

# CONTROLE ROBUSTO VIA NORMA $H_\infty$ COM OTIMIZAÇÃO POR $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE APLICADO ÀS INCERTEZAS DE POSIÇÃO DE UMA VÁLVULA REGULADORA DE COMBUSTÃO INTERNA EM UM ACELERADOR ELETRÔNICO AUTOMOTIVO

BRUNA FORTUNATO\*, ALESSANDRO DO NASCIMENTO VARGAS\*, CRISTIANO MARCOS AGULHARI\*

*\* Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Av. Alberto Carazzai, 1640, Centro  
Cornélio Procópio, Paraná, Brasil*

Emails: brunafortunato@alunos.utfpr.edu.br, avargas@utfpr.edu.br,  
agulhari@utfpr.edu.br

**Abstract**— This article proposes a robust control technique to guarantee the good performance of an automobile acceleration system. The electronic acceleration process consists basically of a throttle plate, which determines the correct positioning for the entry and adjustment of air in the combustion process, a spring that guarantees the semi-open position of the valve in case of failure and a position angular sensor. In addition, there are non-linearities and uncertainties present in the final positioning of the butterfly valve, with the main influencers being detected during the embedded communication process, such as gears, friction and position sensor failures, resulting in greater power loss or engine failure, putting human life at risk. This article proposes a robust control alternative applied to the position of a butterfly valve, in order to increase the reliability of the electronic acceleration system. From the identified states and through the resolution of linear matrix inequalities, associated with the robust control by  $H_\infty$ , we sought to determine the gains associated with Lyapunov functions that guarantee the quadratic stability of the system, considering the non-linearities such as noises applied in the system. Afterwards, the optimization is applied considering a  $\mathcal{D}$ -stability criterium, in order to improve the performance of the obtained system. Computational simulations demonstrate the efficiency of the implemented control through the considered uncertainties.

**Keywords**— Throttle, Stability, Combustion, Nonlinearities, Robustness, Throttle valve.

**Resumo**— Este trabalho propõe uma técnica de controle robusta para garantir o bom desempenho de um sistema de aceleração automobilístico. O processo de aceleração eletrônica é composto basicamente por uma placa de estrangulamento, que determina o posicionamento correto para a entrada e ajuste de ar no processo de combustão, uma mola que garante a posição semi aberta da válvula em caso de falha e um sensor de posição angular. Além disso, existem não linearidades e incertezas presentes no posicionamento final da válvula reguladora de combustão interna, sendo os principais influenciadores detectados durante o processo de comunicação embarcado, tais como engrenagens, atritos e falhas do sensor de posição, ocasionando em uma maior perda de potência ou falha do motor, aumentando as chances de exposição a riscos a vida humana. Diante disto, este trabalho propõe uma alternativa de controle robusto aplicado a posição de uma válvula reguladora de combustão interna, com o objetivo de aumentar a confiabilidade do sistema de aceleração eletrônica. A partir dos estados identificados e por meio da resolução de desigualdades matriciais lineares, associados ao controle robusto por  $H_\infty$  buscou-se determinar ganhos ligados às funções de Lyapunov que garantissem a estabilidade quadrática do sistema, considerando as não linearidades como ruídos aplicados no sistema, prejudicando a sua robustez. Posteriormente, aplica-se a otimização por  $\mathcal{D}$ -estabilidade, a fim de melhorar o desempenho do sistema obtido. Simulações computacionais demonstram a eficiência do controle implementado mediante às incertezas consideradas.

**Palavras-chave**— Acelerador, Estabilidade, Combustão, Não-linearidades, Robustez, Válvula.

## 1 Introdução

Com o aumento das exigências do mercado automotivo sobre o desempenho e eficiência de desempenho dos veículos, a indústria automobilística frequentemente realiza pesquisas para aumentar a qualidade e a confiabilidade sobre os seus produtos (Deur et al., 2004). Desta forma, o objetivo é melhorar a eficiência do processo de combustão, encontrando a melhor combinação possível entre o combustível e ar, utilizados para garantir a máxima utilização da potência do motor, menores taxas de emissões de gases poluentes, respeitando as preferências do motorista (como por exemplo, a posição do pedal do acelerador) (Yuan et al., 2008). Neste cenário, o emprego de dispositivos eletrônicos de baixa potência em sistemas

de aceleração automotiva têm sido uma boa alternativa (Vargas et al., 2016).

Basicamente, o sistema de aceleração eletrônica é um mecanismo composto por sensores de posição, que alimentam uma central de processamento, responsável por ajustar o posicionamento de uma válvula reguladora de ar, que controla a entrada de ar no motor de combustão e consequentemente a velocidade e a potência do veículo (Deur et al., 2004).

A válvula reguladora de ar possui uma placa de estrangulamento que realiza uma rotação limitada em uma faixa de deslocamento angular com o auxílio de uma mola rígida, sendo acionada por meio de engrenagens conectadas a um motor elétrico (Yuan et al., 2008). Além disso, a válvula possui um mecanismo de prevenção a falhas do

motor por falta de oxigênio, onde uma mola assegura a posição normal fechada em torno de uma posição angular mínima, sendo possível a entrada de oxigênio na combustão interna, evitando uma parada repentina do motor enquanto o veículo permanece em movimento (Yuan et al., 2008).

Embora seja extremamente utilizado pela indústria automobilística, este sistema ainda não se encontra totalmente livre de falhas. Geralmente, tais falhas estão relacionadas à presença de elementos incertos no sistema, como por exemplo, estados não lineares de molas, atritos entre superfícies ou folgas entre engrenagens do motor e falta de informações devido à falhas no sistema de sensoriamento, prejudicando a precisão da posição final da válvula estranguladora de ar (Yuan et al., 2008) (Deur et al., 2004) (Vargas et al., 2016). A possibilidade de ocorrência de falhas mecânicas também é um fator não desprezado, uma vez que o mau funcionamento deste pode causar a súbita aceleração nos veículos, expondo em risco a vida humana (Vargas et al., 2016).

Pesquisas relacionando as influências das falhas e seus impactos sobre os sistema de controle de aceleração são constantemente realizadas, com o objetivo de estimar ou aproximar parâmetros ótimos para ajuste de controladores robustos quando sujeitos aos efeitos das não linearidades sistêmicas (Yuan et al., 2008) (Vargas et al., 2016) (Deur et al., 2004).

O controle robusto foi amplamente utilizado no final dos anos 80, época em que sua formulação passou a ser caracterizada por problemas de otimização convexa (Gonçalves, 2006). Sua abordagem comumente é representada por meio de problemas de programação semi-definida, no qual a função objetivo é linear e suas restrições são geralmente dadas na forma de desigualdades matriciais lineares ou LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) (Gonçalves, 2006).

O emprego de LMIs facilita a busca pela solução otimizada, devido à disponibilidade de *softwares* para solução em tempo polinomial, tais como o *LMI Control Toolbox* e *SeDuMi Interface*, ambos disponibilizados para uso com o auxílio do MATLAB<sup>®</sup> (Gonçalves, 2006).

Neste trabalho, busca-se aumentar a robustez do sistema de aceleração por meio da técnica de controle robusto via norma  $\mathcal{H}_\infty$ , sendo seus ganhos determinados pela resolução de LMIs com posterior otimização de desempenho pela alocação de pólos em uma região  $\mathcal{D}$ -estável ou  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

Assim sendo, os requisitos de projeto considerarão as principais falhas no sistema de aceleração: as influências das não linearidades no sistema embarcado atuando essencialmente durante a transição entre cada faixa de mudança de posição da válvula reguladora de combustão interna,  $\Theta$ , ou seja:

$\Theta_1 = [0^\circ, 8^\circ]$ ,  $\Theta_2 = (8^\circ, 16^\circ]$  e  $\Theta_3 = (16^\circ, 90^\circ]$  (Vargas et al., 2016).

Como esta interferência ocorre de forma direta, considerou-se no projeto dinâmicas com sinais de entrada ruidosas interagindo entre si durante a comunicação do sistema embarcado. Simulações computacionais demonstram a boa eficácia de desempenho sobre o sistema com os ganhos de estabilidade projetados em malha fechada via LMIs.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na sessão II apresenta-se uma breve descrição do sistema de aceleração e a representação do seu modelo matemático, na sessão III apresenta-se embasamento teórico utilizado, na sessão IV serão abordados detalhadamente o modelo matemático adotado do sistema de aceleração eletrônico, o projeto das incertezas e os ganhos para controladores robustos via  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Por fim, realiza-se a verificação da abordagem apresentada por meio de testes simulacionais. Na sessão V são apresentados os resultados finais e discutidas as principais conclusões do estudo realizado.

## 2 O sistema de Aceleração

Ao ser requisitada a aceleração do automóvel, um sistema embarcado no automóvel é acionado. Esta tecnologia é responsável por garantir a movimentação mecânica e um correto ajuste de uma placa circular, movendo-a em torno de um eixo central, a fim de controlar a entrada de oxigênio nas câmaras de combustão (Vargas et al., 2016). Geralmente a posição angular é monitorada por meio de um sensor de posição.

O sistema de aceleração possui alguns desafios, uma vez que pode apresentar arranjos físicos diferentes e conter não linearidades. Estas não linearidades representam atritos, folga entre engrenagens ou não linearidades presentes na mola de segurança do sistema, impedindo que o motor de combustão apresente falha por falta de oxigênio (Yuan et al., 2008).

Uma representação convencional de um modelo físico de um acelerador pode ser representada em termos de representações discretas de estados das posições angulares da válvula reguladora de combustão interna  $\theta_k$ , velocidade angular da válvula  $\varrho_k$  e corrente elétrica consumida pelo sistema de aceleração no tempo discreto  $i_k$ . Tal representação é dada pela eq.(1)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_k \\ \dot{\varrho}_k \\ \dot{i}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \varrho_k \\ i_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u_t \quad (1)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi(\theta, \varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo  $\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  e denota uma função linear

por partes, específica para cada estrutura modelada, sendo os parâmetros referentes à dinâmica do sistema,  $a_{21} \dots a_{33}$ , entrada de controle  $b$  e não linearidades  $\Phi$ , identificados e modelados a partir de quantizações de um sistema físico. Os detalhes deste modelo são apresentados em Vargas et al. (2016), e os valores dos parâmetros  $a_{ij}$  são mostrados na Seção 4 deste estudo.

### 3 Estabilidade Quadrática

Os modelos físicos apresentam diversos tipos de incertezas e de suma importância conhecê-las e incluí-las no projeto de modelagem de controle, para que dessa maneira o sistema de controle seja uma aproximação nominal ou ideal do sistema físico com incertezas apresentadas por meio de parâmetros de controle (Leite et al., 2007).

O conceito de estabilidade quadrática surgiu para o projeto de controladores robustos em sistemas incertos, onde tais incertezas são descritas em um politopo convexo de soluções cujo valor ótimo é determinado pela resolução de LMIs (Leite et al., 2007). Em geral, as LMIs são inequações matriciais baseadas em funções de Lyapunov que analisam a estabilidade robusta nos vértices de um politopo e garantem a sua convergência em todo o seu domínio (Gonçalves, 2006).

Assim, considera-se um sistema Linear e Invariante no Tempo ou LIT, representado em espaço de estados pela eq.(2)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (2)$$

sendo  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$ , vetores de estados, controle e saídas respectivamente e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  o conjunto de matrizes constantes conhecidas (Hypiusová and Rosinová, 2016).

Assumindo  $x_k$  como o vetor referência para realimentação de estados, existe um conjunto de ganhos  $K$  tal que a lei de controle é dada por (De Oliveira et al., 2002a)

$$u_k = Kx_k \quad (3)$$

Sendo  $K$  um vetor de ganhos que estabiliza o sistema (2).

De acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov (Boyd et al., 1994), o sistema (2) em malha fechada é estável se, e somente se, existir uma matriz  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que a condição (4) seja satisfeita (De Oliveira et al., 2002a)

$$\begin{bmatrix} P & (A + BK)P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0. \quad (4)$$

O símbolo  $\star$  denota o bloco simétrico da desigualdade.

Desigualdades matriciais lineares como a condição mostrada em (4) podem ser utilizadas para

garantir a estabilidade de sistemas afetados por parâmetros incertos (Boyd et al., 1994). Assim, o sistema assume a forma dada pela eq.(5) (Oliveira et al., 2008)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + B(\alpha)u_k \\ y_{k+1} &= C(\alpha)x_k, \end{aligned} \quad (5)$$

com  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  e  $C(\alpha)$  possuindo dimensões apropriadas e a constante  $\alpha$  representando os parâmetros incertos (Oliveira et al., 2008). Em consequência, considera-se o espaço das soluções do sistema (5) dado pela forma politópica (6).

$$(A, B, C)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i, C_i), \quad (6)$$

sendo  $A_i, B_i$  e  $C_i$  vértices do politopo, com  $\alpha \in \Delta_N$  pertencente ao simplex unitário dado por

$$\Delta_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (7)$$

Assim, qualquer conjunto de matrizes incertas  $(A, B, C)(\alpha)$  pode ser representado por uma combinação convexa dos vértices  $(A_i, B_i, C_i, i = 1, \dots, N)$  do politopo em termos de um vetor de parâmetros  $\alpha \in \Delta_N$  (Oliveira et al., 2008).

A representação politópica é frequentemente utilizada porque resulta em projetos de controladores com baixo grau de conservadorismo em relação aos outros métodos (Hypiusová and Rosinová, 2016).

Para qualquer combinação convexa entre os  $N$  vértices de um politopo  $(A(\alpha), B(\alpha))$ , o sistema é dito quadraticamente estável se existir uma matriz de ganhos  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma matriz simétrica positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisfaçam a desigualdade (8).

$$\begin{bmatrix} P & (A_i + B_i K)P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

A condição da eq.(8) pode ser então representada por uma LMI como apresentado no trabalho de Oliveira et al. (2011).

A partir das condições citadas, pode-se estabelecer condições para a estabilidade robusta de um sistema. Neste trabalho, as condições de estabilidade estarão enunciadas no teorema do pequeno ganho, detalhado na sessão 3.1 Norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

#### 3.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$

O controle ótimo por  $\mathcal{H}_\infty$  é uma técnica de otimização no domínio da frequência desenvolvido para a necessidade em processos de síntese que lidam com questões de modelagem de erros (Green and Limebeer, 2012). A ideia básica é tratar o pior caso possível da atuação de ruídos ou incertezas

no sistema descrito na relação 9 (Green and Limebeer, 2012).

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + B_u(\alpha)u_k + B_w(\alpha)w_k \\ z_k &= C_z(\alpha)x_k + D_{zu}(\alpha)u_k + D_{zw}(\alpha)w_k \end{aligned} \quad (9)$$

De forma que  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathbb{R}^n$  e  $y_k \in \mathbb{R}^n$ , correspondem aos estados, controle, vetores exógenos e de saída, respectivamente (Hypiusová and Rosinová, 2016).

Deseja-se determinar um sinal de controle  $u_k$  de forma que o sistema (9) seja assintoticamente estável mesmo com a presença do sinal de ruído  $w_k$ , supondo norma limitada (Chilali and Gahinet, 1996). Para resolver tal problema, primeiramente é necessário definir o conceito de norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema. Esta norma é o valor supremo da relação entre a energia da saída  $z_k$  e da entrada  $w_k$ , para todo  $w_k$  com energia finita, conforme a eq.(10) (Zhou, 1998).

$$\|H(z_k, \alpha)\|_\infty = \sup_{w_k \neq 0} \frac{\|z_k(z)\|}{\|w_k(z)\|}. \quad (10)$$

Na equação (10),  $H(z_k, \alpha)$  é a função de transferência de  $w_k$  para  $z_k$  do sistema (9).

O Teorema 1, também conhecido como Teorema do Pequeno Ganho, é normalmente utilizado para garantir a estabilidade do sistema nominal  $H(z_k, \alpha)$  submetido às incertezas limitadas em norma  $\Delta$  cujos limitantes são definidos pela norma  $H_\infty$  do sistema (Zhou, 1998).

**Teorema 1** *Suponha um sistema  $H(z_k, \alpha)$  e um sistema composto por uma quantidade de dinâmicas incertas possíveis,  $\Delta$ , conectado em paralelo. Diz-se que o sistema resultante em malha fechada será assintoticamente estável para qualquer perturbação  $\Delta$  se qualquer uma das seguintes condições for satisfeita:*

- $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$  se e somente se  $\|H(z_k, \alpha)\|_\infty < \gamma$ ,
- $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$  se e somente se  $\|H(z_k, \alpha)\|_\infty \leq \gamma$

Além disso, para garantir a existência de um ganho de realimentação de estados  $K$  tal que a lei de controle (3) estabilize o sistema em um certo valor limitante via norma  $\mathcal{H}_\infty$ , estabelece-se o Teorema 2 (De Oliveira et al., 2002b).

**Teorema 2** *Existe um controlador na forma da Equação (3) que garante a desigualdade  $\|H(z_k, \alpha)\|_\infty \leq \gamma$  se existirem  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,*

$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que satisfaçam a condição

$$\begin{bmatrix} P & A(\alpha)X + B_u(\alpha)L(\alpha) & B_w(\alpha) \\ \star & X + X^T - P & 0 \\ \star & \star & I \\ \star & \star & \star \\ & 0 & \\ & X^T C(\alpha)_z^T + L^T(\alpha)D_{zu}^T(\alpha) & \\ & D_{zw}^T(\alpha) & \\ & \gamma I & \end{bmatrix} > 0. \quad (11)$$

Caso a condição (11) seja satisfeita, então o ganho

$$K(\alpha) = L(\alpha)X^{-1} \quad (12)$$

estabiliza o sistema.

Note que o ganho de realimentação de estados resultante da condição (11) depende dos parâmetros  $\alpha$ . Tal dependência é considerada neste artigo pois os parâmetros  $\alpha$  são modelados em termos das regiões  $\Theta_i$  da posição da válvula, conforme apresentado na Seção 4.

Em muitos casos, a abordagem  $H_\infty$  pode tornar o sistema robusto, porém não suficiente devido ao não cumprimento à requisitos adicionais de desempenho. Assim, pode-se realizar a otimização da compensação robusta aplicando em conjunto o controle por alocação de polos ou  $\mathcal{D}$ -Estabilidade.

### 3.2 Condições para a $\mathcal{D}$ -Estabilidade

Seja  $\mathcal{D}$  uma região contida em um plano complexo  $\mathcal{C}$ . Os seguintes Teoremas e definições podem ser aplicados para verificar se os polos de um sistema LIT estão contidos em uma região  $\mathcal{D}$ .

**Definição 2.1** Seja  $\mathcal{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica dada por

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

sendo  $R_{11} = R_{11}^T \in \mathcal{R}^{d \times d}$  e  $R_{22} = R_{22}^T \in \mathcal{R}^{d \times d}$ , com  $d$  representando a ordem da região (Leite et al., 2007). Uma região  $\mathcal{D}$  no plano complexo pode ser descrita como

$$\mathcal{D} = z \in \mathcal{C} : R_{11} + R_{12}'z + R_{22}zz^* < 0. \quad (14)$$

**Definição 2.2** Uma região é  $\mathcal{D}$ -estável se, e somente se, todos os autovalores de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  estiverem contidos em uma região  $\mathcal{D}$  (Chilali and Gahinet, 1996).

Quando os autovalores de um sistema de segunda ordem pertencem a uma região  $\mathcal{D}$  - estável, o sistema possui uma taxa de decaimento, coeficiente de amortecimento e frequência amortecida máxima delimitados, permitindo que critérios sob restrições de controle sejam caracterizados por LMIs (Chilali and Gahinet, 1996).

As LMIs buscam um espaço de soluções convexas em uma região de possíveis soluções  $\mathcal{D}$  (Chilali

and Gahinet, 1996). Para a implementação da  $\mathcal{D}$ -Estabilidade na condição (11), supõe-se que a sequência  $x_k$  esteja contida em um círculo unitário e possua convergência à direita, sendo em consequência estável e causal. Dessa forma, a divisão da matriz  $A(\alpha)$  na condição (11) por um fator  $\rho < 1$  delimita a região dos autovalores para o interior da circunferência de raio  $\rho$ .

#### 4 Modelagem da válvula reguladora e resultados obtidos

Nesta seção, busca-se apresentar os resultados obtidos por meio da implementação de controladores robustos pelas técnicas  $\mathcal{H}_\infty$  e pela combinação do controle com alocação de polos pela  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

Primeiramente, será realizada uma breve descrição do sistema estudado e seus parâmetros incertos. Em seguida, serão detalhadas as modelagens das incertezas pelo Teorema do Pequeno Ganho, juntamente com os ganhos otimizados pela LMI proposta na eq.(11). Por fim, serão apresentados os resultados obtidos do sistema com a inserção da alocação de polos otimizada pela  $\mathcal{D}$ -estabilidade. O objetivo da inserção da  $\mathcal{D}$ -estabilidade é melhorar o desempenho do sistema, levando em consideração a viabilidade do projeto e a exigência de robustez da posição da válvula quando exposta a ambientes incertos.

Estudos apontam que os efeitos das não linearidades sobre a válvula são mais notáveis quando a válvula está próxima à sua posição fechada (Vargas et al., 2016). Desta forma, torna-se interessante realizar o projeto de controladores robustos sobre três regiões distintas:  $\Theta_1 = [0^\circ, 8^\circ]$ ,  $\Theta_2 = (8^\circ, 16^\circ]$  e  $\Theta_3 = (16^\circ, 90^\circ]$ . Para cada modo de operação, é possível representar (1) como um sistema politópico de  $N = 3$  vértices, dado por

$$\begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \varrho_{k+1} \\ i_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^s & 0 \\ a_{21}^s & a_{22}^s & a_{23}^s \\ 0 & a_{32}^s & a_{33}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \varrho_k \\ i_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b^s \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ c_1^s \operatorname{sgn}(\varphi_k) + c_2^s \operatorname{sgn}(\theta_k - 1) + c_3^s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

sendo,  $\theta_k \in \Theta_s$ ,  $s = 1, 2, 3 \quad \forall k \geq 0$ , e  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  a função sinal.

Os valores das constantes  $a_{12}^s, \dots, a_{33}^s$ ,  $b^s$ ,  $c_1^s, \dots, c_3^s$  da eq.(15) correspondem aos  $\theta_k$  identificados próximos à posição configurada de  $\Theta_s$ , sendo dados conforme a Tabela 4 (Vargas et al., 2016). Tais valores são resultantes da discretização de uma válvula reguladora de combustão de motor do tipo borboleta, conforme descrito em (Vargas et al., 2016), do sistema (1) utilizando um tempo de amostragem de  $5ms$ . A mudança entre cada modo resulta das não linearidades do sistema.

Parâmetro	s=1	s=2	s=3
$a_{12}^s$	-0.003	0.0021	0.0442
$a_{21}^s$	0.148	-0.143	-0.0192
$a_{22}^s$	0.9625	0.9941	0.7981
$a_{23}^s$	-0.8673	1.8944	0.3538
$a_{32}^s$	0.005	-0.0004	0.0349
$a_{33}^s$	0.944	0.9514	0.9043
$b^s$	0.0741	0.0346	0.0442
$c_1^s$	-0.0654	-0.1068	-0.0055
$c_2^s$	-0.007	0.0529	0.0615
$c_3^s$	0.2255	-0.3419	-0.0862

O controle robusto por incertezas no método  $\mathcal{H}_\infty$  consiste em identificar e modelar as incertezas presentes na dinâmica de um sistema, separando-as em entradas e saídas exógenas a fim de determinar o pior caso para a norma de uma dada matriz de incertezas  $\Delta$ . Para o sistema considerado, as funções não lineares apresentadas em (15) serão consideradas como um ruído externo ao sistema, e a abordagem  $\mathcal{H}_\infty$  será utilizada para garantir a estabilidade do sistema mesmo na presença das não linearidades.

Inicialmente as modelagens de incertezas serão aplicadas ao vetor exógeno  $w_k$ . Para a modelagem do vetor exógeno, considerou-se que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ c_1^s \operatorname{sgn}(\varphi_k) + c_2^s \operatorname{sgn}(\theta_k - 1) + c_3^s \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_w} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^s \operatorname{sgn}(\varphi_k) \\ c_2^s \operatorname{sgn}(\theta_k - 1) \\ c_3^s \end{bmatrix}}_{w_k}. \quad (16)$$

Aplicando-se a LFT ou *Linear Fractionary Transformation* na eq.(16), chega-se à eq.(17), que relaciona os coeficientes constantes com o vetor das variáveis incertas, determinando a amplitude de cada incerteza.

$$z_k = \Delta w_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w_k \quad (17)$$

Pelo Teorema 1, o pior caso ocorre quando a norma do sistema corresponde ao inverso da norma da incerteza gerada. Logo,  $\|\Delta\|_\infty = 1$  e, como consequência, pode-se estabelecer a relação entre a norma de  $\Delta$  e  $\gamma$

$$1 \leq \frac{1}{\gamma}. \quad (18)$$

Dessa forma, a condição  $\|H(z_k, \alpha)\|_\infty < 1$  garante a estabilidade do sistema mesmo à presença das não linearidades. Este valor é considerado para a LMI (11). A LMI determina os ganhos de controle necessários para garantir a robustez entre

cada estado de transição não linear do sistema e ganho necessário para o rastreamento da trajetória em torno de  $90^\circ$  conforme descrito em (Astrom and Murray, 2009). As matrizes do sistema (15) são modeladas como um politopo de 3 vértices, cada vértice representa a operação do sistema em uma respectiva região  $\Theta_s$ ; como consequência, o ganho  $K(\alpha)$  resultante da condição (11) possui 3 vértices, como apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Ganhos  $K_s$  obtidos pela norma  $H_\infty$

Ganhos	$K_s$
Região $\Theta_1$	$[179, 3 \quad 10, 03 \quad -21, 32]$
Região $\Theta_2$	$[-5, 168 \quad -13, 26 \quad -52, 76]$
Região $\Theta_3$	$[-17, 98 \quad -13, 83 \quad -25, 96]$

Com os ganhos obtidos, implementou-se o algoritmo (19) para simulação do sistema em malha fechada com compensação em modo chaveado nas transições da posição angular da válvula  $\theta_k = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ .

$$u_k = \begin{cases} K_1 x_k, & \theta_k \in \Theta_1 \\ K_2 x_k, & \theta_k \in \Theta_2 \\ K_3 x_k, & \theta_k \in \Theta_3 \end{cases} \quad (19)$$

Os resultados obtidos estão apresentados nas Fig.(1-3), representando os estados da posição e velocidade angular, bem como a corrente consumida no sistema de controle.

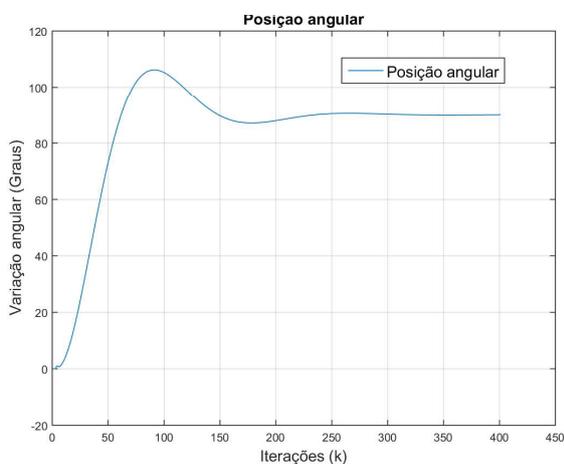


Figura 1: Comportamento da posição angular da válvula após a aplicação da norma  $H_\infty$

Pela Fig.(1), observa-se que o sistema apresentou maior alcance angular no valor  $106,2^\circ$  após  $k = 90$ , *undershoot* em  $87,12^\circ$  em  $k = 174$  e estabilização em  $k > 300$ , que equivale a 1, 5s.

O comportamento da velocidade angular está descrito na Fig.(2). Observa-se após a perturbação do sistema, a velocidade máxima foi de  $2,161 \text{ rad}$  após 120 iterações, estabilizando-se após 331 iterações.

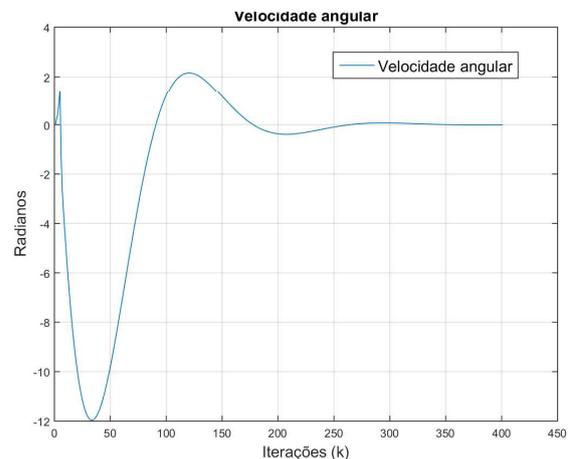


Figura 2: Comportamento da velocidade angular da válvula após a aplicação da norma  $H_\infty$

Por fim, o comportamento gráfico correspondente a corrente consumida, utilizando a norma  $H_\infty$  está exibido na Fig.(3).

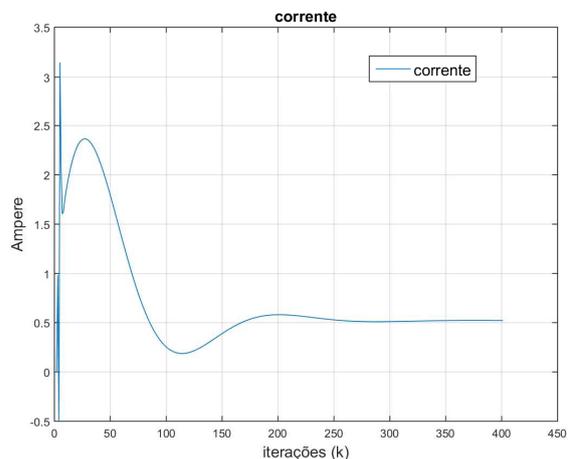


Figura 3: Comportamento da corrente consumida pelo sistema após a aplicação da norma  $H_\infty$

Nota-se que o maior consumo de corrente compreende no valor de  $3,41 \text{ A}$ , ocorrendo nos primeiros instantes com posterior estabilização após 331 iterações.

Após resultados obtidos pela norma  $H_\infty$ , incluiu-se os ganhos do controlador dados pela otimização via  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Para isso, o deslocamento em um região  $\mathcal{D}$ -estável se deu por meio da implementação da constante  $\rho = 0,8$  para resolução das LMIs. Os valores obtidos estão apresentados na tabela (3).

Tabela 3: Ganhos  $K$  obtidos pela norma  $H_\infty$  e  $\mathcal{D}$ -estabilidade

Ganhos	$K_s$
Região $\theta_1$	$[-4175, 50 \quad 35, 73 \quad -38, 17]$
Região $\theta_2$	$[-2597, 15 \quad -28, 46 \quad -78, 23]$
Região $\theta_3$	$[-298, 2 \quad -54, 04 \quad -43, 48]$

Por meio dos ganhos obtidos e obedecendo o algoritmo de compensação chaveada dada pela equação (19), novas simulações foram realizadas com o auxílio do *software* MATLAB®. Os resultados estão apresentados nas Fig.(4-6).

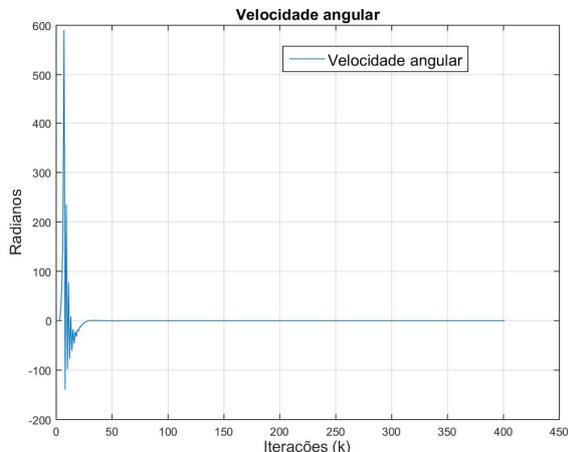


Figura 4: Comportamento da posição angular da válvula após a aplicação da norma  $H_\infty$  com  $\mathcal{D}$ -estabilidade

Na Fig.(4), inicialmente houve um *undershoot* em  $2.2614^\circ$  em  $k = 5$  sendo em seguida um alcance máximo da posição angular em  $177.2^\circ$ . O regime permanente em  $90^\circ$  ocorreu em  $k = 41$ .

Pela Fig.(5), observa-se o comportamento da velocidade angular, onde o sobressinal foi de  $590rad$  em  $k = 7$  e estabilização após 43 iterações.

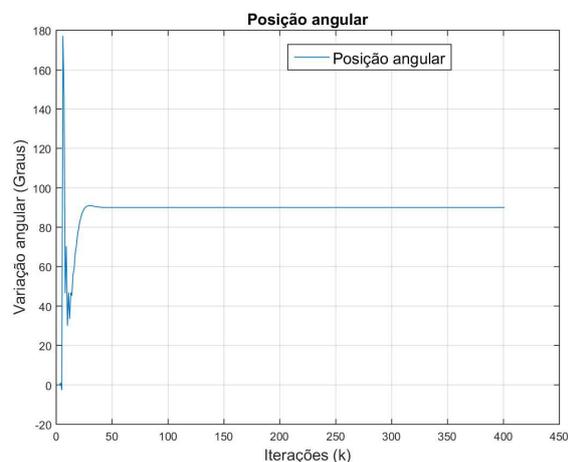


Figura 5: Comportamento da velocidade angular da válvula após a aplicação da norma  $H_\infty$  com  $\mathcal{D}$ -estabilidade

Finalmente, o desempenho do estado da corrente do sistema está apresentado na Fig.(6). Nota-se houve comportamento altamente oscilatório até a sua estabilização, apresentando um *overshoot* de  $746.2A$  nos primeiros 3 iterações e *undershoot* de  $510.2A$  em  $k = 7$ . A estabilização do sinal ocorre após 22 iterações.

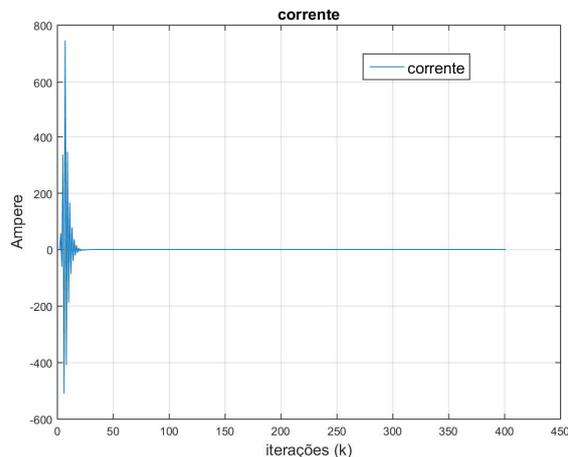


Figura 6: Comportamento da corrente da válvula após a aplicação da norma  $H_\infty$  com  $\mathcal{D}$ -estabilidade

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi proposta a simulação de uma válvula reguladora de combustão interna por meio das técnicas de controle robusto via norma  $\mathcal{H}_\infty$  com ganhos otimizados pela  $\mathcal{D}$ -Estabilidade. Esta estratégia de controle é interessante pois a tecnologia de aceleração automotiva disponível atualmente não está totalmente livre de falhas. Tais falhas podem ser difíceis de serem determinadas por apresentarem em grande maioria um comportamento não linear, prejudicando a robustez do sistema.

Na metodologia de projeto, buscou-se tornar o sistema robusto mediante ao chaveamento entre três regiões de posicionamento angular válvula, sendo estas delimitadas de acordo com a maior probabilidade da ocorrência de incertezas do sistema. A delimitação entre cada região têm por objetivo priorizar os casos onde as incertezas do sistema prevalecem, compreendendo em faixas de variações dadas por  $\Theta_1 = [0^\circ, 8^\circ]$ ,  $\Theta_2 = (8^\circ, 16^\circ]$  e  $\Theta_3 = (16^\circ, 90^\circ]$ .

Na modelagem das incertezas, as três regiões supracitadas compõem vértices de um polítopo convexo. Para a determinação dos ganhos, LMIs foram implementadas com o auxílio do *software* MATLAB®, sendo também simulado o sistema de controle composto por um controlador  $u_k$  responsável por determinar um ganho  $K$  para cada modo não linear do sistema operante.

Na primeira simulação, considerou-se os ganhos não otimizados via norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Observou-se que o estado referente a posição angular apresentou *overshoot* de  $106.2^\circ$ , após 90 iterações, sendo estabilizado após 300 iterações, ou seja 1,5s. Sua velocidade angular máxima foi de  $2.161rad$ , estabilizando após 331 iterações. Tendo em vista que a aceleração do veículo deve ocorrer em instantes instantâneos, sendo esta diretamente relacio-

nada ao rápido deslocamento angular da válvula de combustão, considera-se que o projeto é inviável. Além disso, a corrente e o consumo de corrente se manteve em torno de 0.5A durante a estabilização do sistema de controle.

Buscou-se então, reduzir o tempo de resposta do sistema de controle por meio da  $\mathcal{D}$ -Estabilidade. A posição angular da válvula foi aproximadamente 45% mais precisa, aumentando a robustez do projeto.

A velocidade angular alternou bruscamente seus valores em regime transitório, porém permaneceu estável após  $k = 7$ , sendo um tempo inferior em 12% com relação aos ganhos não otimizados, aumentando a viabilidade do projeto. Pelo comportamento da corrente, vantagens e desvantagens são percebidas. Nota-se que a rápida resposta do sistema ocasionou a um consumo de corrente inicial, quando comparado ao comportamento do sistema de controle sem otimização de ganhos. Porém, em regime permanente não houve exigência de consumo de corrente para manter a posição angular final da válvula. Em todos os três estados de controle observados, nota-se um considerável esforço de compensação  $u_k$ .

Mediante às respostas apresentadas via simulação, conclui-se que a estratégia é eficaz, porque garante a estabilização da posição da válvula reguladora de combustão mesmo quando esta é submetido às incertezas. Entretanto, torna-se necessário realizar a otimização dos valores de ganhos encontrados, a fim de reduzi-los e minimizar os esforços de controle. Como objeto de estudos futuros, deseja-se readequar os ganhos do controlador considerando novas técnicas de otimização, como por exemplo, o controle misto com a norma  $H_2$ .

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (Projeto Universal 402830/2016-4), à CAPES e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

### Referências

- Astrom, K. J. and Murray, R. M. (2009). *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*, Princeton University Press.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996).  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an lmi approach, *IEEE Transactions on automatic control* **41**(3): 358–367.
- De Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002a). Extended  $h_2$  and  $h_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- De Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002b). Extended  $h_2$  and  $h_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.
- Deur, J., Pavkovic, D., Peric, N., Jansz, M. and Hrovat, D. (2004). An electronic throttle control strategy including compensation of friction and limp-home effects, *IEEE Transactions on Industry Applications* **40**(3): 821–834.
- Gonçalves, E. N. (2006). *Análise e síntese de controladores e filtros robustos para sistemas com domínios politópicos de incerteza*, PhD thesis.
- Green, M. and Limebeer, D. J. (2012). *Linear robust control*, Courier Corporation.
- Hypiusová, M. and Rosinová, D. (2016). Robust control of quadruple-tank process via lmi, *Cybernetics & Informatics (K&I), 2016*, IEEE, pp. 1–6.
- Leite, V. J. d. S., Peres, P. L. D., Castelan, E. B. and Tarbouriech, S. (2007). Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* **18**(4): 434–446.
- Oliveira, R. C., de Oliveira, M. C. and Peres, P. L. (2008). Convergent lmi relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent lyapunov functions, *Systems & Control Letters* **57**(8): 680–689.
- Oliveira, R. C., de Oliveira, M. C. and Peres, P. L. (2011). Robust state feedback lmi methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons, *Computer-Aided Control System Design (CACSD), 2011 IEEE International Symposium on*, IEEE, pp. 1038–1043.
- Vargas, A. N., Menegaz, H. M., Ishihara, J. Y. and Acho, L. (2016). Unscented kalman filters for estimating the position of an automotive electronic throttle valve, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **65**(6): 4627–4632.
- Yuan, X., Wang, Y. and Wu, L. (2008). Svm-based approximate model control for electronic throttle valve, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **57**(5): 2747–2756.
- Zhou, K. (1998). *Essentials of robust control*, Vol. 104, Prentice Hall New Jersey.