

# APLICAÇÃO DA MÁXIMA TRANSFERÊNCIA DE POTÊNCIA EM CIRCUITO LINEAR ATUANDO SOBRE MOTOR DC

LEONARDO ACHO\*, ALESSANDRO N. VARGAS†

\* *Universitat Politècnica de Catalunya Barcelona Tech,  
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est, CoDALab (Control, Dynamics and Applications),  
Carrer d'Eduard Maristany, 10-14, 08930 Barcelona, Espanha*

† *Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR,  
Av. Alberto Carazzai 1640, 86300-000 Cornélio Procópio-PR, Brasil.*

Emails: leonardo.acho@upc.edu, avargas@utfpr.edu.br

**Resumo**— O principal objetivo deste artigo é apresentar um exemplo em que controle é aplicado de modo a que um motor DC ajuste posição de potenciômetro. Embora simples, o problema tem como pano de fundo resolver um problema de máxima transferência de potência num circuito elétrico linear. O projeto envolve o uso do algoritmo *extremum seeking*. Resultados de simulação e modelamento ilustram o potencial da abordagem em aplicações diversas.

**Palavras-chave**— controle; motor DC; extremum seeking; circuitos; máxima transferência de potência.

## 1 Introdução

Motores DC já se tornaram universais (Morales et al., 2014), principalmente porque são confiáveis e possuem grande gama de condições de operação.

Do ponto de vista de educação em controle, motores DC representam sistemas típicos para controle usando os métodos clássicos da literatura, tais como os controladores PID (Kelly and Moreno, 2001). Além disso, motores DC possuem controle relativamente fácil para velocidade, assim como torque, permitindo certa manipulação em aplicações (veja Capítulo 7 em (Huang, 2000)).

Em Engenharia Elétrica, o *teorema de máxima transferência de potência* anuncia que, para obter a máxima potência externa de uma fonte de tensão de resistência interna *finita*, a resistência da carga deve ser igual a resistência da fonte, como se fosse vista desde seus terminais de entrada (veja um exemplo em (Hayt and Kemmerly, 1971)).

Em aplicações de controle, esse teorema de máxima transferência de potência pode ser usado no projeto, por exemplo, de sistema de rastreamento em células solares, no qual o equivalente da resistência interna finita é variante com o tempo (Teng et al., 2010).

Finalmente, uma estratégia de busca da função de valor máximo consiste em empregar a teoria de *extremum-seeking control* (veja (Leyva et al., 2006) e (Dochain et al., 2011) e suas referências). Esta estratégia foi proposta inicialmente como um algoritmo para encontrar o ponto de operação (*setpoint*) que maximiza (ou minimiza) uma função objetivo (Dochain et al., 2011; Leyva et al., 2006). Sua popularidade vem do fato de que este esquema tem sido aplicado com bastante sucesso em muitos ramos da Engenharia, tais como em processos de controle de combustão em motores de automóveis, motores a gás, freios anti-

travamento, entre outros (Dochain et al., 2011; Krstić and Wang, 2000).

O principal objetivo deste trabalho é oferecer um exemplo para instruir um projeto de controle de posição de um motor DC que ajusta automaticamente um potenciômetro. Este ajuste está centrado na resolução de um problema de máxima transferência de potência num circuito linear. Esta tarefa é feita pelo algoritmo de *extremum seeking*. Simulações e modelamento mostram que o projeto possui potencial.

A estratégia apresentada aqui possui implicações na máxima transferência de potência em sistemas baseados em células solares.

A estrutura deste trabalho está dividida na seguinte maneira. Seção 2 apresenta o problema, enquanto Seção 3 introduz e mostra como usar a estratégia de *extremum seeking*. Seção 4 mostra um projeto de controle. Seção 5 mostra resultados numéricos. Finalmente, Seção 6 apresenta alguns comentários finais.

## 2 Apresentação do problema

Considere o sistema eletro-mecânico descrito na Fig. 1. O principal problema consiste em propor uma lei de controle  $u = u(t)$  tal que a máxima potência da fonte possa ser transferida para a carga  $R_L(\theta)$ .

Assumimos que  $V_{R_s}(t)$ ,  $\theta(t)$ , e  $\dot{\theta}(t)$  estão disponíveis; a fonte  $V_s$  tem valor conhecido. Aqui frisamos que a hipótese de que  $R_s(t)$  é variante no tempo é realística, por exemplo, em aplicações de painéis solares (veja a Fig. 1 do artigo (Teng et al., 2010)). Em tais aplicações, também sabemos que  $V_s$  é variante no tempo; porém, sem perda de generalidade, e por motivo de simplicidade, assumimos que  $V_s$  é constante.

Em resumo, ao manipular  $u(t)$ , estamos ma-

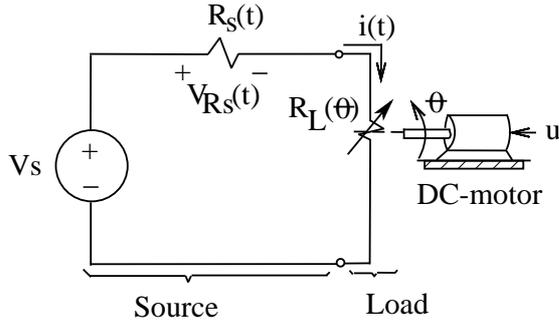


Figura 1: Diagrama representando o problema sob estudo.

nipulando a posição angular do motor DC (i.e.,  $\theta$ ). Esta, por sua vez, manipula o valor da resistência de carga  $R_L(\theta)$ .

Portanto, desejamos automaticamente ajustar a resistência de carga ao valor de máxima potência transferida desde a fonte para a carga ( $R_L = R_s$ ). Se a resistência interna da fonte muda de valor, então a carga tem que ser automaticamente ajustada para um novo valor de acordo com referência desejada. Em outras palavras, o objetivo de controle consiste em encontrar uma regra de controle  $u(t)$ , sob o esquema da Fig. 1, de tal modo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_s(t) = R_L(\theta). \quad (1)$$

### 3 Algoritmo de busca extrema

O algoritmo de busca extrema (em inglês, *extremum seeking*) foi proposto na literatura como um código que visa buscar uma referência (ponto) de operação que maximiza (ou minimiza) uma função objetivo.

A idéia básica está mostrada na Fig. 2 (c.f. (Leyva et al., 2006)); embora outras alternativas existam na aplicação de sinais de perturbação (Krstić and Wang, 2000; Dochain et al., 2011), concentraremos o estudo na busca extrema.

Em resumo, o resultado do algoritmo de busca extrema, conforme Fig. 2, está provado a seguir.

**Teorema 1** *Dada uma função suave  $f(x)$  que tenha um máximo global em  $x = a$ , que é assumido desconhecido, e sendo  $k$  uma constante positiva, então o algoritmo mostrado na Figure 2 produzirá convergência em tempo finito de  $x(t)$  para  $a$ ; ou seja, existe um  $T_s$  finito tal que*

$$\lim_{t \rightarrow T_s} x(t) = a.$$

**Prova:** Desde a Fig.2, temos que:

$$\dot{x} = k \operatorname{sgn} \left( \frac{df(x)}{dx} \right), \quad (2)$$

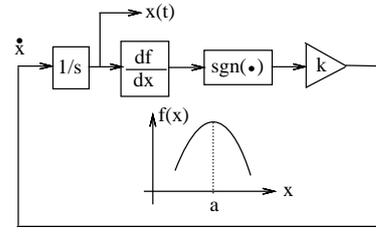


Figura 2: Diagrama de blocos do algoritmo *extremum seeking*.

no qual  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  representa a função *signum*.<sup>1</sup>. Define  $e = x - a$ , e disto obtemos que <sup>2</sup>.

$$\dot{e} = -k \operatorname{sgn}(e). \quad (3)$$

Finalmente, a dinâmica do erro (3) tem tempo de convergência finito para  $e(t) = 0$  para todo  $t > t_1$ , para algum  $t_1 > 0$  (veja Capítulo 2 em (Perruquetti and Barbot, 2002)). Este argumento encerra a prova.  $\square$

**Comentário 1** *Observe que o parâmetro  $k$  controla o parâmetro  $T_s$ ; ao aumentar  $k$ , diminuiu-se  $T_s$ .*

**Comentário 2** *Teorema 1 é, de fato, um teorema de estabilidade assintótica global em tempo-finito para o ponto de equilíbrio  $e = 0$  em (3).*

**Comentário 3** *Embora o Teorema 1 seja provado para  $f(x)$  sendo uma função com ponto de máximo global, o Teorema 1 também pode ser usado para pontos de máximo locais. A convergência local para um ponto de máximo depende da condição inicial em (2); claramente, depende também da existência de tais pontos locais.*

*Exemplo.* Perceba que a função  $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x$  tem um máximo local em  $x = -0.6$ . Considerando o diagrama de blocos da Fig. 2 com  $k = 1$ , obtemos os resultados numéricos mostrados na Fig. 3 para três condições iniciais distintas. Note que as trajetórias correspondentes convergem, em tempo finito, para o ponto de máximo local ( $x = -0.6$ ).

### 4 Projeto do controle de posição

Recapitulando a Seção 2, o objetivo de controle consiste em projetar uma lei de controle  $u(t)$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} R_L(\theta) = R_s(t)$ , sob hipótese de que a única informação disponível para o controlador são: a tensão  $V_{R_s}(t)$ , a posição angular do motor  $\theta(t)$ , e sua velocidade angular  $\dot{\theta}(t)$ .

<sup>1</sup>Função *signum* exibe a propriedade de que  $x \operatorname{sgn}(x) = |x|$  (veja Capítulo 1 em (Edwards and Spurgeon, 1998)).

<sup>2</sup>Note que  $\frac{df(x)}{dx}$  é positivo se  $x - a < 0$ , e isto é negativo se  $x - a > 0$ ; então  $\operatorname{sgn} \left( \frac{df(x)}{dx} \right) = -\operatorname{sgn}(e)$ .

Assumimos que a resistência  $R_s(t)$  não altera o seu valor, somente para fins de facilitar a discussão a seguir. Mas o resultado vale para  $R_s(t)$  variante no tempo. Também para testar o sistema perante sua robustez, em nossos experimentos numéricos consideraremos pequenas e suaves variações em  $R_s(t)$  (alterações variantes no tempo)—uma típica aplicação relacionada à teoria de controle adaptativo.

Desde a Fig.1, temos que a potência em  $R_L$  será

$$P_{R_L}(R_L) = \frac{R_L V_s^2}{(R_s + R_L)^2}.$$

Daí temos que

$$\frac{\partial P_{R_L}}{\partial R_L} = \frac{V_s^2(R_s - R_L)}{(R_s + R_L)^3}.$$

Portanto, ao aplicar em (2) a função  $f(\cdot) = P_{R_L}(R_L)$ , encontramos

$$\begin{aligned} \dot{R}_L &= k \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial P_{R_L}}{\partial R_L}\right) \\ &= k \operatorname{sgn}\left(\frac{V_s^2(R_s - R_L)}{(R_s + R_L)^3}\right) \\ &= k \operatorname{sgn}(R_s - R_L). \end{aligned} \quad (4)$$

Voltando a Fig. 1, verificamos que

$$R_s = \frac{V_{R_s} R_L}{V_s - V_{R_s}}. \quad (5)$$

Considerando agora que a resistência  $R_L$  é sob hipótese linearmente dependente da posição angular do motor DC, ou seja,  $R_L := R_L(\theta) = \theta$  (um ganho proporcional unitário foi considerado nesta fórmula) chegamos a conclusão desde (5) que

$$R_s = \frac{V_{R_s} \theta}{V_s - V_{R_s}}. \quad (6)$$

Quando substituimos (6) em (4), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{R}_L &= k \operatorname{sgn}\left(\frac{V_{R_s} \theta}{V_s - V_{R_s}} - \theta\right) \\ &= k \operatorname{sgn}\left(\frac{\theta(2V_{R_s} - V_s)}{V_s - V_{R_s}}\right). \end{aligned}$$

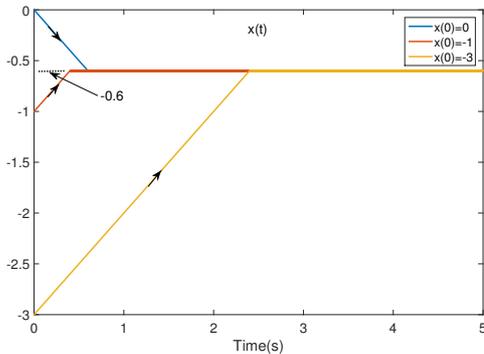


Figura 3: Dados do exemplo numérico.

Justamente pelo fato de que  $V_s > V_{R_s}$ , podemos escrever desde a expressão anterior que

$$\dot{R}_L = k \operatorname{sgn}(\theta(2V_{R_s} - V_s)),$$

que por sua vez equivale a

$$\dot{\theta} = k \operatorname{sgn}(\theta(2V_{R_s} - V_s)). \quad (7)$$

Além disso, por causa  $0 < R_L < \infty$ , então (7) reduz-se a

$$\dot{\theta} = k \operatorname{sgn}(2V_{R_s} - V_s). \quad (8)$$

A expressão em (8) deve ser interpretada como a posição angular desejada para o motor DC. Note que podemos reescrever (8) como

$$\dot{\theta}_d = k \operatorname{sgn}(2V_{R_s} - V_s), \quad (9)$$

no qual  $\theta_d(t)$  agora representa a trajetória da posição angular desejada; nossa estratégia de controle deve fazer com que o motor DC siga (rastree) essa posição angular  $\theta_d(t)$ , veja Fig. 4.

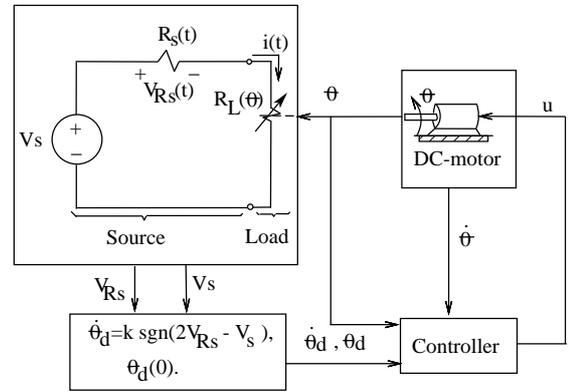


Figura 4: Diagrama de blocos representando o controle em malha fechada.

## 5 Exemplo numérico

Para prosseguir com o projeto, considere um controlador PD conforme o esquema mostrado na Fig. 4:

$$\begin{aligned} u &= k_p(\theta - \theta_d) - k_d(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) \\ &= k_p(\theta - \theta_d) - k_d(\dot{\theta} - k \operatorname{sgn}(2V_{R_s} - V_s)). \end{aligned}$$

Vamos aqui considerar o seguinte modelo (ideal) para o motor DC:  $J\ddot{\theta} = u$ , no qual  $J$  representa o momento inercial, e  $u$  denota o torque de controle.

Usando  $J = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $k_p = k_d = -1$ <sup>3</sup>,  $k = 0.1$ ,  $V_s = 1 \text{ V}$ , sob condições iniciais nula.

Figs 5 e 6 mostram o resultado numérico. Note que as figuras apresentam convergência para o ponto desejado de operação, sob efeito de pequeno *chattering* em regime. É comum observar *chattering* sob estratégias de controle que envolvem o uso da função *signum*.

<sup>3</sup>Estes valores podem ser quaisquer exceto positivos.

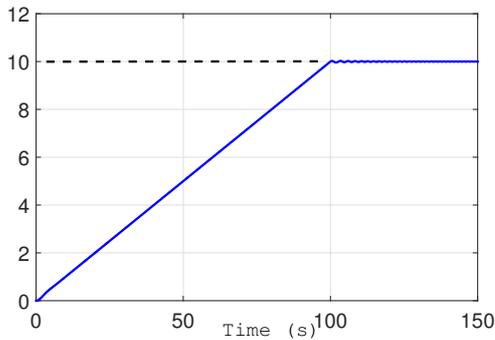


Figura 5: Resultado numérico:  $\theta(t)$  [Rad] (curva em azul) e usando  $R_S(t) = 10\Omega$  fixo.

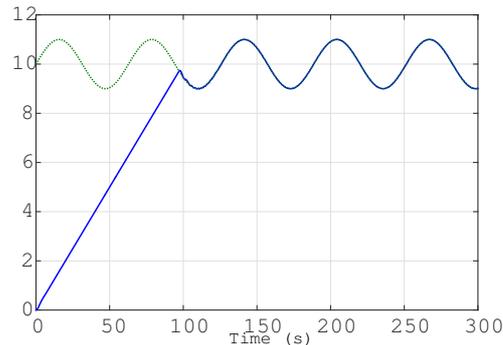


Figura 6: Resultado numérico:  $\theta(t)$  [Rad] (curva em azul) e usando  $R_S(t)\Omega$  variante no tempo na forma senoilda (curva em verde).

## 6 Comentários finais

Mostramos nesse trabalho um exemplo de máxima transferência de potência entre uma fonte e sua respectiva carga. O esquema funciona sob algoritmo de *extremum seeking*, que foi utilizado para fazer com que uma trajetória seja rastreada pela posição angular de um motor DC.

Nossa estratégia pode ser usada como método alternativo para rastreamento de máxima potência em sistemas fotovoltaicos, por exemplo, usando resultados de (Tafticht et al., 2008; Roshan and Moallem, 2013).

Realmente, experimentos desta natureza mostram-se como desafio para projetistas, pois depende da programação de carga variante no tempo, testes de sensibilidade, entre outros. Este trabalho portanto constitui-se uma ferramenta no auxílio a tais projetistas pois introduz o conceito de *extremum seeking* na máxima transferência de potência entre fonte e carga.

## Agradecimentos

Este trabalho teve financiamento do Ministerio de Economía, Industria y Competitividad de España sob número DPI2015-64170-R, e das agências bra-

sileiras CNPq 304856/2007-0, e CAPES Programa PVE 88881.030423/2013-01.

## Referências

- Dochain, D., Perrier, M. and Guay, M. (2011). Extremum seeking control and its application to process and reaction systems: A survey, *Mathematics and Computers in Simulation* **82**(3): 369–380.
- Edwards, C. and Spurgeon, S. K. (1998). *Sliding mode control: theory and applications*, Taylor and Francis.
- Hayt, W. H. and Kemmerly, J. E. (1971). *Engineering circuit analysis*, McGraw-Hill.
- Huang, H.-W. (2000). *Using the MCS-51 microcontroller*, Oxford University Press.
- Kelly, R. and Moreno, J. (2001). Learning PID structures in an introductory course of automatic control, *IEEE Transactions on Education* **44**(4): 373–376.
- Krstić, M. and Wang, H.-H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, *Automatica* **36**(4): 595–601.
- Leyva, R., Alonso, C., Queinnec, I., Cid-Pastor, A., Lagrange, D. and Martinez-Salamero, L. (2006). MPPT of photovoltaic systems using extremum-seeking control, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **42**(1): 249–258.
- Morales, R., Somolinos, J. and Sira-Ramírez, H. (2014). Control of a DC motor using algebraic derivative estimation with real time experiments, *Measurement* **47**: 401–417.
- Perruquetti, W. and Barbot, J.-P. (2002). *Sliding mode control in Engineering*, Marcel Dekker Inc.
- Roshan, Y. M. and Moallem, M. (2013). Maximum power point estimation and tracking using power converter input resistance control, *Solar Energy* **96**: 177–186.
- Tafticht, T., Agbossou, K., Doumbia, M. and Chériti, A. (2008). An improved maximum power point tracking method for photovoltaic systems, *Renewable Energy* **33**(7): 1508–1516.
- Teng, T.-P., Nieh, H.-M., Chen, J.-J. and Lu, Y.-C. (2010). Research and development of maximum power transfer tracking system for solar cell unit by matching impedance, *Renewable Energy* **35**(4): 845–851.