{\omega} = \omega_1 + d_2 \omega_2 + \frac{1}{2} d_{m2}^2 \omega_3 + \frac{1}{2} d_{s2}^2 \omega_4 + \frac{1}{2} d_2^3 \omega_5.$$

A restrição b) é equivalente a $\lambda_{\max}(W) \leq \omega_1$, o análogo vale para $\omega_i, i = 2, \dots, 5$. Consequentemente tem-se $\lambda_{\max}(W) + d_2 \lambda_{\max}(Z) + \frac{1}{2} d_{m2}^2 \lambda_{\max}(R_m) + \frac{1}{2} d_{s2}^2 \lambda_{\max}(R_s) + \frac{1}{2} d_2^3 \lambda_{\max}(R) \leq \bar{\omega}$. Então a estimação do domínio de atração maximizado é dada por $\delta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\omega}}}$. É possível fixar alguns dos parâmetros e otimizar outros a fim de se obter domínios de atração que se adequem melhor à diferentes situações.

4 Simulação

Nesta seção é apresentada simulações para verificar a efetividade do resultado proposto. O sistema (1) com dois graus de liberdade é utilizado, seu modelo é dado em Spong et al. (2006). A matriz de inércia $M_{\bullet}(q_{\bullet})$ é explicitamente dada por

$$M_{\bullet}(q_{\bullet}) = \begin{bmatrix} \mu & m_{2\bullet}(l_{2\bullet}^2 + l_{1\bullet}l_{2\bullet}c_{2\bullet}) \\ * & m_{2\bullet}l_{2\bullet}^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

com $\mu = m_{2\bullet}l_{2i}^2 + (m_{1\bullet} + m_{2\bullet})l_{1\bullet}^2 + 2m_{2\bullet}l_{1\bullet}l_{2\bullet}c_{2\bullet}$, $c_{2\bullet} = \cos(q_{2\bullet})$. As forças centrífugas e de coriolis são modeladas como

$$C_{\bullet}(q_{\bullet}, \dot{q}_{\bullet}) = \begin{bmatrix} -2\beta\dot{q}_{2\bullet} & -\beta\dot{q}_{2\bullet} \\ -\beta\dot{q}_{1\bullet} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

com $\beta = m_{2\bullet}l_{1\bullet}l_{2\bullet}s_{2\bullet}$, $s_{2\bullet} = \sin(q_{2\bullet})$, $\dot{q}_{1\bullet}$ e $\dot{q}_{2\bullet}$ as velocidades angulares de cada elo. Os efeitos gravitacionais para cada manipulador são representados por

$$g_{\bullet}(q_{\bullet}) = \begin{bmatrix} m_{2\bullet}gl_{2\bullet}c_{12\bullet} + (m_{1\bullet} + m_{2\bullet})gl_{1\bullet}c_{1\bullet} \\ m_{2\bullet}gl_{2\bullet}c_{12\bullet} \end{bmatrix} \quad (18)$$

com $c_{1\bullet} = \cos(q_{1\bullet})$, $c_{12\bullet} = \cos(q_{1\bullet} + q_{2\bullet})$ e g é a aceleração gravitacional.

É necessário esclarecer que o operador humano aplica força no efetuador do robô mestre, e a interação do ambiente com o robô escravo também é medida no efetuador. Então, para as simulações as seguintes expressões são usadas $F_h = J_m^T(q_m)f_h$ e $F_e = J_s^T(q_s)f_e$, sendo $J_{\bullet}^T(q_{\bullet})$ a transposta da matriz Jacobiana do robô manipulador. A Jacobiana para robôs com essa configuração é

$$J_{\bullet}(q_{\bullet}) = \begin{bmatrix} -l_{1\bullet}s_{1\bullet} - l_{2\bullet}s_{12\bullet} & -l_{2\bullet}s_{12\bullet} \\ l_{1\bullet}c_{1\bullet} + l_{2\bullet}c_{12\bullet} & l_{2\bullet}c_{12\bullet} \end{bmatrix} \quad (19)$$

com $s_{12\bullet} = \sin(q_{1\bullet} + q_{2\bullet})$.

Escolheu-se para simulação massas de cada elo como $m_{1m} = 3,9473$ kg, $m_{2m} = 0,6232$ kg, $m_{1s} = 3,2409$ kg e $m_{2s} = 0,3185$ kg. Os comprimentos de todos os elos $l_{1\bullet}$ e $l_{2\bullet}$ medem 0,38 m. Os valores são os mesmos utilizados por Nuño et al. (2009).

O controlador utilizado é $\alpha_m = \alpha_s = 3I$, $K_m = K_s = 0,3I$ e nível de saturação igual a ± 3 , com esses parâmetros e por simplicidade considerando o atraso simétrico, utilizando o Teorema 1 foi encontrado o atraso máximo de 1,4690 s com taxa de variação positiva ($\mu_{\bullet 1} = 0,01$ e $\mu_{\bullet 2} = 0,99$). Utilizando os mesmos parâmetros no teorema de Hua et al. (2017) obtém-se o atraso máximo de 1,3997 s.

O problema de otimização proposto neste trabalho com a lei de controle com os mesmos parâmetros utilizados anteriormente e atraso de 1,3997

s, o domínio de atração é maximizado em $\delta_{max} = 1,0551$, enquanto o problema proposto em Hua et al. (2017) maximiza em $\delta_{max} = 1,0161$.

O atraso no tempo foi escolhido como uma rampa cíclica com período de 2 s e amplitude máxima de 1,4690 s, para este atraso o problema de otimização estima o domínio de atração como $\delta_{max} = 0,9194$.

O operador aplica uma força f_h no mestre na direção Y. A força inicia em 0 e cresce linearmente para 10 N em 10 s. A força é mantida constante de 10 até 15 s, e diminui linearmente para 0 N de 15 a 25 s. No lado do escravo existe uma parede de alta rigidez em $y = 0,5$ m. Quando o robô atinge a parede rígida a força de reação é de $20.000(y - 0,5)$ N.

Os robôs mestre e escravo têm configurações iniciais diferentes, $q_m = [\frac{\pi}{6} \ \frac{\pi}{10}]^T rad$ e $q_s = [\frac{\pi}{4} \ -\frac{\pi}{6}]^T rad$ como na figura 2a, as velocidades e acelerações iniciais são nulas para ambos manipuladores.

O conjunto de simulações tem o propósito de mostrar que a estabilidade e a transparência são alcançadas quando as condições iniciais começam dentro do elipsoide. Pretende-se responder as perguntas: 1) Quando o robô mestre é movimentado, o escravo segue o mestre? 2) Quando o escravo encosta na parede, a força da interação é refletida para o mestre? 3) Quando o operador humano deixa de aplicar força, o erro de posição entre o mestre e o escravo desaparece?

As simulações no espaço da tarefa (cartesiano) podem ser observadas nas figuras 3 e 4.

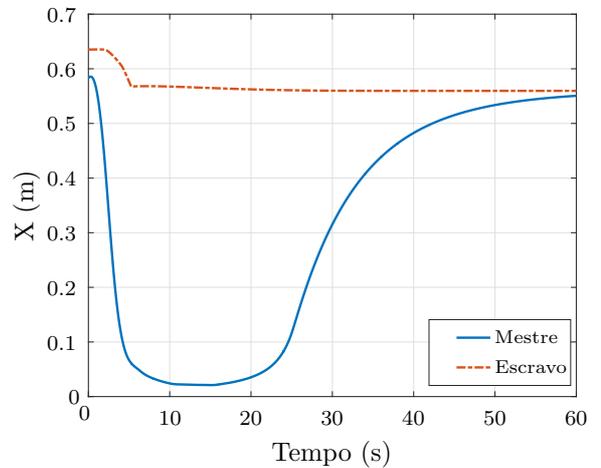


Figura 3: Comparação entre as posições cartesianas X dos manipuladores

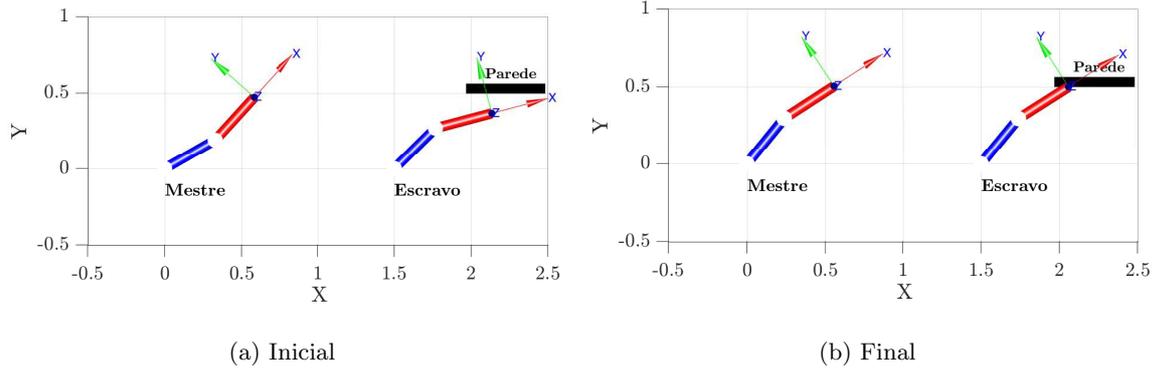


Figura 2: Configuração dos robôs

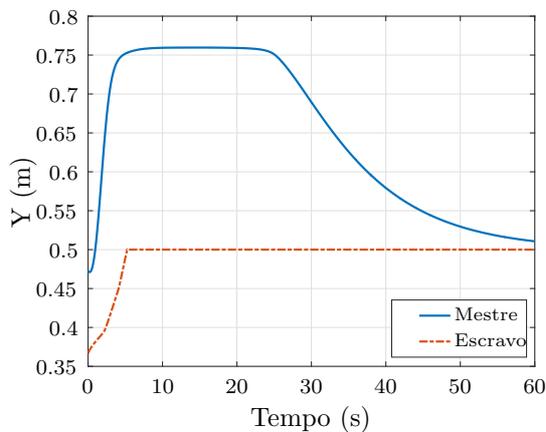


Figura 4: Comparação entre as posições cartesianas Y dos manipuladores

Próximo de 5 segundos o manipulador escravo atinge a parede e pode ser notado que a coordenada Y do escravo permanece constante. Com o fim da força aplicada pelo operador humano em 25 s os manipuladores convergem para a posição final como ilustrado pela figura 2b. A convergência do erro pode ser vista na figura 5.

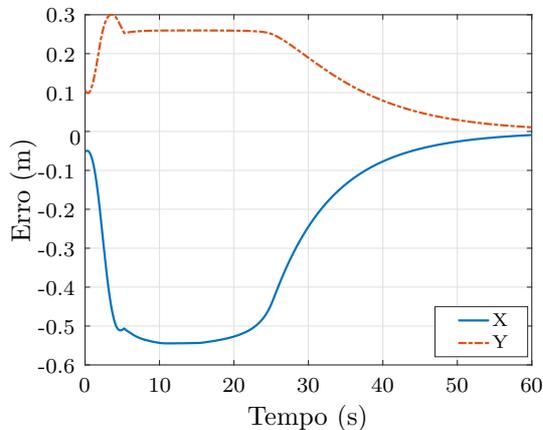


Figura 5: Evolução do erro de posição entre os manipuladores

Respondendo as perguntas feitas anteriormente: 1) O manipulador escravo segue o mestre até a ocorrência de estímulo ambiental, após o robô encostar na parede só é garantido que o erro é limitado; 2) Sim, após o robô escravo encostar na parede o robô mestre passa a resistir ao movimento tendo em vista que o escravo está travado devido à interação com a parede; 3) Neste caso sim, pois na ausência de força humana o robô mestre tende à configuração do escravo e consequentemente o escravo deixa de ir em direção à parede e a força ambiental é extinta permitindo que o erro zere. Este último resultado não é garantido pelo teorema 1 tendo em vista que em uma situação real é possível existir outras forças de interação ambiental.

As simulações foram realizadas no MatlabTM, com auxílio do pacote *Robotics Toolbox* (Corke, 1996). Para resolução das LMIs foi utilizado como analisador o *Yalmip* (Lofberg, 2004) e o algoritmo utilizado foi o *SDPT3* (Toh et al., 1999).

5 Considerações Finais

Este trabalho foca na análise de estabilidade de sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a saturação nos atuadores e atrasos assimétricos e variantes no tempo. Também é estudado a estimação do domínio de atração. Utilizando um funcional de Lyapunov-Krasovskii junto ao lema da Combinação Reciprocamente Convexa Aprimorada foi possível obter um novo critério de análise de estabilidade que permite maiores atrasos. As simulações demonstram a efetividade do critério proposto. Em trabalhos futuros pretende-se desenvolver métodos que permitam estimar maiores domínios de atração.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES - Brasil, CNPq e FAPEMIG, os autores gostariam de agradecer tais agências.

Referências

- Anderson, R. J. and Spong, M. W. (1989). Bilateral control of teleoperators with time delay, *IEEE Transactions on Automatic control* **34**(5): 494–501.
- Corke, P. I. (1996). A robotics toolbox for matlab, *IEEE Robotics & Automation Magazine* **3**(1): 24–32.
- Gu, K. (2000). An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, Vol. 3, IEEE, pp. 2805–2810.
- Hashemzadeh, F., Hassanzadeh, I. and Tavakoli, M. (2013). Teleoperation in the presence of varying time delays and sandwich linearity in actuators, *Automatica* **49**(9): 2813–2821.
- Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control systems with actuator saturation: analysis and design*, Springer Science & Business Media.
- Hua, C.-C. and Liu, X. P. (2010). Delay-dependent stability criteria of teleoperation systems with asymmetric time-varying delays, *IEEE Transactions on Robotics* **26**(5): 925–932.
- Hua, C.-C., Yang, X., Yan, J. and Guan, X.-P. (2017). On exploring the domain of attraction for bilateral teleoperator subject to interval delay and saturated p+ d control scheme, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(6): 2923–2928.
- Islam, S., Liu, P., El Saddik, A. and Yang, Y. B. (2015). Bilateral control of teleoperation systems with time delay, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **20**(1): 1–12.
- Lee, D. and Spong, M. W. (2006). Passive bilateral teleoperation with constant time delay, *IEEE transactions on robotics* **22**(2): 269–281.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab, *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, IEEE, pp. 284–289.
- Nuño, E., Basañez, L., Ortega, R. and Spong, M. W. (2009). Position tracking for nonlinear teleoperators with variable time delay, *The International Journal of Robotics Research* **28**(7): 895–910.
- Nuno, E., Ortega, R., Barabanov, N. and Basañez, L. (2008). A globally stable pd controller for bilateral teleoperators, *IEEE Transactions on Robotics* **24**(3): 753–758.
- Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality: application to time-delay systems, *Automatica* **49**(9): 2860–2866.
- Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2016). Delay-dependent reciprocally convex combination lemma, *Rapport LAAS n° 16006, 2016*.
- Spong, M. W., Hutchinson, S. and Vidyasagar, M. (2006). *Robot modeling and control*, Vol. 3, Wiley New York.
- Toh, K.-C., Todd, M. J. and Tütüncü, R. H. (1999). Sdpt3a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3, *Optimization methods and software* **11**(1-4): 545–581.