

BMRAC MULTIVARIÁVEL UTILIZANDO DIFERENCIADORES EXATOS E GLOBAIS BASEADOS EM HOSM COM GANHOS DINÂMICOS

ANDREI BATTISTEL*, TIAGO ROUX OLIVEIRA*, VICTOR HUGO PEREIRA RODRIGUES*

**Departamento de Eletrônica e Telecomunicações,
DETEL, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)*

Emails: andrei.battistel@gmail.com, tiagoroux@uerj.br,
rodrigues.vhp@gmail.com

Abstract— In this paper, we propose an extension of the *Binary Model Reference Adaptive Control* (BMRAC) for uncertain multivariable linear plants with non-uniform arbitrary relative degree. The BMRAC is a robust adaptive strategy which has the good transient properties and robustness of sliding mode control with the important advantage of having a continuous control signal free of chattering. The relative degree obstacle is circumvented using a multivariable extension of our earlier estimation scheme based on global finite-time differentiators using dynamic gains to a *multivariable* architecture. Preserving the simplicity of its monovariate framework, variable gain super-twisting algorithm (STA) is employed to obtain the robust and exact multivariable differentiator. Global exact output tracking is obtained with robustness without requiring stringent symmetry assumptions on the plant High Frequency Gain matrix.

Keywords— Multivariable Adaptive Control, Higher-Order Sliding Modes, Output Feedback Global Exact Tracking

Resumo— Neste trabalho, apresenta-se uma extensão do Controle Adaptativo Binário por Modelo de Referência (BMRAC) para plantas multivariáveis lineares e incertas com grau relativo arbitrário e não-uniforme. O BMRAC é uma estratégia adaptativa com bom desempenho transitório e a robustez de controle por modos deslizantes com a vantagem de utilizar um sinal de controle contínuo e sem chattering. O obstáculo do grau relativo é contornado utilizando a extensão multivariável de um diferenciador global e exato baseado em HOSM com ganhos dinâmicos recentemente proposto. O resultado é um controlador de realimentação de saída que obtém rastreamento global e exato de maneira robusta sem a necessidade das condições de simetria usualmente necessárias no MIMO MRAC sobre o ganho de alta frequência da planta.

Palavras-chave— Controle Adaptativo Multivariável, Modos Deslizantes de Ordem Superior, Rastreamento Global e Exato por Realimentação de Saída

1 Introdução

Diversas questões surgem na generalização do Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) para sistemas multivariáveis (MIMO), já que novas condições devem ser consideradas e novas hipóteses formuladas em relação ao caso escalar (SISO). As técnicas de MIMO MRAC convencionais requerem o conhecimento de uma matriz S_p tal que $S_p K_p$ seja simétrica positiva definida (SPD) onde K_p é a Matriz de Ganho de Alta Frequência (HFG) (Tao, 2003), (Ioannou and Sun, 1996). Esta é uma hipótese não genérica e frágil, uma vez que mesmo pequenos erros numéricos em K_p podem destruir a simetria.

Uma possibilidade de contornar este problema foi proposta em (Barkana et al., 2006) e (Hsu et al., 2011) baseada no conceito de passividade generalizada introduzido em (Fradkov, 2003), chamado WSPR e relacionado ao conceito usual de Positividade Real (SPR, *strictly positive real*). Também útil neste contexto é a condição de WASPR (*W-almost SPR*), para sistemas que satisfazem a condição WSPR via realimentação estática de saída. Em (Hsu et al., 2011) é demonstrado que uma condição necessária para que plantas de fase mínima e grau relativo um sejam WSPR é a de que a matriz K_p tenha forma de Jordan diagonal positiva (condição PDJ).

A fim de melhorar o desempenho transitório das técnicas de controle adaptativo baseado em gradiente, o MRAC Binário (BMRAC) foi proposto em (Hsu and Costa, 1994). Tal técnica não só permite obter melhores desempenhos transitórios, como apresenta melhor robustez ao permitir a utilização de ganhos altos de adaptação, utilizando um sinal de controle contínuo.

A extensão do MIMO BMRAC para plantas de grau relativo arbitrário foi proposta em (Battistel et al., 2014) uti-

lizando diferenciadores baseados em HOSM (modos deslizantes de ordem superior). Neste trabalho, o grau relativo é compensado estimando-se as derivadas do erro de maneira a gerar uma variável de erro de grau relativo um, tal que o BMRAC possa ser utilizado como apresentado em (Yanque et al., 2012). As derivadas são obtidas utilizando um esquema de estimação híbrida (Nunes et al., 2014), que comuta entre um filtro lead MIMO e um estimador não-linear que utiliza diferenciadores HOSM (Levant, 2003).

Recentemente, novos controladores de realimentação de saída com rastreamento global e exato foram apresentados utilizando tanto modos deslizantes de primeira ordem quanto de ordem superior (Oliveira, Estrada and Fridman, 2017; Oliveira, Rodrigues, Estrada and Fridman, 2017a; Oliveira, Rodrigues, Estrada and Fridman, 2017b; Rodrigues and Oliveira, 2017). Nestes trabalhos, um diferenciador baseado em HOSM com ganhos variáveis foi utilizado, embora tenham sido considerados apenas sistemas SISO.

Neste trabalho, propõe-se uma nova extensão ao MIMO BMRAC para plantas de grau relativo arbitrário não uniforme obtendo rastreamento global e exato. Utiliza-se a versão MIMO do diferenciador baseado em HOSM de ganhos dinâmicos. As principais vantagens em comparação com o apresentado em (Battistel et al., 2014) são a simplificação tanto da análise quanto do controlador em si. O estimador híbrido de (Nunes et al., 2014) emprega dois conjuntos de estimadores simultaneamente (filtros lead e diferenciadores baseados em HOSM de ganhos fixos), que não são necessários para obter estabilidade global com o novo esquema, empregando assim ao menos o dobro de variáveis de estado do que o diferenciador aqui empregado.

Preliminares: Neste artigo, todos os κ 's representam constantes positivas. O termo $\pi(t)$ representa uma função

exponencialmente decrescente, i.e., $|\pi(t)| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t$, onde K possivelmente depende das condições iniciais do sistema e λ é uma constante positiva genérica. O símbolo $|\cdot|$ é utilizado para a norma euclidiana de vetores, ou para a norma induzida de matrizes, enquanto $\|f(t)\|$ denota $\sup\{|f(t)|, t \geq 0\}$, e $\|f_{[t_1, t_2]}\| = \sup_{t \in [t_1, t_2]} |f(t)|, 0 \leq t_1 \leq t_2$. A definição de Filippov para a solução de equações diferenciais descontínuas é utilizada (Filippov, 1964). Por uma questão de simplicidade, “ s ” representa tanto a variável de Laplace quando o operador diferencial (d/dt), de acordo com o contexto.

2 Passividade generalizada (WSPR)

O conceito de SPR convencional requer que o ganho de alta frequência da planta seja SPD, condição dificilmente satisfeita por sistemas reais. Uma solução para contornar esta dificuldade foi recentemente proposta em (Barkana et al., 2006), (Hsu et al., 2011), explorando um conceito mais geral de passividade associado com a definição de WSPR e resultados correlatos.

Definição 1 (WSPR) (Barkana et al., 2006) (Hsu et al., 2011) *Um sistema linear invariante no tempo com a realização $\{A_K, B, C\}$, onde $A_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times M}$, e $C \in \mathbb{R}^{M \times n}$ é dito W -Estritamente Passivo (WSP) e a sua função de transferência $C(sI - A_K)^{-1}B$ é dita W -Estritamente Positiva Real (WSPR), se existem matrizes simétricas positivas definidas P, Q e W tal que*

$$A_K^T P + P A_K = -Q, \quad P B = C^T W. \quad (1)$$

Definição 2 (WASPR) : *Um sistema linear e invariante no tempo com realização $\{A, B, C\}$, é dito WASPR se pode se tornar WSPR a partir de uma realimentação estática de saída, i.e., se existe $K \in \mathbb{R}^{M \times M}$ tal que $C(sI - A_K)^{-1}B$ é WSPR, com $A_K = A - BKC$.*

O teorema WASPR é enunciado como em (Hsu et al., 2011) e estabelece a condição para que um sistema se torne WSPR por meio de realimentação estática de saída.

Teorema 1 (Teorema WASPR (Hsu et al., 2011)) *Todo sistema estritamente próprio e de fase mínima $\{A, B, C\}$ com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times M}$, $C \in \mathbb{R}^{M \times n}$ e matriz de transferência $C(sI - A)^{-1}B$ de ordem $M \times M$ pode se tornar WSPR através de realimentação de saída (suficientemente grande), se e somente se K_p tem autovalores positivos e reais e sua forma de Jordan é diagonal.*

Conforme (Hsu et al., 2011)[Lemma 1], a condição necessária e suficiente para a existência de W que simetriza K_p é que $K_p = CB$ tenha autovalores positivos e reais e que sua forma de Jordan seja diagonal positiva (condição PDJ). De acordo com (Hsu et al., 2014), (Yanque et al., 2012), se K_p não satisfaz a condição de PDJ, é possível escolher um multiplicador matricial \bar{L} tal que $\bar{L}K_p$ satisfaça a condição de PDJ de maneira robusta.

3 Descrição do Problema

Considera-se uma planta MIMO linear invariante no tempo descrita por

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \quad y = H_p x_p, \quad (2)$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^M$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}^M$ é a saída e A_p, B_p e H_p são matrizes constantes e incertas. Todos os parâmetros incertos pertencem a um conjunto compacto Υ , tal que são disponíveis os limites de incerteza necessários a serem definidos posteriormente.

O modelo entrada-saída da planta é dado por

$$y = G(s)u, \quad G(s) = H_p(sI - A_p)^{-1}B_p.$$

As seguintes hipóteses são consideradas

- (A1) $G(s)$ é de fase mínima e tem posto completo.
- (A2) A planta é controlável e observável.
- (A3) O índice de observabilidade ν de $G(s)$ ou um limitante superior de ν é conhecido.
- (A4) Existe uma matriz polinomial diagonal conhecida $\xi_m(s)$ definida como a matriz interactor pela esquerda modificada (MLI) de $G(s)$ de forma que $\xi_m(s) = \text{diag}\{d_1(s), d_2(s), \dots, d_M(s)\}$ onde $d_i(s)$ são polinômios mônicos estáveis de grau $\rho_i > 0$.
- (A5) A matriz de ganho de alta frequência de $G(s)$, definida como $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s)G(s)$ é finita e não singular, com autovalores positivos e forma de Jordan diagonal.

Assim, pela hipótese (A4), o grau relativo vetorial $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M]^T$ é arbitrário e conhecido.

O sinal de referência y_m é gerado pelo seguinte modelo de referência

$$y_m = M(s)r; \quad r, y_m \in \mathbb{R}^M \quad (3)$$

$$M(s) = \text{diag}\{(s+a)^{-1}, \dots, (s+a)^{-1}\} L^{-1}(s) \quad (4)$$

onde $a > 0$ e $L(s)$ é dado por

$$L(s) = \text{diag}\{L_1(s), L_2(s), \dots, L_M(s)\}, \quad (5)$$

e $L_i(s), i = 1, \dots, M$ são polinômios Hurwitz dados por

$$L_i(s) = s^{(\rho_i-1)} + l_{\rho_i-2}^{[i]} s^{(\rho_i-2)} + \dots + l_1^{[i]} s + l_0^{[i]} \quad (6)$$

A matriz de transferência $M(s)$ tem o mesmo grau relativo vetorial de $G(s)$ e o seu HFG é a matriz identidade. O objetivo de controle é encontrar uma lei de controle $u(t)$ tal que o erro de saída

$$e(t) = y(t) - y_m(t), \quad (7)$$

tenda a zero assintoticamente para condições iniciais arbitrárias. Quando a planta é conhecida, uma lei de controle que obtém o casamento entre a matriz de transferência em malha fechada e $M(s)$ é dada por $u^* = \Theta^{*T} \omega$, onde a matriz de parâmetros pode ser escrita como $\Theta^* = \begin{bmatrix} \Theta_u^{*T} & \Theta_y^{*T} & \Theta_0^{*T} & K_\Theta^{*T} \end{bmatrix}^T$, com $\Theta_u^*, \Theta_y^* \in \mathbb{R}^{M(\nu-1) \times M}$, $\Theta_0^*, K_\Theta^* \in \mathbb{R}^{M \times M}$ e o vetor regressor $\omega = [\omega_u^T \ \omega_y^T \ y^T \ r^T]^T$, $\omega_u, \omega_y \in \mathbb{R}^{M(\nu-1)}$ é obtido dos filtros de entrada e saída dados por:

$$\omega_u = A(s)\Lambda^{-1}(s)u, \quad \omega_y = A(s)\Lambda^{-1}(s)y, \quad (8)$$

onde $A(s) = [Is^{\nu-2} \ I s^{\nu-3} \ \dots \ Is \ I]^T$, $\Lambda(s) = \lambda(s)I$ e $\lambda(s)$ é um polinômio mônico e estável de grau $\nu - 1$. A condição de casamento requer que $K_\Theta^{*T} = K_p^{-1}$.

No entanto, como a planta é desconhecida, a matriz de parâmetros desejada Θ^* também é desconhecida. Assim, emprega-se a seguinte lei de controle

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t) \quad (9)$$

onde Θ é uma estimativa de Θ^* obtida por uma lei de adaptação. Uma equação do erro pode ser obtida estendendo-se a abordagem usual do MRAC SISO para o caso MIMO (Tao, 2003; Ioannou and Sun, 1996). Define-se o vetor $X = [x_p^T, \omega_u^T, \omega_y^T]^T$ com a seguinte dinâmica $\dot{X} = A_0 X + B_0 u$. Assim, somando e subtraindo $B_0 u^*$ e notando que há matrizes Ω_1 e Ω_2 tal que

$$\omega = \Omega_1 X + \Omega_2 r \quad (10)$$

segue-se que

$$\dot{X} = A_c X + B_c K_p [u - u^*] + B_c r, \quad y = H_0 X \quad (11)$$

com $A_c = A_0 + B_0 \theta^{*T} \Omega_1$, $B_c = B_0 K_\theta^{*T} = B_0 K_p^{-1}$. O modelo de referência pode ser descrito por $\dot{X}_m = A_c X_m + B_c r$. Assim, o estado do erro

$$X_e = X - X_m \quad (12)$$

é dado por

$$\dot{x}_e = A_c x_e + B_c K_p [u - u^*], \quad e = H_0 x_e \quad (13)$$

Note que (A_c, B_c, H_0) é uma realização não mínima de $M(s)$ e assim a equação do erro pode ser reescrita na forma entrada-saída como

$$e = M(s) K_p [u - u^*] \quad (14)$$

4 Extensão do BMRAC MIMO para Plantas de Grau Relativo Uniforme Um

O BMRAC foi originalmente proposto para sistemas escalares em (Hsu and Costa, 1994), apresentando bom desempenho transitório utilizando ganhos de adaptação altos. Recentemente, uma versão MIMO foi introduzida para plantas de grau relativo um (Yanque et al., 2012). Posteriormente, uma extensão para grau relativo arbitrário foi obtida utilizando estimadores baseados em HOSM (Battistel et al., 2014), na qual emprega-se um estimador híbrido que comuta entre um filtro lead MIMO e um estimador utilizando diferenciadores baseados em HOSM (Levant, 2003), cuja generalização para sistemas MIMO é apresentada em (Nunes et al., 2014).

A generalização do BMRAC para sistemas MIMO em (Yanque et al., 2012) utiliza o conceito de passividade WSPR de tal maneira que a condição de simetria no ganho de alta frequência (HFG) pode ser relaxada, sendo necessário apenas que o HFG tenha autovalores reais e positivos. Esta condição é chamada de PDJ, de acordo com (Hsu et al., 2011) e é bastante menos restritiva do que as condições de simetria necessárias no MRAC convencional, uma vez que a simetria é facilmente destruída mesmo por pequenos erros numéricos, enquanto a condição PDJ é genérica. Para sistemas onde o HFG não satisfaz a condição PDJ, uma matriz passivadora L pode ser escolhida tal que LK_p seja PDJ.¹

A lei de adaptação no MIMO BMRAC foi proposta em (Yanque et al., 2012) utilizando a seguinte parametrização

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(t) \end{bmatrix}, \quad \vartheta(t) = \text{vec}(\Theta) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_m(t) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^{Nm \times n}$, $\vartheta \in \mathbb{R}^{Nm}$, e N é a dimensão de ω e θ_i é a i -ésima coluna do parâmetro Θ . A lei de adaptação do BMRAC MIMO é dada por

$$\dot{\vartheta}(t) = -\vartheta(t)\sigma - \gamma\Omega(t)e(t) \quad (16)$$

onde σ é dado por uma projeção

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\vartheta| < M_\vartheta & \text{ou} & \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } |\vartheta| \geq M_\vartheta & \text{e} & \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad (17)$$

onde

$$\sigma_{eq} = -\frac{\gamma\vartheta^T \Omega \hat{S}}{|\vartheta|^2}, \quad (18)$$

e $M_\vartheta > |\vartheta^*|$ é uma constante. Assim, lei de controle pode ser reescrita como

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t) = \Omega^T(t)\vartheta(t). \quad (19)$$

Para plantas de grau relativo superior, pode-se utilizar o operador $L(s)$ definido na Eq. (5). O operador $L(s)$ é escolhido de tal forma que $L(s)G(s)$ e $L(s)W_m(s)$ tenham grau relativo vetorial um. A variável de erro auxiliar ideal $S = L(s)e \in \mathbb{R}^m$ é dada por

$$S = \begin{bmatrix} e_1^{(\rho_1-1)} + \dots + l_1^{[1]} \dot{e}_1 + l_0^{[1]} e_1 \\ \vdots \\ e_m^{(\rho_m-1)} + \dots + l_1^{[m]} \dot{e}_m + l_0^{[m]} e_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} l_j^{[1]} h_1^T A_c^{(j)} X_e \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} l_j^{[m]} h_m^T A_c^{(j)} X_e \end{bmatrix} = \bar{H} X_e, \quad (20)$$

onde $h_i \in \mathbb{R}^{n+2m(\nu-1)}$ é a i -ésima linha da matriz H_o e a segunda equação é obtida através da hipótese (A5) e da Eq. (13). De (3) e (5), tem-se

$$S = L(s)W_m(s)K_p [u - \Theta^{*T} \omega] = \text{diag} \{ (s + \gamma_1)^{-1}, \dots, (s + \gamma_m)^{-1} \} K_p [u - \Theta^{*T} \omega]. \quad (21)$$

Note que $\{A_c, B_c, \bar{H}\}$ é uma realização não mínima de $L(s)W_m(s)$.

Conforme mencionado anteriormente, esta é a abordagem para plantas de grau relativo um, de forma que o diferenciador baseado HOSM pode ser utilizado a fim de obter um algoritmo para grau relativo arbitrário. Neste trabalho, emprega-se um diferenciador baseado em HOSM com ganhos dinâmicos, tal que a estimação é feita de maneira mais simples.

5 Observador da norma do estado e do majorante da norma para perturbação equivalente

Neste trabalho, são utilizados observadores de norma a fim de obter um limitante superior para a norma de x . Aplicando (Hsu et al., 2003, Lema 3) à Eq. (11), pode-se encontrar $k_x^* > 0$ tal que, para $k_x \in [0, k_x^*]$ um limitante superior para a norma de X e x pode ser obtido usando filtros de aproximação de primeira ordem (FOAFs) (ver detalhes em (Hsu et al., 2003)). Assim, tem-se

$$|x(t)| \leq |\hat{x}(t)| + \hat{\pi}(t), \quad (22)$$

¹Ver (Yanque et al., 2012) para exemplos numéricos

onde

$$\hat{x}(t) := \frac{c_x}{s + \lambda_x} |\omega(t)|, \quad (23)$$

com $c_x, \lambda_x > 0$ constantes que podem ser obtidas utilizando métodos de otimização descritos em (Cunha et al., 2008). De acordo com (Hsu et al., 2003), o termo exponencialmente decrescente $\hat{\pi}$ contabiliza as condições iniciais.

6 Diferenciador MIMO Global baseado em HOSM com Ganhos Dinâmicos

Nesta seção apresenta-se um diferenciador MIMO baseado em HOSM cujos coeficientes são adaptados utilizando a estimativa para a norma do estado x dada na Eq. (22). Obtém-se estimação global e exata, isto é, a diferenciação é exata de sinais com quaisquer condições iniciais e com derivadas de ordem superior possivelmente ilimitadas. Pode-se mostrar que o sistema (2) pode ser transformado para a *forma normal* (Isidori, 1995, p. 224):

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta), \quad (24)$$

$$\dot{\xi}_1^i = \xi_2^i,$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{\rho_i-1}^i = \xi_{\rho_i}^i, \quad (25)$$

$$\dot{\xi}_{\rho_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta),$$

$$y_i = \xi_1^i, \quad (26)$$

para todo $1 \leq i \leq m$, sendo $z^T = [\eta^T \xi^T] \in \mathbb{R}^n$ onde $\eta \in \mathbb{R}^{(n - \sum_{i=1}^m \rho_i)}$ sendo referido como o estado da dinâmica interna ou dinâmica dos zeros e $\xi = [\xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1-1}^1, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{\rho_m-1}^m]^T = [y_1, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}]^T$ é o estado da dinâmica externa. Pela hipótese (A1), pode-se concluir que a dinâmica η é estável uma vez que a planta é de fase mínima. Ainda, os termos $a_{ij}(\xi, \eta)$ e $b_i(\xi, \eta)$ são calculados pela derivada de Lie, tal que $a_{ij}(\xi, \eta) = a_{ij}(x) = \sum_{j=1}^m H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j$ e $b_i(\xi, \eta) = b_i(x) = H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x$, onde $H_p^{[i]}$ representa a i -ésima linha de H_p e $B_p^{[i,j]}$ é o elemento da i -ésima linha e da j -ésima coluna de B_p . Assim, para todo $1 \leq i, j \leq m$, a saída y_i da derivada de ordem ρ_i satisfaz

$$y_i^{(\rho_i)} = H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x + \sum_{j=1}^m H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j. \quad (27)$$

O valor absoluto de $y_i^{(\rho_i)}$ satisfaz

$$\begin{aligned} |y_i^{(\rho_i)}| &= \left| H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x + \sum_{j=1}^m H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j \right| \\ &\leq |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x| + \sum_{j=1}^m |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j| \\ &\leq |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x| + \max_{k=1, \dots, m} \left\{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,k]}| \right\} \sum_{j=1}^m |u_j| \\ &\leq |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x| + m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,k]}| \right\} |u|. \end{aligned} \quad (28)$$

Usando (28), um limitante superior para (27) é

$$|y_i^{(\rho_i)}| \leq \kappa_1^{[i]} |x| + \kappa_2^{[i]} |u|, \quad (29)$$

onde $\kappa_1^{[i]} > |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i}|$ e $\kappa_2^{[i]} > m \max_{k=1, \dots, m} \left\{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,k]}| \right\}$ são constantes conhecidas.

De (29) e (7), pode-se escrever

$$|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq L_{\rho_i}^{[i]}(x, t) = \kappa_1^{[i]} |x| + \kappa_2^{[i]} |u| + |y_{m_i}^{(\rho_i)}(t)|. \quad (30)$$

Assume-se que o controle satisfaz

$$|u| \leq M_\vartheta |\omega(t)| \leq \kappa_4 \|X_t\| + \kappa_5. \quad (31)$$

para constantes $M_\vartheta, \kappa_4, \kappa_5 > 0$. Assim, a partir de (22)–(23), obtém-se o seguinte limitante superior com a variável $\hat{x}(t)$ do observador de norma:

$$|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq \kappa_1^{[i]} (|\hat{x}| + \delta_0) + \kappa_2^{[i]} M_\vartheta |\omega| + |y_{m_i}^{(\rho_i)}(t)|, \quad (32)$$

modulo termos exponencialmente decrescentes devido às condições iniciais, que contabilizam o transitório do FOAF. Definindo-se constantes positivas e conhecidas $k_1^{[i]}, k_2^{[i]}, k_3^{[i]}$ e $\kappa_m^{[i]}$ tal que $\kappa_m^{[i]} \geq |y_{m_i}^{(\rho_i)}(t)|$, $k_1^{[i]} \geq \kappa_1^{[i]}$, $k_2^{[i]} \geq \kappa_1^{[i]} \delta_0 + \kappa_m^{[i]}$ e $k_3^{[i]} \geq \kappa_2^{[i]} M_\vartheta$, define-se

$$\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) := k_1^{[i]} |\hat{x}| + k_2^{[i]} + k_3^{[i]} |\omega|, \quad (33)$$

e obtém-se o seguinte limitante superior utilizando apenas sinais mensuráveis

$$|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t), \quad \forall t \geq T, \quad (34)$$

para algum tempo finito $T > 0$.

A variável de erro S pode ser estimada usando a extensão MIMO do diferenciador global baseado em HOSM proposto em (Levant, 2003), de forma a obter rastreamento exato. A estratégia consiste em empregar um diferenciador baseado em HOSM de ganhos variáveis de ordem $p_i = \rho_i - 1$ para cada saída $e_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_0^{[i]} &= v_0^{[i]} = -\lambda_0^{[i]} \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \left| \zeta_0^{[i]} - e_i(t) \right|^{\frac{p_i}{p_i+1}} \operatorname{sgn}(\zeta_0^{[i]} - e_i(t)) + \zeta_1^{[i]} \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_j^{[i]} &= v_j^{[i]} = -\lambda_j^{[i]} \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \left| \zeta_j^{[i]} - v_{j-1}^{[i]} \right|^{\frac{p_i-j}{p_i-j+1}} \operatorname{sgn}(\zeta_j^{[i]} - v_{j-1}^{[i]}) + \zeta_{j+1}^{[i]}, \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_{p_i}^{[i]} &= -\lambda_{p_i}^{[i]} \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \operatorname{sgn}(\zeta_{p_i}^{[i]} - v_{p_i}^{[i]}), \end{aligned} \quad (35)$$

onde $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ é um ganho variável escolhido de forma que $|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$. O superscrito $^{[i]}$ denota que um determinado parâmetro ou variável se refere ao diferenciador relacionado a e_i .

Escolhendo-se os parâmetros $\lambda_j^{[i]}$ de forma apropriada², as igualdades

$$\zeta_0^{[i]} = e_i(t); \quad \zeta_j^{[i]} = e_i^{(j)}(t), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, p_i$$

são obtidas em tempo finito (Levant, 2003). Assim, utilizando o diferenciador MIMO global baseado em HOSM composto por m diferenciadores de ordem $\rho_j - 1$ para cada saída e_j , a seguinte estimativa para S pode ser obtida:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \zeta_{\rho_1-1}^{[1]} + \dots + l_1^{[1]} \zeta_1^{[1]} + l_0^{[1]} \zeta_0^{[1]} \\ \vdots \\ \zeta_{\rho_m-1}^{[m]} + \dots + l_1^{[m]} \zeta_1^{[m]} + l_0^{[m]} \zeta_0^{[m]} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

²Em particular, uma escolha válida é $p_i \leq 3$: $\lambda_0^{[i]} = 5, \lambda_1^{[i]} = 3, \lambda_2^{[i]} = 1.5, \lambda_3^{[i]} = 1.1$. Mais detalhes podem ser encontrados em (Levant, 2003).

7 BMRAC para plantas de grau relativo arbitrário utilizando diferenciador MIMO baseado em HOSM

Uma extensão do MIMO BMRAC para plantas de grau relativo arbitrário pode ser obtida utilizando o diferenciador MIMO baseado em HOSM com ganhos dinâmicos. Se o HFG não satisfizer a condição PDJ, um multiplicador L pode ser utilizado tal que LK_p seja PDJ. Para incluir esta possibilidade na análise, considera-se o sistema do erro modificado, seguindo os passos de (Yanque et al., 2012)

$$\dot{X}_e = A_K X_e + B_c K_p [u - u^*] \quad (37)$$

$$e_L = L e, \quad (e = H_0 X_e). \quad (38)$$

onde $A_K = A_c - B_c K_p K L H_0$, K é um ganho estático de realimentação de saída e L é escolhido tal que o sistema $\{A_K, B_c K_p, L H_0\}$ satisfaz a condição WSPR do Teorema 1. A lei de adaptação é rescrita

$$\dot{\vartheta}(t) = -\vartheta(t)\sigma - \gamma \Omega(t) \hat{S}_L(t) \quad (39)$$

onde $\hat{S}_L = L \hat{S}$ e \hat{S} é a estimativa exata de S dada em (36) e σ é gerado por uma projeção

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\vartheta| < M_\vartheta \quad \text{ou} \quad \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } |\vartheta| \geq M_\vartheta \quad \text{e} \quad \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad (40)$$

$$\sigma_{eq} = -\frac{\gamma \vartheta^T \Omega \hat{S}_L}{|\vartheta|^2}, \quad (41)$$

e $M_\vartheta > |\vartheta^*|$ é uma constante. Desta forma, a lei de controle pode ser rescrita como

$$u(t) = \theta^T(t) \omega(t) = \Omega^T(t) \vartheta(t). \quad (42)$$

Uma vez que a estimativa exata de \hat{S} é obtida em algum tempo finito T , a compensação de grau relativo é perfeitamente obtida e o MIMO BMRAC pode ser aplicado. O resultado é resumido no teorema a seguir.

Teorema 2 *Considere a planta (2) e o modelo de referência (3), o sistema do erro (7) com lei de adaptação binária dada por (16) e lei de controle (9). Suponha que as hipóteses (A1)-(A4) são satisfeitas e $\|\Theta(0)\| \leq M_\vartheta$ para uma constante $M_\vartheta > \|\Theta^*\|$ e L é um multiplicador passivador conhecido. Para $\lambda_j^{[i]}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, \rho_i - 1$, escolhidos de maneira adequada, $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ e (35) satisfazendo (33), a estimação da variável S^T se torna exata a partir de algum tempo finito, i.e., $\hat{S}^T \equiv S^T$. Assim, o erro em malha fechada com dinâmica descrita por (13) é uniformemente globalmente assintoticamente estável no sentido de que X_e e, conseqüentemente, o erro de rastreamento de saída e converge assintoticamente para zero e todos os sinais são limitados uniformemente em malha fechada. Ainda,*

(i) $\|\Theta(t)\| \leq M_\vartheta$, $\forall t \geq 0$;

(ii) $\|X_e(t)\|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \|X_e(0)\|^2 + \mathcal{O}(\gamma^{-1})$, $\forall t \geq 0$ para constantes positivas c_1 e λ_1 ;

(iii) o erro de rastreamento de saída e o estado do erro de rastreamento X_e tendem assintoticamente para zero.

Prova: No que se segue, todos os $k_i > 0$ são constantes que não dependem das condições iniciais. A demonstração é dividida em duas partes: na primeira, mostra-se que não há escape em tempo finito nos sinais do sistema em malha fechada.

Considera-se a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_\vartheta = \frac{1}{2} \vartheta^T \vartheta. \quad (43)$$

A derivada de (43) sobre as trajetórias de (39) é

$$\dot{V}_\vartheta = (\sigma_{eq} - \sigma) |\vartheta|^2 = 2(\sigma_{eq} - \sigma) V_\vartheta, \quad (44)$$

e tem-se $(\sigma_{eq} - \sigma) \leq 0$ para $|\vartheta| \geq M_\vartheta$, de acordo com (40) e (41). Logo, o conjunto $|\vartheta| \leq M_\vartheta$ é positivamente invariante e, portanto $\dot{\vartheta}^T \vartheta$ é uniformemente limitado por uma constante.

Visto que $\vartheta = \text{vec}(\Theta)$ é uniformemente limitado por uma constante, pode-se concluir que Θ é também uniformemente limitado por uma constante, de forma que $|\Theta| \leq M_\vartheta$. Logo, a lei de controle (42) satisfaz

$$|u| \leq M_\vartheta |\omega(t)| \leq k_7 \|X_t\| + k_8. \quad (45)$$

Tal propriedade é estabelecida considerando que $|\omega| \leq k_9 |X| + k_{10}$ a partir de (10), com $k_9 \geq |\Omega_1|$ e $k_{10} \geq |\Omega_2 r|$, considerando que $r(t)$ é um sinal de referência uniformemente limitado.

De (10) e (12), tem-se que $X = X_e + X_m$ e

$$\omega = \Omega_1 X_e + \Omega_1 X_m + \Omega_2 r, \quad (46)$$

sendo $x_m := [y_{m_1}, \dots, y_{m_1}^{(\rho_1-1)}, \dots, y_{m_m}, \dots, y_{m_m}^{(\rho_m-1)}]^T$ e $x_e := \xi - x_m$, com ξ em (25). Da Eq. (13), pode-se demonstrar que $e_i^{(j)} = H_0^{[i]} A^j X_e$, para $j = 0, \dots, \rho_i - 1$, logo $|x_e| \leq k_0 |X_e|$. Assim, uma vez que x_m é uniformemente limitado, então $\xi = x_e + x_m$ é majorado de forma afim por $|X_e|$. Ainda, conforme (A1), o sistema é de fase mínima e a dinâmica de η é estável. Logo, pode-se concluir que $|x| \leq k_1 \|\xi_t\| + k_2$, e por conseqüente, $|x| \leq k_3 \|(X_e)_t\| + k_4$. Uma vez que $\dot{X}_m = A_c X_m + B_c r$,

$$|X_m| \leq k_5 \|(X_e)_t\| + k_6. \quad (47)$$

E finalmente, das Eqs. (10), (46) e (47), conclui-se que ω em (13), e portanto, o sinal de controle u são majorados de forma afim por X ou X_e , i.e.,

$$|u|, |\omega| \leq k_a \|X_t\| + k_b, \quad (48)$$

$$|u|, |\omega| \leq k_c \|(X_e)_t\| + k_d. \quad (49)$$

Desta forma, os sinais do sistema são regulares e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastrey and Bodson, 1989). Assim, cada ganho dinâmico $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ do diferenciador MIMO satisfaz as seguintes condições para convergência rápida e em tempo finito:

1. O limitante superior global $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}$ é absolutamente contínuo com derivada logarítmica limitada ($|\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]} / \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}| \leq M_i$, para constantes $M_i > 0$) (Levant and Livne, 2012).
2. Inicialmente o ganho variável pode ter um crescimento arbitrário, tal que $\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \geq 0$ resulta em uma convergência mais rápida para o diferenciador (Moreno, 2017)

Este resultado leva à segunda parte da prova. Existem dois instantes de tempo finitos $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$ para os quais as Eqs. (22) e (34) são satisfeitas, $\forall t > \max\{T_1, T_2\}$. Assim, a variável de erro ideal é estimada de forma exata, i.e., $\hat{S} \equiv S$ e a compensação de grau relativo é perfeitamente obtida.

Assim, uma vez que o grau relativo é compensado, a análise de estabilidade é concluída utilizando-se a seguinte função de Lyapunov

$$V = X_e^T P X_e + \text{tr} \left[\frac{1}{\gamma} Z \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} Z^T \right] \quad (50)$$

onde $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não singular tal que $W = Z^T Z$ é positiva definida. Derivando, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -X_e^T Q X_e + 2\hat{S}_L^T Z^T Z \tilde{\Theta}^T \omega + \\ & - \text{tr} \left[2\tilde{\sigma} Z \Theta^T \tilde{\Theta} Z^T \right] - \text{tr} \left[2Z \tilde{\Theta}^T \omega \hat{S}_L^T Z^T \right] \end{aligned} \quad (51)$$

uma vez que $\text{tr}(xy^T) = y^T x$, tem-se $2\hat{S}_L^T W \tilde{\Theta}^T \omega = \text{tr} \left[2Z \tilde{\Theta}^T \omega \hat{S}_L^T Z^T \right]$, logo

$$\dot{V} = -X_e^T Q X_e - 2\tilde{\sigma} \text{tr} \left[\tilde{\Theta} W \Theta^T \right]. \quad (52)$$

Como Θ é uniformemente limitado em norma, $V = X_e^T P X_e + \mathcal{O}(\gamma^{-1})$. Pode-se então obter $\dot{V} \leq -\lambda_1 [V - \mathcal{O}(\gamma^{-1})]$, tal que $\lambda_1 = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$ onde o mínimo e máximo autovalores de $Q = Q^T > 0$ e $P = P^T > 0$ são dados por $\lambda_{\min}(Q)$ e $\lambda_{\max}(P)$, respectivamente, o que resulta na propriedade (ii) utilizando um lema de comparação. Da Eq. (40) e visto que $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$ e $M_\vartheta \geq \|\Theta^*\|_F$ por hipótese, pode-se demonstrar que o termo $-2\tilde{\sigma} \text{tr} \left[\tilde{\Theta} W \Theta^T \right]$ é não positivo. Logo, tem-se que $\dot{V} \leq -X_e^T Q X_e \leq 0$, a partir do qual pode-se demonstrar utilizando o Lema de Barbalat que $X_e(t) \rightarrow 0$ e $\hat{S}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. ■

8 Simulação

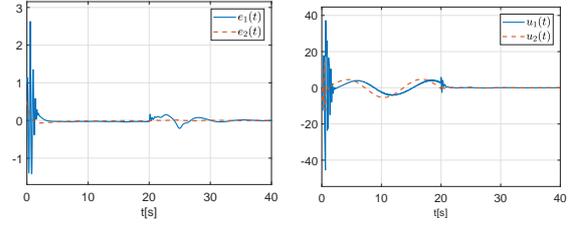
Para ilustrar a estratégia de controle proposta, consideramos uma planta não linear com grau relativo não uniforme ($\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 3$) descrita por (2), com $A_p =$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & H_p = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & \kappa & 3\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ G(s) = & \begin{bmatrix} \frac{\kappa(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+3)} & \frac{\kappa}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{\kappa}{(s-1)(s+1)(s+3)^2} & \frac{\kappa}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \end{aligned}$$

a constante $\kappa \in [4, 10]$ é incerta e $K_p = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de ganho de alta frequência. O sinal de referência e o modelo são escolhidos como $r = [\sin(t) \sin(0.5t)] [\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-20)]$ e $W_m(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2}, \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \right\}$.

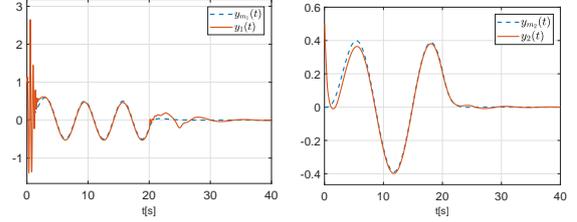
Para realizar as simulações, o parâmetro real κ é definido como 10, enquanto $\kappa^{\text{nom}} = 7$ é escolhido para fins de controle. Para $\kappa^{\text{nom}} = 7$ e $\kappa \in [4, 10]$, segue-se que $|(\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T| \leq 2$. O observador da norma \hat{x} é dado por (23), com $c_x = 1.2 e \lambda_x = 0.1$.

Outros parâmetros de projeto são listados da seguinte maneira: Filtros de Entrada/Saída (8): $\lambda(s) = (s+2)^2$ e $\nu=3$; $L(s) = \text{diag} \{ (s+1), (s+1)^2 \}$; $K_p^{\text{nom}} = K_p$ with $\kappa = 7$; $N_a^{[1]} = s^2 + 2s + 1$, $N_a^{[2]} = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$, $H_a^{[1]} = [2 \ 1]^T$, $H_a^{[2]} = [4 \ 5 \ 2]^T$, $\bar{H}_M^{[1]} = [-1 \ 1]^T$, $\bar{H}_M^{[2]} = [4 \ -2 \ 1]^T$; Diferenciador HOSM (35): $\lambda_0^{[1]} = 1.5$, $\lambda_1^{[1]} = 1.1$ e $\mathcal{L}_{\rho_1}^{[1]}(\hat{x}, t) = 130|\hat{x}| + 10\rho + |y_{m_1}| + 2|\dot{y}_{m_1}| + |r_1|$; $\lambda_0^{[2]} = 3$, $\lambda_1^{[2]} = 1.5$, $\lambda_2^{[2]} = 1.1$ e $\mathcal{L}_{\rho_2}^{[2]}(\hat{x}, t) = 26|\hat{x}| + \rho + 2|y_{m_2}| + 5|\dot{y}_{m_2}| + 4|\ddot{y}_{m_2}| + |r_2|$; note que y_{m_1} , y_{m_2} e suas



(a) Sinais do erro de rastreamento.

(b) Sinais de controle.



(c) Rastreamento em $y_1(t)$.

(d) Rastreamento em $y_2(t)$.

Figura 1: Simulação do B-MRAC com $\gamma = 40$.

respectivas derivadas podem ser encontradas empregando-se uma implementação por espaço de estados do modelo de referência. O limite superior $M_\vartheta = 12$ e o ganho de adaptação é escolhido como $\gamma = 40$. Considera-se as seguintes condições iniciais para a planta: $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0.5$, $\dot{y}_2(0) = -1$, $\ddot{y}_2(0) = 1$. As condições iniciais do sistema restantes são escolhidas como zero. O método de Euler com passo de amostragem $h = 10^{-5}$ é usado para integração numérica.

Os sinais de erro e o desempenho do rastreamento são observados nas Fig. 1(a), 1(c) e 1(d), respectivamente, enquanto os sinais de controle contínuos do B-MRAC são mostrados na Fig. 1(b). É possível notar a convergência rápida e o bom comportamento transitório alcançado com a abordagem B-MRAC proposta, conforme ilustrado na Fig. 3. Ainda, na Fig. 3 é possível observar que $|\vartheta| \leq M_\vartheta$ devido à projeção, isto é, os parâmetros adaptados são mantidos dentro de uma bola de raio M_ϑ .

Nas Figs. 2(a)–2(e) pode-se observar a comparação entre os sinais de erro e suas derivadas com os sinais estimados pelo diferenciador, mostrando uma rápida convergência do parâmetro estimado para o valor real. A comparação dos ganhos dinâmicos com as derivadas dos erros a serem majoradas pode ser vista nas Figs. 2(f)–2(g). A comparação entre a norma do estado e a norma observada é vista na Fig. 2(h).

9 Conclusão

Neste trabalho, apresenta-se um controlador de realimentação de saída para solucionar o problema de rastreamento exato e global para uma classe de plantas multivariáveis com incertezas. Uma extensão multivariável do MRAC Binário (BMRAC) é proposta utilizando a extensão MIMO de um esquema de estimação baseado em diferenciadores globais de tempo finito utilizando ganhos dinâmicos a fim de contornar o obstáculo do grau relativo não uniforme. Uma condição do tipo passividade para a matriz ganho de alta frequência é utilizada de forma a relaxar a necessidade de condições de simetria. Obtém-se estabilidade global exponencial uniforme com convergência final para zero.

Agradecimentos

teste

Referências

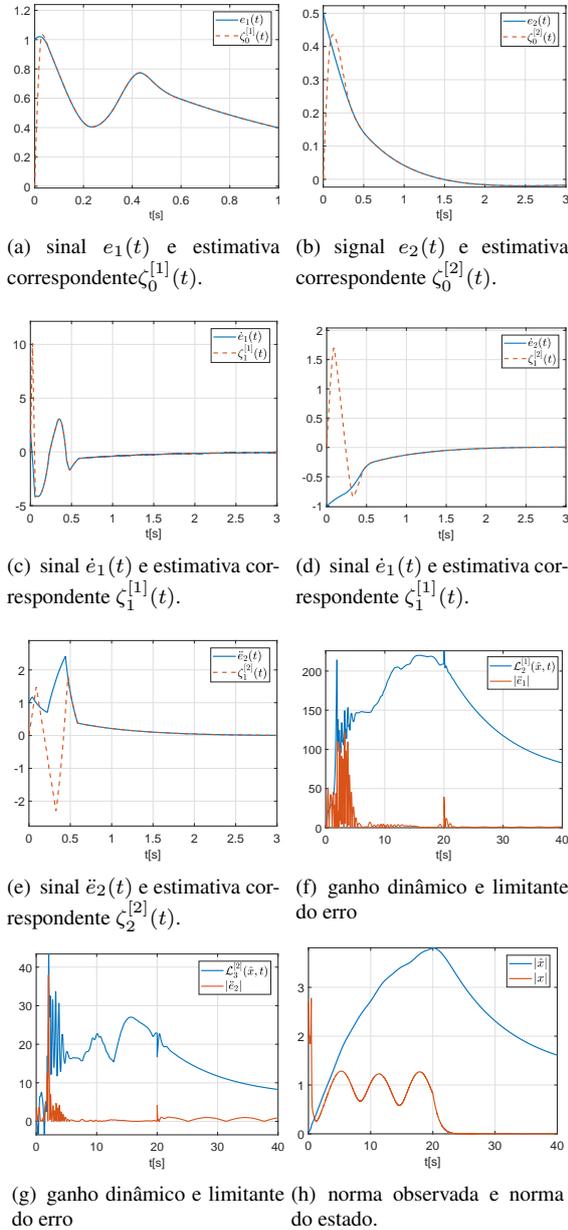


Figura 2: comparação entre sinais de erro e estimativas correspondentes, norma observada e norma do estado obtidas pelo diferenciador HOSM

- Barkana, I., Carvalho, M., Teixeira, M. and Hsu, L. (2006). Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control, *Automatica* **39**(9): 1611–1616.
- Battistel, A., Nunes, E. V. L. and Hsu, L. (2014). Multivariable bmrac extension to arbitrary relative degree using global robust exact differentiators, *Proc. of the 13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, Montreal, pp. 1–6.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. and Hsu, L. (2008). Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems, *IEEE Trans. on Ind. Electronics* **55**(11): 4037–4046.
- Filippov, A. F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side, *American Math. Soc. Translations* **42**(2): 199–231.
- Fradkov, A. L. (2003). Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma, *European Journal of Control* **6**(1): 573–582.
- Hsu, L., Battistel, A. and Nunes, E. V. L. (2014). Multivariable MRAC design without gain symmetry conditions using a stabilizing multiplier, *IEEE Trans. Aut. Contr.*
- Hsu, L. and Costa, R. R. (1994). B-MRAC: Global exponential stability with a new model reference adaptive controller based on binary control theory, *Control-Theory and Advance Technology* **10**(4): 649–668.
- Hsu, L., Costa, R. R. and Cunha, J. P. V. S. (2003). Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems, *Asian Journal of Control* **5**(4): 543–556.
- Hsu, L., Teixeira, M. C. M., Costa, R. R. and Assunção, E. (2011). Necessary and sufficient condition for generalized passivity, passification and application to multivariable adaptive systems, *Proc. of the 18th IFAC World Congress*, Milan.
- Ioannou, P. and Sun, K. (1996). *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*, Springer.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *Int. J. Contr.* **76**(9): 924–941.

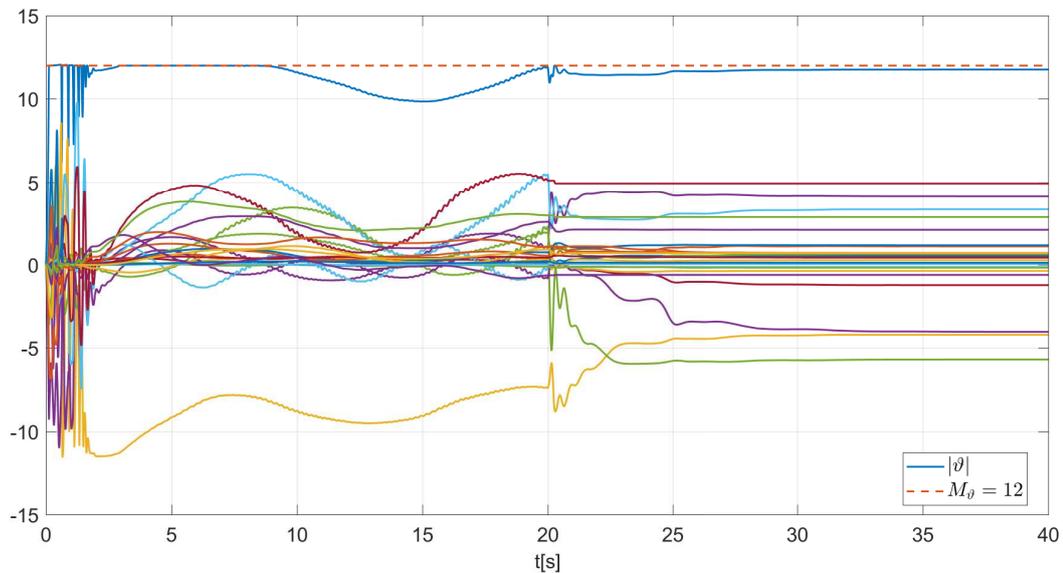


Figura 3: Lei adaptativa baseada em projeção no B-MRAC: parâmetros adaptados (ϑ), norma do parâmetro ($|\vartheta|$), e seu limitante superior (M_{ϑ}).

Levant, A. and Livne, M. (2012). Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **57**(4): 1076–1080.

Moreno, J. A. (2017). Exact differentiator with varying gains, *Int. J. Contr.* .

Nunes, E. V. L., Peixoto, A. J., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2014). Global exact tracking for uncertain MIMO linear systems by output feedback sliding mode control, *Journal of the Franklin Institute* **351**(4): 2015–2032.

Oliveira, T. R., Estrada, A. and Fridman, L. M. (2017). Global and exact hosm differentiator with dynamic gains for output-feedback sliding mode control, *Automatica* **81**(7): 156–163.

Oliveira, T. R., Rodrigues, V. H. P., Estrada, A. and Fridman, L. M. (2017a). Hosm differentiator with varying gains for global/semi-global output feedback, *Proc. of the 20th IFAC World Congress*, Toulouse, pp. 1728–1735.

Oliveira, T. R., Rodrigues, V. H. P., Estrada, A. and Fridman, L. M. (2017b). Output-feedback variable gain super-twisting algorithm for arbitrary relative degree systems, *Int. J. Contr.* .

Rodrigues, V. H. P. and Oliveira, T. R. (2017). Global adaptive hosm differentiators via monitoring functions and hybrid state-norm observers for output feedback, *Int. J. Contr.* .

Sastry, S. S. and Bodson, M. (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.

Tao, G. (2003). *Adaptive Control Design and Analysis*, John Wiley & Sons Inc.

Yanque, I., Nunes, E. V. L., Costa, R. R. and Hsu, L. (2012). Binary mimo mrac using a passifying multiplier - a smooth transition to sliding mode control, *Proc. of the 2012 American Control Conference*, Montreal, pp. 1925–1930.