

BUSCA EXTREMAL BASEADA NO ALGORITMO DE NEWTON PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE DIFUSÃO

TIAGO ROUX OLIVEIRA* , PEDRO ZANETTI DE ALBUQUERQUE*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Email: tiagoroux@uerj.br, pedro.zanetti.albuquerque@gmail.com

Abstract— This paper addresses the design and analysis of fast Newton-based extremum seeking feedback for scalar static maps in cascade with partial equation equation (PDE) dynamics in its actuation path. Although more general classes of PDE-based systems could be envisaged, we concentrated our efforts in handling diffusion PDEs. The proposed adaptive control scheme for real-time optimization follows two basic steps: first, it cancels out the effects of the actuation dynamics in the dither signals, and second, it applies a boundary control for the diffusion process via backstepping transformation. In particular, the diffusion compensator employs perturbation-based (averaging-based) estimates for gradient and Hessian's inverse of the nonlinear-scalar static map to be optimized. The complete stability analysis of the closed-loop system is carried out using Lyapunov's method and applying averaging for infinite-dimensional systems in order to capture the infinite-dimensional state of the actuator model. Local exponential convergence to a small neighborhood of the unknown extremum is guaranteed and verified by means of a numerical example.

Keywords— Extremum seeking, Adaptive control, Backstepping, Averaging theory, Infinite-dimensional systems, Partial differential equations

Resumo— Este artigo aborda o projeto e a análise da busca extremal baseada no método de Newton para mapeamentos estáticos escalares (plantas) em cascata com dinâmica governada por equações diferenciais parciais (EDP's) em seu caminho de atuação. Embora classes mais gerais de sistemas baseados em EDP pudessem ser consideradas, concentramos nossos esforços no problema com EDP's de difusão. O esquema de controle adaptativo proposto para otimização em tempo real segue duas etapas básicas: primeiro, anula os efeitos da dinâmica de atuação nos sinais de perturbação e depois, aplica um controle de fronteira para o processo de difusão via transformação *backstepping*. Em particular, o compensador de difusão emprega estimativas baseadas em perturbações (baseadas na média) para o gradiente e o inverso da hessiana do mapeamento estático não-linear escalar a ser otimizado. A análise de estabilidade completa do sistema em malha fechada é realizada usando o método de Lyapunov e aplicando a teoria da média para sistemas de dimensão infinita, a fim de capturar o estado infinito-dimensional do modelo do atuador. A convergência exponencial local para uma pequena vizinhança do extremo desconhecido é ilustrada por meio de um exemplo numérico.

Palavras-chave— Busca extremal, Controle adaptativo, *Backstepping*, Teoria da média, Sistemas de dimensão infinita, Equações diferenciais parciais

1 Introdução

O objetivo da busca extremal (*Extremum Seeking* – ES) é encontrar a entrada ideal de uma planta dinâmica ou estática desconhecida que conduza a saída mensurável do sistema ao seu valor de extremo desconhecido, usando o método de perturbação ou excitação periódica. Na maioria dos exemplos da bibliografia, existe um mapeamento não-linear que aparece em cascata com algum sistema dinâmico modelado por equações diferenciais ordinárias (EDO's).

Por outro lado, dinâmicas de atuação descritas por sistemas de dimensões infinitas foram introduzidos em diversas aplicações. O exemplo representativo é um sistema sob atrasos, em que a propagação de atraso pode ser descrita por uma equação diferencial parcial (EDP) hiperbólica de primeira ordem (Krstić and Smyshlyaev, 2008a), (Krstić, 2010). Recentemente, a primeira contribuição da aplicação do ES à dinâmica de atuação com dimensões infinitas foi alcançada por (Oliveira et al., 2017) no caso de atrasos de atuadores com tempo conhecido. É apresentado uma prova de estabilidade do sistema em malha fechada e sua convergência para o extremo através do método de *backstepping* de dimensão infinita (Krstić and Smyshlyaev, 2008b).

Outra bem conhecida classe de dinâmica de dimensão infinita é o processo de difusão, que aparece em sistemas biológicos, químicos e econômicos (veja (Edelstein-Keshet, 2005), (Wang et al., 2013)). A compensação do atuador de dinâmica de atuação governado pela EDP de difusão foi estudada em (Krstić, 2009) para estabilização de um sis-

tema linear. No entanto, não há trabalho na literatura que se refira a ES na presença de dinâmica de atuação governada por EDP de difusão, ou generalizando EDP parabólica. Exemplos como otimizar a taxa de produção de um biorreator tubular, onde o modelo é descrito por uma EDP parabólica acoplada com mapeamento estático não-linear (Winkin et al., 2000), (Cognon et al., 2006), (Hudon et al., 2008) tem motivado pesquisas recentes.

Neste artigo, é projetado um ES para mapeamentos estáticos com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão. Em particular, é considerado o algoritmo baseado em Newton (Ghaffari et al., 2012), ao invés do algoritmo baseado em gradiente explorado no artigo complementar (J. Feiling et al., 2018). O algoritmo de Newton oferece vantagens consideráveis uma vez que pode atingir melhor/mais rápida convergência do que o algoritmo baseado em gradiente, com uma velocidade independente da hessiana desconhecida do mapeamento. O compensador para a dinâmica de atuação é projetado através da transformação *backstepping* de dimensão infinita realimentando a estimativa do gradiente e da inversa da hessiana do mapeamento estático a ser maximizado. A equação diferencial de Riccati estima a inversa da hessiana. Computar algebricamente a estimativa direta da inversa da hessiana é suscetível à singularidade, enquanto que empregar o filtro Riccati remove essa possibilidade.

A análise de estabilidade é realizada de tal forma que o sistema alvo transformado associado ao sistema em malha fechada é exponencialmente estável. Então, o teorema da média para sistemas de dimensão infinita é aplicado com

sucesso à EDP parabólica do sistema médio via análise de semigrupos, enquanto que em (Oliveira et al., 2017) o sistema foi descrito como uma equação diferencial funcional (*Functional Differential Equation* – FDE). Por fim, a convergência para uma pequena vizinhança do extremo é provada. Simulações numéricas são realizadas para ilustrar as propriedades de estabilidade e convergência do sistema em malha fechada.

1.1 Notação

Nós denotamos as derivadas parciais de uma função $u(x,t)$ como $\partial_x u(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$, $\partial_t u(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$. A segunda norma de um vetor de estado de dimensão finita (EDO) $\vartheta(t)$ é denotado por barras simples $|\vartheta(t)|$. Em contraste, normas de funções (de x) são denotadas por barras duplas. Nós denotamos a norma espacial $\mathcal{L}_2[0,D]$ do estado $u(x,t)$ de uma EDP como $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2([0,D])}^2 := \int_0^D u^2(x,t)dx$, onde, na sequência, nós descartamos o índice $\mathcal{L}_2([0,D])$, portanto, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0,D])}$, se não for especificado de outra forma. Como definido em (Khalil, 1996), um vetor função $f(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ é dito ser de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ em um intervalo $[t_1, t_2]$, se $\exists k, \bar{\varepsilon} : |f(t,\varepsilon)| \leq k\varepsilon, \forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Na maioria dos casos nós não damos estimativa da constante k e $\bar{\varepsilon}$, então $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pode ser interpretada como uma relação de ordem de magnitude para ε suficientemente pequeno.

2 Declaração do problema

2.1 Busca extremal básica

Como introduzido, o controle por busca extremal (*Extremum Seeking Control* – ESC) baseado em Newton para mapeamentos estáticos é um esquema de controle de otimização em tempo real, onde o objetivo é encontrar e manter o ponto ótimo de um mapeamento estático desconhecido não-linear $Q(\cdot)$ com a saída ótima desconhecida y^* , com o otimizador desconhecido θ^* e com saída y e entrada θ mensuráveis. Sem perda de generalidade, consideramos os problemas de maximização. O método de perturbação senoidal (Khalil, 1996) é a peça chave da busca extremal (Ariyur and Krstić, 2003; Krstić and Wang, 2000), de modo que o parâmetro de entrada do mapeamento estático θ varie para estimar o gradiente G do mesmo. Portanto, o sinal aditivo de perturbação ou *dither* escolhido como

$$S(t) = a \sin(\omega t), \quad (1)$$

com amplitude de perturbação a e frequência ω , é adicionado a estimação do otimizador θ^* , dado por $\hat{\theta}$. O sinal multiplicativo de perturbação ou *dither* para estimar o gradiente do mapeamento estático é escolhido como

$$M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (2)$$

A idéia de escolher os sinais de perturbação como (1) e (2) é para alcançar o sinal médio da estimativa do gradiente G dada por $G_{av}(t) = H \hat{\theta}_{av} = H(\hat{\theta}_{av} - \theta^*)$, onde H é a hessiana desconhecida negativa do mapeamento estático e $\hat{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ é o erro da estimativa. Isso resulta na dinâmica do erro médio $\hat{\theta}_{av} = KH \hat{\theta}_{av}$, com ganho de adaptação $K > 0$. O sistema médio é exponencialmente estável e exponencial estável em relação a um pequeno conjunto residual.

No entanto, a taxa de convergência depende da hessiana H desconhecida. Esta fraqueza do algoritmo ES baseado em gradiente é removida com o ES baseado em Newton. Resumidamente, uma excitação multiplicativa denotada

por $N(t)$ é introduzida para gerar a estimativa da hessiana H como $\hat{H}(t) = N(t)y(t)$ (Ghaffari et al., 2012). De acordo com (Ghaffari et al., 2012), um filtro de Riccati inverte a estimativa da hessiana e anula o termo H da taxa de convergência, tornando-o passível de atribuição pelo usuário. Uma visão geral das versões de gradiente e Newton do ES pode ser encontrada em (Krstić, 2014).

2.2 Dinâmica de atuação e saída

Consideramos dinâmica de atuação, as quais são descritas por um processo de difusão, por exemplo, a equação do calor com atuador $\theta(t)$ e o atuador de propagação $\Theta(t)$ dado por

$$\Theta(t) = \alpha(0,t) \quad (3)$$

$$\partial_t \alpha(x,t) = \partial_{xx} \alpha(x,t), \quad x \in [0,D] \quad (4)$$

$$\partial_x \alpha(0,t) = 0 \quad (5)$$

$$\alpha(D,t) = \theta(t), \quad (6)$$

onde o comprimento D do domínio é conhecido. A medida é definida pela entrada do mapeamento estático desconhecido (3), tal que

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (7)$$

Por uma questão de simplicidade assumimos o seguinte:

Hipótese 1 *O mapeamento estático não-linear desconhecido é quadrático, por exemplo,*

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \quad (8)$$

onde além da constante $\Theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$ comecem desconhecidos, o $H < 0$ escalar é a hessiana desconhecida do mapeamento estático.

Consequentemente, a saída do mapeamento estático é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \quad (9)$$

Combinando a dinâmica de atuação acima e o esquema básico do ESC, adaptando ainda mais o esquema proposto em (Oliveira et al., 2017), o ES em malha fechada com dinâmica de atuação governada por um sistema de EDP de difusão sob controlador de compensação de difusão desconhecido é mostrado na Figura 1.

2.3 Sistema e sinais

Como no esquema básico do controle por busca extremal, definimos a entrada ótima desconhecida θ^* de $\theta(t)$ com respeito ao mapeamento estático e ao processo de difusão, com a relação $\Theta^* = \theta^*$. Como nosso objetivo é achar a entrada ótima desconhecida θ^* , definimos o erro de estimação

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (10)$$

onde $\hat{\theta}(t)$ é a estimação de θ^* . Para tornar (10) relevante com o otimizador do mapeamento estático Θ^* , apresentamos o erro de estimação propagado $\vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*$ através do domínio de difusão

$$\vartheta(t) := \tilde{\alpha}(0,t) \quad (11)$$

$$\partial_t \tilde{\alpha}(x,t) = \partial_{xx} \tilde{\alpha}(x,t), \quad x \in [0,D] \quad (12)$$

$$\partial_x \tilde{\alpha}(0,t) = 0 \quad (13)$$

$$\tilde{\alpha}(D,t) = \tilde{\theta}(t). \quad (14)$$

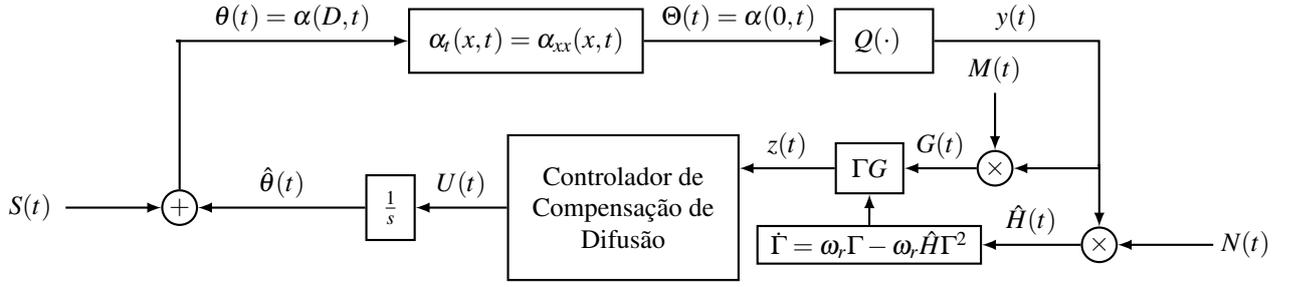


Figura 1: Malha de controle por busca extremal baseada em Newton com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão.

Da malha de controle na figura 1 temos

$$\hat{\theta}(t) = U(t). \quad (15)$$

Tomando o a derivada do tempo de (11)-(14) e com ajuda de (10) e (15), a dinâmica do erro propagada pode ser escrita como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0,t), \quad (16)$$

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), \quad x \in [0,D] \quad (17)$$

$$\partial_x u(0,t) = 0, \quad (18)$$

$$u(D,t) = U(t), \quad (19)$$

onde $u(x,t) := \bar{\alpha}_t(x,t)$ e $\dot{\theta}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t)$, desde que θ^* seja constante. Como na busca extremal sem atuação através do domínio de difusão, o sinal de perturbação $S(t)$ deve somar $a \sin(\omega t)$ em $\Theta(t)$, portanto compensa o processo de difusão. Consequentemente, $a \sin(\omega t)$ com amplitude de perturbação a e frequência ω é aplicada como segue:

$$S(t) := \beta(D,t) \quad (20)$$

$$\partial_t \beta(x,t) = \partial_{xx} \beta(x,t), \quad x \in [0,D] \quad (21)$$

$$\partial_x \beta(0,t) = 0 \quad (22)$$

$$\beta(0,t) = a \sin(\omega t). \quad (23)$$

Equação (20)-(23) descreve um problema de geração de trajetória como em (Krstić and Smyshlyaev, 2008b). A solução explícita de (20) é dada por

$$S(t) = \frac{1}{2} a e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}} D} \sin\left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2}} D\right) + \frac{1}{2} a e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}} D} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}} D\right). \quad (24)$$

A relação entre o erro de estimação propagado $\vartheta(t)$, a entrada propagada $\Theta(t)$, e o otimizador do mapeamento estático Θ^* é dada por

$$\vartheta(t) + a \sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*, \quad (25)$$

que pode ser facilmente comprovado, considerando $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ juntamente com as soluções de (3)-(6), (11)-(14) e (20)-(23). Nos falta definir o sinal de perturbação $N(t)$ que é usado para estimar a hessiana, multiplicando-o pela saída $y(t)$ do mapeamento estático. (Ghaffari et al., 2012), descreve a estimativa da hessiana como

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad \text{com} \quad N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (26)$$

Observe que o sinal de perturbação $M(t)$, para estimar o gradiente, é o mesmo que no controle por busca extremal básico (veja (2)), tal que

$$G(t) = M(t)y(t). \quad (27)$$

Definimos o sinal

$$z(t) = \Gamma(t)G(t). \quad (28)$$

onde Γ é atualizada de acordo com a seguinte equação diferencial de Riccati (Ghaffari et al., 2012):

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \hat{H} \Gamma^2 \quad (29)$$

com $\omega_r > 0$ sendo uma constante projetada. A equação (29) possibilita que seja gerada a estimativa da inversa da hessiana, evitando inversões da estimativa da hessiana que sejam zero durante o período de transiente. A estimativa do erro da inversa da hessiana pode ser definido como

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1} \quad (30)$$

e sua equação dinâmica é escrita de (29) e (30) como

$$\dot{\tilde{\Gamma}}(t) = \omega_r (\tilde{\Gamma} + H^{-1}) [1 - \hat{H} (\tilde{\Gamma} + H^{-1})]. \quad (31)$$

3 Sistema de controle em malha fechada

3.1 Controlador de compensação de difusão

Consideramos a cascata de EDP-EDO (16)-(19). Como em (Krstić, 2009) usamos a transformação *backstepping*

$$w(x,t) = u(x,t) - \int_0^x q(x,y)u(y,t)dy - \gamma(x)\vartheta(t), \quad (32)$$

com o ganho kernels

$$q(x,y) = \bar{K}(x-y) \quad \text{e} \quad \gamma(x) = \bar{K}, \quad (33)$$

que transformam (16)-(19) no sistema alvo

$$\dot{\vartheta}(t) = \bar{K}\vartheta(t) + w(0,t) \quad (34)$$

$$\partial_t w(x,t) = \partial_{xx} w(x,t), \quad x \in [0,D] \quad (35)$$

$$\partial_x w(0,t) = 0 \quad (36)$$

$$w(D,t) = 0, \quad (37)$$

com $\bar{K} < 0$. Como o sistema alvo (34)-(37) é exponencialmente estável (veja (Krstić, 2009)), o controlador que compensa o processo de difusão pode ser obtido através da avaliação da transformação *backstepping* (32) para $x = D$ como

$$U(t) = \bar{K}\vartheta(t) + \bar{K} \int_0^D (D-y)u(y,t)dy. \quad (38)$$

No entanto, a lei de controle proposta em (38) não é diretamente aplicável, porque não temos medição de $\vartheta(t)$. Assim sendo, introduzimos um importante resultado de (Ghaffari

et al., 2012): a versão média do gradiente (27) e a estimativa da hessiana (26) são calculadas para

$$G_{av}(t) = H\vartheta_{av}(t), \quad \hat{H}_{av} = H, \quad (39)$$

se um mapeamento quadrático como em (8) for considerado. Para a prova de (39) veja (Ghaffari et al., 2012). Além disso, de (39) e $z(t)$ de (28), podemos verificar que

$$z_{av}(t) = \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi \Gamma M(\lambda) y d\lambda = \Gamma_{av}(t) H \vartheta_{av}(t), \quad (40)$$

onde $\Pi := 2\pi/\omega$, $\Gamma_{av}(t)$ e $\vartheta_{av}(t)$ representa a versão média de $\Gamma(t)$ e $\vartheta(t)$, respectivamente. Então, a equação (40) pode ser escrita em termos de $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = \Gamma_{av}(t) - H^{-1}$ como

$$z_{av}(t) = \vartheta_{av}(t) + \tilde{\Gamma}_{av}(t) H \vartheta_{av}(t). \quad (41)$$

O segundo termo do lado direito de (41) é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{av}, \vartheta_{av})$, conseqüentemente, a linearização de $\Gamma_{av}(t)$ em H^{-1} resulta na versão linearizada de (40) dada por

$$z_{av}(t) = \vartheta_{av}(t). \quad (42)$$

Em relação a (39), tiramos a média de (38) e escolhemos $\bar{K} = -K$ com $K > 0$ e a hessiana H desconhecida do mapeamento estático, tal que

$$U_{av}(t) = -KH\vartheta_{av}(t) - K \int_0^D (D - \sigma) u_{av}(\sigma, t) d\sigma. \quad (43)$$

Conseqüentemente, aplicando a estimativa da média do gradiente e da hessiana (39) em (43), obtemos

$$U_{av}(t) = -Kz_{av}(t) - K \int_0^D (D - \sigma) u_{av}(\sigma, t) d\sigma. \quad (44)$$

Devido a razões técnicas na aplicação do teorema da média para sistemas de dimensão infinita (Hale et al., 1990) na prova de estabilidade que segue, introduzimos um filtro passa baixa no controlador. Finalmente, temos a lei de controle de dimensão infinita média para compensar o processo de difusão

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[z(t) + \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (45)$$

onde $c > 0$ é escolhido posteriormente. Para conveniência de notação, misturamos o domínio de tempo e frequência em (45), onde o filtro passa baixa atua como um operador $\{\cdot\}$.

3.2 Sistema em malha fechada

Primeiramente, colocando (25) em (9), tal que a saída do mapeamento estático seja dada em termos de $\vartheta(t)$, temos

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2} (\vartheta(t) + a \sin(\omega t))^2. \quad (46)$$

Continuamos inserindo (46) no gradiente (27) e na estimativa da hessiana (26) e depois as equações resultantes na lei de controle baseada na média (45), com isso obtemos

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[y^* + \frac{H}{2} \vartheta^2(t) + Ha \sin(\omega t) \vartheta(t) + \frac{Ha^2}{2} \sin^2(\omega t) \right] \times \left[\Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) \right] - K \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \quad (47)$$

Finalmente, substituindo (47) em (19), podemos escrever o sistema em malha fechada (16) - (19) como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (48)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (49)$$

$$\partial_x u(0, t) = 0, \quad (50)$$

$$u(D, t) = \dots$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[y^* + \frac{H}{2} \vartheta^2(t) + Ha \sin(\omega t) \vartheta(t) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \times \left[\Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) \right] - K \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[\Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \vartheta^2(t) \sin(\omega t) + 2\Gamma(t) H \sin^2(\omega t) \vartheta(t) + \Gamma(t) a H \sin^3(\omega t) + \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[\Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \vartheta^2(t) \sin(\omega t) + \Gamma(t) H \vartheta(t) - \Gamma(t) H \cos(2\omega t) \vartheta(t) + \frac{3aH}{4} \Gamma(t) \sin(\omega t) - \frac{aH}{4} \Gamma(t) \sin(3\omega t) + \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (51) \end{aligned}$$

4 Análise de estabilidade e convergência

O seguinte teorema sumariza a propriedade de estabilidade e convergência do sistema em malha fechada (48)-(51) e é provado nesta seção.

Teorema 1 *Considere o sistema da Fig. 1 com o sistema dinâmico sendo representado pelo mapeamento não-linear quadrático (9) em cascata com a dinâmica de atuação governada pela EDP de difusão em (3) - (6). Para $c > 0$ suficientemente grande, existe algum $\bar{\omega}(c) > 0$, tal que $\forall \omega > \bar{\omega}$, o sistema em malha fechada (31) e (48)-(51) com estados $\tilde{\Gamma}(t)$, $\vartheta(t)$, $u(x, t)$, tenha uma única solução exponencialmente estável periódica em t de período $\Pi := 2\pi/\omega$, determinada por $\tilde{\Gamma}^\Pi(t)$, $\vartheta^\Pi(t)$, $u^\Pi(x, t)$, satisfazendo $\forall t \geq 0$:*

$$\left(\left| \tilde{\Gamma}^\Pi(t) \right|^2 + \left| \vartheta^\Pi(t) \right|^2 + \left\| u^\Pi(t) \right\|^2 + \left\| \partial_x u^\Pi(t) \right\|^2 + \left| u^\Pi(D, t) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (52)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O} \left(|a| e^{\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega \right), \quad (53)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega), \quad (54)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2). \quad (55)$$

Prova: Estruturada do **Passo 1** ao **6** abaixo.

Passo 1: Sistema em malha fechada médio

A versão média do sistema (48)-(51) para ω grande é

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (56)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_{xx} u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (57)$$

$$\partial_x u_{av}(0, t) = 0 \quad (58)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) - cK \left[\underbrace{\Gamma_{av}(t) H \vartheta_{av}(t)}_{z_{av}(t)} + \int_0^D (D - \sigma) u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (59)$$

onde o filtro passa baixa é representado no espaço de estado. Aplicando-se a teoria da média, podemos descrever (60)-(63), onde os termos em (51) dependentes das funções seno e cosseno com argumento $k\omega (= k2\pi/\Pi)$ tem média zero para $k = 1, \dots, 4$, e portanto são feitos iguais a zero.

De (40), (41) e (42), a versão média linearizada (local) do sistema (56)–(59) para ω suficientemente grande é

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (60)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_{xx} u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (61)$$

$$\partial_x u_{av}(0, t) = 0 \quad (62)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) - cK \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^D (D - \sigma) u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (63)$$

Por outro lado, o modelo médio para o erro de estimação da inversa da hessiana em (31) é

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t) - \omega_r H \tilde{\Gamma}_{av}^2(t), \quad (64)$$

como

$$\hat{H}_{av} = \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi N(\lambda) y d\lambda = H, \quad (65)$$

e sua versão linearizada envolta de $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = 0$ é dada por

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t), \quad (66)$$

que é exponencialmente estável para $\omega_r > 0$.

Passo 2: Transformação backstepping no sistema alvo

A transformação backstepping (veja (Krstić, 2009))

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - KH \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^x (x - y) u_{av}(y, t) dy \right] \quad (67)$$

mapeia o sistema em malha fechada médio (60)-(63) no sistema alvo exponencialmente estável (estabilidade mostrada no Passo 3)

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = -K \vartheta_{av}(t) + w(0, t) \quad (68)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_{xx} w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (69)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0 \quad (70)$$

$$\partial_t w(D, t) = -c w(D, t) + K w(D, t) - K^2 \left[\int_0^D (e^{-K(D-\sigma)} - 1) w(\sigma, t) d\sigma + e^{-KD} \vartheta_{av}(t) \right]. \quad (71)$$

O sistema alvo (68)-(71) pode ser descrito através da aplicação da transformada backstepping inversa (veja (Krstić, 2009))

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) - K e^{-Kx} \vartheta_{av}(t) - K \int_0^x (e^{-K(x-\sigma)} - 1) w(\sigma, t) d\sigma, \quad (72)$$

no sistema em malha fechada médio (60)-(63). Adicionalmente tomando-se a derivada do tempo da transformação backstepping (67) junto com (63) e sua inversa (72), chegamos a (71).

Passo 3: Estabilidade exponencial do sistema alvo

Considere a função Lyapunov-Krasovskii

$$\Upsilon(t) = \frac{\vartheta_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{b}{2} \|\partial_x w(t)\|^2 + \frac{d}{2} w^2(D, t), \quad (73)$$

onde $a, b, d > 0$ serão escolhidos adiante. Definimos $\lambda := -K$ com $\lambda > 0$. Calculando a derivada do tempo de (73), associada com a solução do sistema alvo (68)-(71) e com ajuda da integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) = & -\lambda \vartheta_{av}^2(t) + \vartheta_{av}(t) w(0, t) \\ & + a w(D, t) \partial_x w(D, t) - a \|\partial_x w(t)\|^2 \\ & + b \partial_x w(D, t) \partial_t w(D, t) - b \|\partial_{xx} w(t)\|^2 \\ & + d w(D, t) \partial_t w(D, t). \end{aligned} \quad (74)$$

Aplicando as desigualdades de Young, Poincare, Agmon e Cauchy-Schwarz em (74) e considerando que $a = (c - \lambda)/(8D\lambda^3)$, $b = 1/(8D\lambda^3)$, $d = 1$, temos

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) \leq & -\frac{\lambda}{4} \vartheta_{av}^2(t) + (c_1^* - c) w^2(D, t) \\ & + (c_2^* - c) \|\partial_x w(t)\|^2 - \frac{1}{32D\lambda^3} \|\partial_{xx} w(t)\|^2, \end{aligned} \quad (75)$$

com

$$\begin{aligned} c_1^* = & \frac{3}{2} \lambda^3 + \lambda + \frac{1+2D}{\lambda} + 2D\lambda \|e^{-\lambda(D-y)} - 1\|^2, \quad (76) \\ c_2^* = & \lambda + 8D\lambda^3 \left[\frac{4D^2+1}{\lambda} + 4D^2\lambda \|e^{-\lambda(D-y)} - 1\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

Aplicando a desigualdade de Poincare

$$\|\partial_x w(t)\|^2 \leq 2D \partial_x w(0, t)^2 + 4D^2 \|\partial_{xx} w(t)\|^2, \quad (78)$$

ao ultimo termo em 75, e lembrando que $\partial_x w(0, t) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) \leq & -\frac{\lambda}{4} [\vartheta_{av}(t)]^2 - (c - c_1^*) w^2(D, t) \\ & - (c - c_2^*) \|\partial_x w(t)\|^2 - \frac{1}{128D^3\lambda^3} \|\partial_{xx} w(t)\|^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré (segundo caso) (Krstić and Smyshlyaev, 2008b)

$$\|w(t)\|^2 \leq 2w(D, t)^2 + 4D^2 \|\partial_x w(t)\|^2, \quad (80)$$

ao termo resultante $-\frac{1}{128D^3\lambda^3} \|\partial_{xx} w(t)\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) \leq & -\frac{\lambda}{4} [\vartheta_{av}(t)]^2 - \frac{1}{512D^5\lambda^3} \|w(t)\|^2 \\ & - (c - c_3^*) \|\partial_x w(t)\|^2 - (c - c_3^*) w^2(D, t). \end{aligned} \quad (81)$$

com $c_3^* = c_1^* + \frac{1}{256D^5\lambda^3}$. Consequentemente, de (75), se c é escolhido tal que $c > \max\{c_1^*, c_2^*\}$, obtemos para $\mu > 0$

$$\dot{\Upsilon}(t) \leq -\mu\Upsilon(t). \quad (82)$$

Então, o sistema alvo (68)-(71) é exponencialmente estável no sentido da norma \mathcal{H}_1

$$\left(\vartheta_{av}^2(t) + \|w(t)\|^2 + \|\partial_x w(t)\|^2 + w^2(D, t)\right)^{1/2}, \quad (83)$$

isto é, na variável transformada (ϑ_{av}, w) .

Passo 4: Estimativa da estabilidade exponencial (\mathcal{H}_1) do sistema em malha fechada médio

Definimos

$$\Psi(t) = \vartheta_{av}^2(t) + \|u_{av}(t)\|^2 + \|\partial_x u_{av}(t)\|^2 + u_{av}^2(D, t). \quad (84)$$

Em seguida, existe um limite superior e inferior do funcional Lyapunov-Krasovskii (73) em relação a $\Psi(t)$, de modo que

$$\underline{\rho}\Psi(t) \leq \Upsilon(t) \leq \bar{\rho}\Psi(t), \quad \text{com} \quad \underline{\rho} = \underline{\tau}\bar{\sigma}, \quad \bar{\rho} = \bar{\tau}\bar{\sigma}, \quad (85)$$

com

$$\underline{\sigma} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\}, \quad \bar{\sigma} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\}, \quad (86)$$

$\underline{\tau}$ e $\bar{\tau}$ apropriados (Krstić and Smyshlyaev, 2008b). A equação (85), junto com a estabilidade exponencial do sistema alvo (82), implica

$$\Psi(t) \leq \frac{\bar{\rho}}{\underline{\rho}} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (87)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial do sistema em malha fechada médio (60)-(63) no sentido da norma \mathcal{H}_1 $\Psi^{1/2}(t)$ na variável (ϑ_{av}, u_{av}) .

Passo 5: Invocando o teorema da média para sistemas de dimensões infinitas

O teorema da média para sistemas de dimensões infinitas (Hale et al., 1990) reivindica que alguns pressupostos sejam satisfeitos. O sistema em malha fechada deve estar na forma

$$\dot{Z}(t) = FZ(t) + J(\omega t, Z(t)), \quad (88)$$

onde $Z(t) \in \mathcal{X} := \mathcal{H}_1([0, D])$ é o vetor de estado de dimensão infinita. F gera um semigrupo analítico. E, além disso, a não-linearidade $J: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ com $t \mapsto J(t, Z)$ é diferenciável Fréchet em Z , fortemente contínuo e periódico em t , uniformemente com respeito a Z no conjunto compacto de \mathcal{X} . Pela transformação de estado de (48) - (51) com $v(x, t) = u(x, t) - U(t)$, obtemos no sistema em malha fechada com condições de fronteira homogêneas

$$\dot{\vartheta}(t) = v(0, t) + U(t) \quad (89)$$

$$\partial_t v(x, t) = \partial_{xx} v(x, t) - \phi(\vartheta, v, U, t), \quad x \in [0, D] \quad (90)$$

$$\partial_x v(0, t) = 0 \quad (91)$$

$$v(D, t) = 0 \quad (92)$$

$$\dot{U}(t) = \phi(\vartheta, v, U, t), \quad (93)$$

com

$$\phi(\vartheta, v, U, t) = -cU(t) - cK \left[z(t) + \int_0^D (D - \sigma)(v(\sigma, t) + U(t)) d\sigma \right]. \quad (94)$$

Em seguida escrevemos o sistema de EDP (90)-(92) na forma de uma equação evolucionária (veja (Lunardi, 1995)) no espaço Banach \mathcal{X}

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}V(t) - \tilde{\phi}(\vartheta, V, U, t), \quad t > 0, \quad (95)$$

onde $V(t)$ é a função que pertence ao espaço Banach \mathcal{X} . Além disso, \mathcal{A} é a realização da derivada de segunda ordem com uma condição de limite Dirichlet e Neumann em \mathcal{X} com

$$\mathcal{A}\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (96)$$

e o domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{X} : \varphi, \frac{d}{dx}\varphi \in \mathcal{X} \text{ é a.c.}, \frac{d^2}{dz^2}\varphi \in \mathcal{X}, \frac{d}{dz}\varphi(0) = 0, \varphi(D) = 0 \right\}, \quad (97)$$

onde a.c. significa absoluto contínuo. Para expressar $v(0, t)$ na EDO (89) em termos de $V(t)$, apresentamos o operador linear de limite $\mathcal{B}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{B}V(t) := v(0, t). \quad (98)$$

Além disso, definimos os operadores lineares $\alpha^\top: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ como

$$\alpha^\top V(t) := \int_0^D (D - \sigma)v(\sigma, t) d\sigma,$$

$$\beta\zeta := [\beta_1, \beta_2, \dots]^\top \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}$$

$$\text{com} \quad \beta_k = \int_0^D \psi_k(x) dx$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{D}} \frac{2D}{\pi(2k-1)} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (99)$$

onde $\psi_k(x) = \sqrt{2/D} \cos(\pi/2(2k-1)x/D)$, $k = 1, 2, \dots$, são autofunções de \mathcal{A} . Finalmente, o sistema em malha fechada com vetor de estado de dimensão infinita $Z(t) = [\vartheta(t) V(t) U(t)]^\top$ pode ser reescrito como (88) com

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B} & 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A} & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_r \end{bmatrix}, \quad (100)$$

$$J(\omega t, Z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -c\beta K [z(t) + g(Z)] \\ -cK [z(t) + g(Z)] \\ \omega_r H^{-1} - \omega_r \hat{H}(t) (\tilde{\Gamma} + H^{-1})^2 \end{bmatrix}, \quad (101)$$

onde $g(Z) = \frac{1}{2}D^2U(t) + \alpha^\top V(t)$. Como \mathcal{A} é um operador setorial, por consequência gera um semigrupo analítico (Pazy, 2012), \mathcal{B} é limitado por \mathcal{A} ($\|\mathcal{B}V(t)\| \leq 4D\sqrt{D}\|\mathcal{A}V(t)\|$) e β , c , ω_r são limitados, F gera um semigrupo analítico através do teorema do operador matricial em (Nagel, 1989). Além disso, $J(\omega t, Z)$ em (100) é diferenciável Fréchet em Z , fortemente contínuo e periódico em t , uniformemente com respeito a Z . Portanto, todos os pressupostos para aplicar o teorema de média para sistemas de dimensões infinitas em (Hale et al., 1990) estão satisfeitos e o sistema em malha fechada médio é exponencialmente estável. Assim, o sistema em malha fechada original (48)-(51) tem uma solução exponencialmente estável periódica $Z^\Pi(t)$ que satisfaz (52).

Passo 6: Convergência para região de extremo

Aplicando a desigualdade de Agmon, Poincaré e Young no LHS de (11), junto com (11)-(14), temos

$$\tilde{\theta}^2(t) \leq 3\vartheta(t)^2 + (4D+1)\|\tilde{\alpha}_x\|^2. \quad (102)$$

Tomando a derivada do tempo de $\tilde{Y}(t) = \frac{\mu}{16D}\|\tilde{\alpha}_x(t)\|^2 + \frac{1}{2}\vartheta^2(t) + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x(t)\|^2 + \frac{1}{2}U(t)^2$ junto com a estabilidade exponencial do sistema original, sustenta-se que $\dot{\tilde{Y}} \leq -\mu \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{64D^3}\right\}\tilde{Y}$ com $\mu > 0$. Por isso, existe algum $M > 0$, tal que

$$\|\tilde{\alpha}_x(t)\|^2 \leq Me^{-kt} \text{ com } k = \mu \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{64D^3}\right\}. \quad (103)$$

Com (102) e (103) temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{3|\vartheta(t)|^2\right\}. \quad (104)$$

Igualmente, (104) pode ser escrito em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$ como segue

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{3|\vartheta(t) + \vartheta^\Pi(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2\right\}. \quad (105)$$

Ao aplicar a desigualdade de Young, detemos $|\vartheta(t) + \vartheta^\Pi(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 \leq \sqrt{2}(|\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 + |\vartheta^\Pi(t)|^2)$ e pelo teorema da média (Hale et al., 1990), temos $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Por isso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{3\sqrt{2}|\vartheta^\Pi(t)|^2\right\}. \quad (106)$$

Juntamente com (52) e (106), obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega). \quad (107)$$

Uma vez que $\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)$ de (10) e Figura 1 e $S(t)$ é da ordem $\mathcal{O}\left(|a|e^{\sqrt{\omega}/2}\right)$, como mostrado em (24), finalmente chegamos a (107)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}\left(|a|e^{\sqrt{\omega}/2} + 1/\omega\right). \quad (108)$$

A convergência do atuador propagado $\Theta(t)$ para o otimizador Θ^* é muito mais fácil de provar. Usando (25) e tomando o valor absoluto, tem-se

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a \sin(\omega(t))|. \quad (109)$$

Da mesma forma como provamos da convergência do parâmetro $\theta(t)$ para a entrada ótima θ^* , podemos escrever (109) em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$ e então seguimos os mesmos passos aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente a medida que $t \rightarrow \infty$ pelo teorema da média (Hale et al., 1990). Assim, juntamente com (52), finalmente conseguimos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega). \quad (110)$$

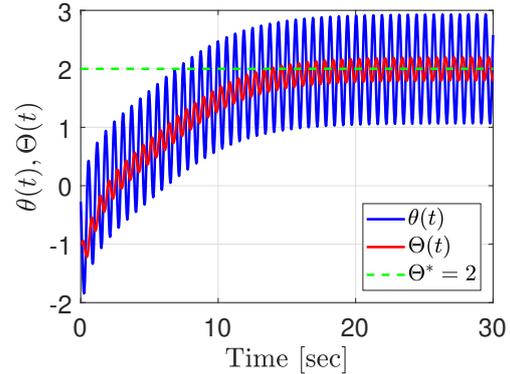
Para mostrar a convergência da saída $y(t)$ do mapeamento estático para o valor ótimo y^* , substituímos $\Theta(t) - \Theta^*$ em (9) por (25) e tomamos o valor absoluto

$$|y(t) - y^*| = \left| \frac{H}{2} [\vartheta(t) + a \sin(\omega(t))]^2 \right|. \quad (111)$$

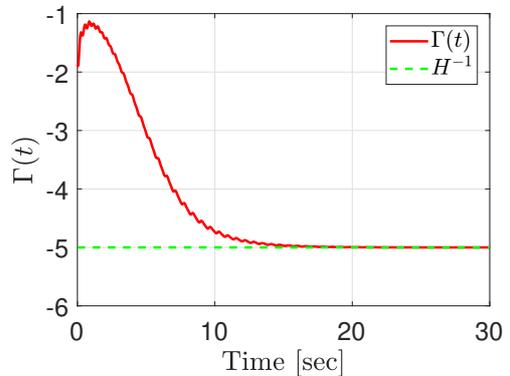
Expandindo o termo quadrático em (111) e aplicando a desigualdade de Young à equação resultante, tem-se $|y(t) - y^*| = |H[\vartheta(t)^2 + a^2 \sin^2(\omega t)]|$. Como antes, podemos reescrever a equação em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$, aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente a medida que $t \rightarrow \infty$ pelo teorema da média (Hale et al., 1990). Assim, de (52), temos (55). \square

5 Simulações

Considere um mapeamento estático quadrático como em (8), com hessiana $H = -0.2$, otimizador $\Theta^* = 2$, e valor ótimo $y^* = 5$. O comprimento do domínio é determinado como $D = 1$. Os parâmetros do sinal de perturbação e do proposto ES baseado em Newton são escolhidos como $\omega = 10$, $a = 0.2$, $c = 10$, e $K = 0.2$. Além disso, a estimativa de $H^{-1} = -5$ é dada pela solução da equação de Riccati (29), a qual foi implementada com $\omega_r = 0.5$ e condição inicial $\Gamma(0) = -2$. Os resultados da simulação de malha fechada são ilustrados na Figura 2 e na Figura 3. Observamos que cada variável (θ, Θ, y) converge para região ótima $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$. A maior região de convergência de $\theta(t)$, como declarado em (53) e observado na Figura 2(a), surge da significativa variação em altas frequências do domínio da difusão. A convergência da hessiana é mostrada na Figura 2(b). Em particular, a estimação exata de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ nos permite cancelar a hessiana H e portanto garante a taxas de convergência que possam ser arbitrariamente designadas pelo usuário. A performance otimizada pelo controlador projetado (45) e o sinal de perturbação adaptado (24) podem ser vistos comparando com o resultado da simulação do ES baseado em gradiente proposto em (J. Feiling et al., 2018), ilustrado na Figura 3. Como esperado, o algoritmo de Newton converge para o extremo mais rápido do que o esquema baseado no método gradiente, mesmo na presença da dinâmica de atuação governada por EDP's de difusão.



(a) Parâmetros $\theta(t)$ e $\Theta(t)$.



(b) Estimativa da inversa da hessiana $\Gamma(t)$.

Figura 2: ES baseado no algoritmo de Newton com uma EDP de difusão em sua dinâmica de atuação.

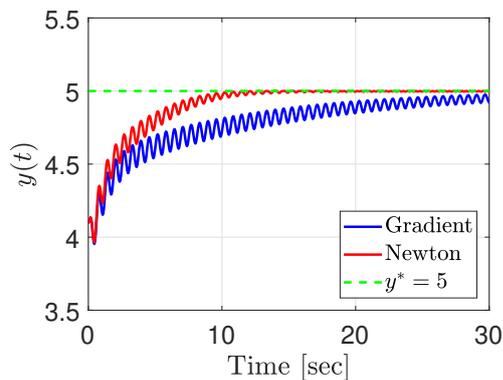


Figura 3: ES baseado no algoritmo de Newton versus ES baseado no algoritmo de gradiente: tempo de resposta da saída $y(t)$ sujeito ao atuador EDP de difusão com coeficiente de difusão $D = 1$.

6 Conclusão

Apresentamos o projeto de busca extremal baseado em Newton para mapeamentos estáticos escalares com dinâmica de atuação governada por EDP's de difusão. A dinâmica de atuação deve ser conhecida, mas a taxa de convergência do algoritmo é independente dos parâmetros do mapeamento desconhecido, particularmente, sua hessiana (diferente de projetos baseados em gradiente). A lei média de controle, para compensar a dinâmica de atuação, foi construída via metodologia *backstepping* e empregou estimativas do mapeamento estático baseadas nas perturbações do gradiente e da inversa da hessiana. O sinal de perturbação também levou em conta a dinâmica de atuação e compensou-a. Por fim, a estabilidade exponencial local e a convergência para uma pequena vizinhança do extremo desejado foram garantidas. Exemplos de simulação confirmam o desenvolvimento teórico apresentado.

7 Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela CAPES, CNPq e FAPERJ.

Referências

- Ariyur, K. B. and Krstić, M. (2003). *Real-time optimization by extremum-seeking control*, John Wiley & Sons.
- Cougnon, P., Dochain, D., Guay, M. and Perrier, M. (2006). Real-time optimization of a tubular reactor with distributed feed, *AIChE Journal* **52**(6): 2120–2128.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*, SIAM.
- Ghaffari, A., Krstić, M. and Nešić, D. (2012). Multivariable Newton-based extremum seeking, *Automatica* **48**(8): 1759–1767.
- Hale, J., Lunel, S. V. et al. (1990). Averaging in infinite dimensions, *J. Integral Equations Appl* **2**(4): 463–494.
- Hudon, N., Guay, M., Perrier, M. and Dochain, D. (2008). Adaptive extremum-seeking control of convection-reaction distributed reactor with limited actuation, *Computers and Chemical Engineering* **32**: 2994–3001.

- J. Feiling, Koga, S., Krstić, M. and Oliveira, T. R. (2018). Gradient extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion PDEs, *Automatica* p. under review.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Krstić, M. (2009). Compensating actuator and sensor dynamics governed by diffusion PDEs, *Systems & Control Letters* **58**(5): 372–377.
- Krstić, M. (2010). Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **55**(2): 287–303.
- Krstić, M. (2014). *Extremum seeking control*, in T. Samad and J. Baillieul *Encyclopedia of Systems and Control*, Springer.
- Krstić, M. and Smyshlyaev, A. (2008a). Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays, *Systems & Control Letters* **57**(9): 750–758.
- Krstić, M. and Smyshlyaev, A. (2008b). *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*, Vol. 16, Siam.
- Krstić, M. and Wang, H.-H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, *Automatica* **36**(4): 595–601.
- Lunardi, A. (1995). *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, Basel, Boston.
- Nagel, R. (1989). Towards a “matrix theory” for unbounded operator matrices, *Mathematische Zeitschrift* **201**(1): 57–68.
- Oliveira, T. R., Krstić, M. and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(4): 1911–1926.
- Pazy, A. (2012). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Vol. 44, Springer Science & Business Media.
- Wang, F., Wang, H., Xu, K., Wu, J. and Jia, X. (2013). Characterizing information diffusion in online social networks with linear diffusive model, *2013 IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems*, pp. 307–316.
- Winkin, J. J., Dochain, D. and Ligarius, P. (2000). Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors, *Automatica* **36**(3): 349–361.