

CONSENSO EM SISTEMAS MULTIAGENTES SUJEITOS A SATURAÇÃO E ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

THALES C. SILVA*, FERNANDO O. SOUZA*, LUCIANO C. A. PIMENTA†

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG 31270-010 Brasil*

Emails: s.c.thales@gmail.com, fosouza@ufmg.br, lucpim@cpdee.ufmg.br

Abstract— This paper presents an analysis for the consensus problem in multi-agent systems subject to time-varying delay input and saturation on the actuator. In this approach each agent has identical model and the network topology is fixed and directed. Sufficient conditions for the system consensus are developed in terms of linear matrix inequalities. It is possible to use them to estimate the average delay, the domain of time delay variation and the saturation that the multi-agent system under analysis supports. A widely used consensus protocol for the consensus problems is considered in this work. To illustrate the main results of the paper a numerical example is given.

Keywords— Consensus, Time-varying delay, Multi-agent system, Saturation, Linear matrix inequalities.

Resumo— Este trabalho aborda o problema de consenso de sistemas multiagentes sujeitos a atrasos variantes no tempo e saturação no atuador. É admitido que cada agente possui dinâmica idêntica e topologia de comunicação fixa em redes direcionadas. São desenvolvidas condições suficientes na forma de desigualdades matriciais lineares para verificar se o consenso entre todos agentes que compõem o sistema multiagentes é atingido e, na forma como são desenvolvidas, é possível utilizá-las para se obter uma estimativa para o domínio de variação do atraso no tempo e para o limite de saturação que a rede de agentes sob análise suporta. Um protocolo de consenso geral, largamente utilizado em problemas de consenso de sistemas multiagentes, é utilizado. Ao final é desenvolvido um exemplo numérico para demonstrar a aplicação dos principais resultados obtidos.

Palavras-chave— Atrasos variantes no tempo, Consenso, Desigualdades matriciais lineares, Saturação, Sistemas multiagentes.

1 Introdução

O principal objetivo do consenso em sistemas multiagentes é fazer com que o grupo alcance sincronia dos estados através de um protocolo apropriado, baseado na troca de informação entre alguns agentes do grupo. Existem diferentes abordagens para o problema de consenso em sistemas multiagentes, por exemplo, a análise realizada por Olfati-Saber & Murray (2004), Wen et al. (2017), Savino et al. (2016) e You et al. (2016) exploram a topologia de comunicação chaveada e atrasos no tempo. Em Qin et al. (2015), Wen et al. (2017) e Mao et al. (2017) é tratado, utilizando observadores, o problema de consenso quando alguns estados de alguns agentes não estão disponíveis.

O alto grau de abstração do conceito de sistemas multiagentes permite que esta seja uma área com um amplo espectro de aplicações. Isso porque não existe uma definição estrita para o que é um agente e, por consequência, quais são os aspectos do ambiente em que eles interagem. O campo de aplicação é responsável por moldar suas principais características: os objetivos, ações, domínio de conhecimento e as restrições impostas pelo ambiente. Por exemplo em Li et al. (2018) e Liu et al. (2016) são estudados sistemas que são formados por agentes representados por dinâmica de segunda ordem. Em Qin et al. (2015), Wen et al. (2017), Mao et al. (2017), Li et al. (2018) e Cui et al. (2016) é abordado o problema de consenso em sistemas multiagentes com dinâmica de agen-

tes não lineares.

O problema de consenso com saturação tem sido bastante explorado recentemente (You et al., 2016; Su et al., 2017; Cui et al., 2016). A característica dos atrasos variantes no tempo também tem sido bastante explorada no problema de consenso de sistemas multiagentes (Olfati-Saber & Murray, 2004; Savino et al., 2016; You et al., 2016; Li et al., 2018). Já o problema de consenso sujeito às duas situações, saturação e atrasos variantes no tempo, foi pouco explorado. You et al. (2016) realizou o estudo com saturação no atuador, topologia chaveada e atrasos variantes no tempo por meio de desigualdades matriciais lineares.

Este trabalho se baseia na formulação da saturação realizada por You et al. (2016) e nas condições de análise de consenso considerando atrasos variantes no tempo realizada por Savino et al. (2016). A vantagem deste trabalho em relação ao desenvolvido por You et al. (2016) está no fato de que em sua formulação o problema é resolvido especificamente para o seguimento de líder, onde os agentes entram em consenso em relação à dinâmica de um agente específico. Além disso, os atrasos variantes no tempo considerados por ele devem ser diferenciáveis, com derivada menor do que 1. A formulação desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada para análise de consenso na existência ou não de um agente líder e não existem exigências em relação à diferenciabilidade ou à uniformidade dos atrasos. Em relação à formula-

ção realizada por Savino et al. (2016), este trabalho adiciona a saturação nos atuadores, representando assim um sistema mais realístico. Portanto, a principal contribuição está em estabelecer condições suficientes para que sistemas multiagentes sujeitos a saturação no atuador e atrasos, não necessariamente uniformes e diferenciáveis, entrem em consenso.

2 Preliminares

2.1 Notação

A transposta de uma matriz quadrada A é representada por A^T . $A > 0$ significa que a matriz A é definida positiva, I_n representa uma matriz identidade de dimensão $n \times n$. Admitimos que $\mathbb{R}^n$ se refere ao espaço Euclidiano de dimensão n . É utilizada a notação compacta $\text{diag}\{\cdot\}$ para se referir a matrizes diagonais. O símbolo $*$ é utilizado para denotar termos simétricos em uma matriz e $\otimes$ se refere ao produto de Kronecker. As seguintes propriedades deste produto são utilizadas no decorrer deste trabalho,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD),$$

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B),$$

com A, B, C e D matrizes e k um escalar constante.

2.2 Teoria de Grafos

A interação de n agentes é representada por um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ onde $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto de n nós e cada nó representa um agente. $\mathcal{E}$ é o conjunto de arestas que conectam os nós e representam os canais de comunicação. Este conjunto possui elementos dados por $e_{ij} = (v_i, v_j)$ o que significa que o agente j pode receber informação de i . O grafo $\mathcal{G}$ é direcionado se $(v_i, v_j) \in \mathcal{E} \not\Rightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$. A matriz de adjacência $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ associada ao grafo tem elementos dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \text{ ou } \nexists e_{ji} \\ 1 & \text{se } \exists e_{ji} \end{cases}.$$

Define-se também a matriz diagonal *Degree*, tal que $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_{ii}\}$ com elementos $d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$. A matriz Laplaciana associada ao grafo $\mathcal{G}$ é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}. \quad (1)$$

O conceito de subgrafo é utilizado neste trabalho. Um subgrafo $\mathcal{G}_{ai}$ do i -ésimo agente é definido como um grafo que possui o mesmo número de nós que o grafo $\mathcal{G}$ mas o conjunto de arestas é formado apenas por elementos $e_{ji} \in \mathcal{E}$ que possuem o nó v_i como nó filho.

Uma propriedade importante da matriz Laplaciana é que a soma de todos elementos de uma linha é sempre nula. Ou, de forma equivalente, tem o produto $\mathcal{L}\mathbf{1} = 0$ onde $\mathbf{1}$ é uma matriz coluna com número de linhas apropriado.

2.3 Lemas

Lema 1 (Sun et al., 2009) Para qualquer matriz constante $M = M^T > 0$ e escalares $t > t - \tau \geq 0$ em que as seguintes integrais são bem definidas, tem-se

$$\int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t z^T(\xi) M z(\xi) d\xi d\zeta$$

$$\geq \frac{2}{\tau^2} \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t z^T(\xi) d\xi d\zeta M \int_{-\tau}^0 \int_{t+\zeta}^t z(\xi) d\xi d\zeta. \quad (2)$$

Lema 2 (Seuret & Gouaisbaut, 2013) Para qualquer matriz constante $M = M^T > 0$ e escalares $t > t - \tau \geq 0$ em que as seguintes integrais são bem definidas, tem-se

$$\int_{t-\tau}^t \dot{z}^T(\xi) M \dot{z}(\xi) d\xi$$

$$\geq \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{z}^T(\xi) d\xi M \int_{t-\tau}^t \dot{z}(\xi) d\xi + \frac{3}{\tau} \Omega^T M \Omega, \quad (3)$$

com

$$\Omega = z(t - \tau) + z(t) - \frac{2}{\tau} \int_{t-\tau}^t z(\xi) d\xi.$$

3 Formulação do Problema

Neste trabalho é considerado um sistema de n agentes em uma rede direcionada com a dinâmica de cada agente dada por

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + B\varphi_{\Delta}(u_i(t - \tau_i(t))),$$

$$i = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^m$ as m variáveis de estado e $u_i \in \mathbb{R}^p$ a entrada de controle do i -ésimo agente, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ matrizes do sistema. A função $\varphi_{\Delta}(\cdot)$ definida em $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avalia a saturação da seguinte forma (You et al., 2016),

$$\varphi_{\Delta}(u_i^k) = \begin{cases} \Delta \text{sign}(u_i^k), & |u_i^k| > \Delta \\ u_i^k, & |u_i^k| < \Delta \end{cases}, \quad (5)$$

$$k = \{1, 2, \dots, p\}.$$

O modelo de saturação do atuador (5) pode ser reescrito, tal qual sugerido por You et al. (2016), de forma que se tenha uma ponte entre o modelo essencialmente não linear da saturação e a entrada linear. Assim, um parâmetro variante no tempo $h_{ik}(t)$ é definido da seguinte forma

$$h_{ik}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta}{|u_i^k|} & \text{se } |u_i^k| > \Delta \\ 1 & \text{se } |u_i^k| < \Delta \end{cases}, \quad h_{ik}(t) \in [\epsilon, 1],$$

com $\epsilon > 0$. Com isso, saturação pode ser reescrita como o produto de duas matrizes,

$$\varphi_{\Delta}(u_i) = d^i(t)u_i = \text{diag}\{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ip}\}u_i. \quad (6)$$

A função $\tau_i(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$ em (4) representa o atraso de tempo que afeta a entrada de controle do i -ésimo agente. Tal qual em Savino et al. (2016), é assumido que $\tau_i(t) = \tau + \mu_i(t)$, onde τ é um atraso médio conhecido e constante, e $\mu_i(t)$ representa um distúrbio variante no tempo

que satisfaz $|\mu_i(t)| \leq \mu_m < \tau$. O protocolo analisado para o problema de consenso foi o introduzido por Saber & Murray (2003), e é dado por

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n K a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \quad (7)$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{p \times m}$ uma matriz de ganho constante.

As condições iniciais para o problema com atraso são dadas por

$$x_i(t_0) = f_i(t_0), \quad \forall t_0 \in [-\tau - \mu_m, 0],$$

de forma que a função $f_i(t_0)$ mapeia o conjunto de condições iniciais consideradas no intervalo $[-\tau - \mu_m, 0]$. O sistema multiagentes pode ser representado através de uma única equação, considerando as equações (4) e (6),

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (I_n \otimes A)\mathbf{x}(t) + (I_n \otimes B)D(t)\mathbf{u}(t - \tau_\bullet(t)), \quad (8)$$

onde $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{u}(t - \tau_\bullet(t))$ representam o empilhamento dos n vetores de estado e das n entradas de controle, respectivamente, ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t - \tau_\bullet(t)) = \begin{bmatrix} u_1(t - \tau_1(t)) \\ u_2(t - \tau_2(t)) \\ \vdots \\ u_n(t - \tau_n(t)) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

e $D(t)$ é o empilhamento das n matrizes diagonais $d^i(t)$, tal qual definido na equação (6). Neste ponto, a definição de consenso considerada neste trabalho pode ser formalizada.

Definição 1 *O sistema de n agentes representado por (8) sob a lei de controle (7) considerando atrasos variantes no tempo, $\tau_i(t)$, e saturação no sinal de controle, $d^i(t)$, alcança o consenso se, para todo $i \neq j$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) \rightarrow 0. \quad (10)$$

4 Principais Resultados

Nesta seção serão apresentadas condições suficientes para verificar a capacidade de um sistema formado por múltiplos agentes, sujeitos a atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores, entrar em consenso. É importante observar que os sistemas analisados pelas condições aqui estabelecidas podem ser compostos por agentes de ordem arbitrária, no entanto todos os agentes devem ter o mesmo modelo, conforme a equação (4).

4.1 Sistema Multiagentes Transformado

Para transformar o problema de consenso em um problema de análise de estabilidade (Savino et al., 2016), será realizada uma transformação em

(8) de modo que as novas variáveis de estado representem a diferença entre os estados dos n agentes. A transformação é definida como

$$\mathbf{z}(t) = (U \otimes I_m)\mathbf{x}(t), \quad (11)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{1}_n \otimes x_1(t) + (W \otimes I_m)\mathbf{z}(t), \quad (12)$$

$\mathbf{z}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ são o empilhamento de $m(n-1)$ e mn variáveis de estado do sistema transformado e do sistema original, respectivamente. Além disso,

$$U = [\mathbf{1}_{n-1} \quad -I_{n-1}], \quad (13)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0_{n-1}^T \\ -I_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Através desta transformação a relação entre $\mathbf{z}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ é dada por

$$z_i(t) = x_1(t) - x_{i+1}(t). \quad (15)$$

Em (8) o produto $D(t)\mathbf{u}(t - \tau_\bullet(t))$ pode ser escrito como

$$D(t)\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} d^1(t)u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d^2(t)u_2(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d^n(t)u_n(t) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Definindo $\mathcal{V}_i$ como uma matriz $n \times 1$ de zeros exceto na i -ésima posição, na qual tem valor unitário. Então

$$D(t)\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \otimes d^i(t)u_i. \quad (17)$$

Utilizando (7) em (17),

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i \otimes d^i(t)u_i(t - \tau_i(t)) = \\ - \mathcal{V}_i \otimes d^i(t) \sum_{j=1}^n a_{ij} K (x_i(t - \tau_i(t)) - x_j(t - \tau_i(t))). \end{aligned} \quad (18)$$

Os somatórios em (18) podem ser representados utilizando as matrizes Laplacianas do subgrafo referente à cada agente, de modo que este subgrafo é um grafo de mesma ordem de $\mathcal{L}$. Assim, levando em consideração apenas as comunicações do i -ésimo agente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t - \tau_i(t)) &= (\mathcal{V}_i^T \mathcal{A}_{ai} \otimes I_m) \mathbf{x}(t - \tau_i(t)), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i(t - \tau_i(t)) &= (\mathcal{V}_i^T \mathcal{D}_{ai} \otimes I_m) \mathbf{x}(t - \tau_i(t)). \end{aligned} \quad (19)$$

Utilizando (19), (18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i \otimes d^i(t)u_i(t - \tau_i(t)) \\ = - \mathcal{V}_i \otimes d^i(t) K (\mathcal{V}_i^T \mathcal{L}_{ai} \otimes I_m) \mathbf{x}(t - \tau_i(t)). \end{aligned} \quad (20)$$

Observe que $\mathbf{x}(t - \tau_i(t))$ pode ser escrito como

$$\mathbf{x}(t - \tau_i(t)) = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \otimes \mathbf{x}_i(t - \tau_i(t)).$$

Utilizando a identidade anterior e propriedades do produto de Kronecker, (20) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_i \otimes d^i(t) u_i(t - \tau_i(t)) \\ &= - \sum_{l=1}^n \mathcal{V}_i \otimes d^i(t) K (\mathcal{V}_i^T \mathcal{L}_{ai} \otimes I_m) \mathcal{V}_l \otimes x_l(t - \tau_i(t)) \\ &= - \sum_{l=1}^n \mathcal{V}_i \otimes d^i(t) (1 \otimes K) (\mathcal{V}_i^T \mathcal{L}_{ai} \mathcal{V}_l) \otimes I_m x_l(t - \tau_i(t)) \\ &= - \sum_{l=1}^n I_n \mathcal{V}_i \otimes d^i(t) (\mathcal{V}_i^T \mathcal{L}_{ai} \mathcal{V}_l \otimes K x_l(t - \tau_i(t))) \\ &= - \sum_{l=1}^n I_n \otimes d^i(t) ((\mathcal{V}_i \otimes \mathcal{V}_i^T) \mathcal{L}_{ai} \mathcal{V}_l \otimes K x_l(t - \tau_i(t))) \\ &= - \sum_{l=1}^n I_n \otimes d^i(t) ((\mathcal{V}_i \otimes \mathcal{V}_i^T) \mathcal{L}_{ai} \otimes K \mathcal{V}_l \\ & \quad \otimes x_l(t - \tau_i(t))) \\ &= - I_n \otimes d^i(t) ((\mathcal{V}_i \otimes \mathcal{V}_i^T) \mathcal{L}_{ai} \otimes K \mathbf{x}(t - \tau_i(t))). \end{aligned} \quad (21)$$

Com (21) a equação da dinâmica do sistema (8) se torna

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (I_n \otimes A) \mathbf{x}(t) + (I_n \otimes B) \sum_{i=1}^n (-I_n \\ & \quad \otimes d^i(t) (\mathcal{V}_i \otimes \mathcal{V}_i^T) \mathcal{L}_{ai} \otimes K \mathbf{x}(t - \tau_i(t))) \\ &= (I_n \otimes A) \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^n (I_n \otimes B) \mathcal{L}_{ai} \\ & \quad \otimes d^i(t) K \mathbf{x}(t - \tau_i(t)) \\ &= (I_n \otimes A) \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{ai} \otimes B d^i(t) K \mathbf{x}(t - \tau_i(t)). \end{aligned} \quad (22)$$

Assim, combinando (11) e (22) e usando as definições em (13) e (14) temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= (U \otimes I_m) (I_n \otimes A) (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{x}_1(t)) \\ &+ (U \otimes I_m) (I_n \otimes A) (W \otimes I_m) \mathbf{z}(t) \\ &- \sum_{i=1}^n (U \otimes I_m) (\mathcal{L}_{ai} \otimes B d^i(t) K) (\mathbf{1}_n \otimes x_1(t - \tau_i(t))) \\ &- \sum_{i=1}^n (U \otimes I_m) (\mathcal{L}_{ai} \otimes B d^i(t) K) (W \otimes I_m) \mathbf{z}(t - \tau_i(t)) \\ &= (U \mathbf{1}_n \otimes A x_1(t)) + (I_{n-1} \otimes A) \mathbf{z}(t) \\ &- \sum_{i=1}^n (U \otimes I_m) (\mathcal{L}_{ai} \mathbf{1}_n \otimes B d^i(t) K x_1(t - \tau_i(t))) \\ &- \sum_{i=1}^n (U \mathcal{L}_{ai} W \otimes B d^i(t) K) \mathbf{z}(t - \tau_i(t)). \end{aligned} \quad (23)$$

Finalmente, utilizando as propriedades $\mathcal{L}_{ai} \mathbf{1} = 0$ e $U \mathbf{1} = 0$ em (23) temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= (I_{n-1} \otimes A) \mathbf{z}(t) \\ &- \sum_{i=1}^n (U \mathcal{L}_{ai} W \otimes B d^i(t) K) \mathbf{z}(t - \tau_i(t)). \end{aligned} \quad (24)$$

Partindo do princípio que os sistemas multiagentes considerados têm todos seus agentes com mesmo modelo, é conveniente assumir que a matriz $d^i(t) \in [\epsilon, 1]$ tem o mesmo valor mínimo para todos n agentes. Além disso, a variação da matriz $d^i(t)$ depende do módulo do k -ésimo elemento da entrada de controle do agente i , que por sua vez varia com o tempo e com a posição do agente i em relação ao grupo. Como estas informações não podem ser conhecidas de forma direta, é admitido que $d^i(t)$ pertence a um politopo $\mathcal{P}$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ d(\alpha^i) : d(\alpha^i) = \sum_{j=1}^{2^p} \alpha_j^i d_j, \alpha_j^i \in \Delta_{2^p} \right\}, \\ \Delta_{2^p} &= \left\{ \alpha_j^i \in \mathbb{R}^{2^p}, \sum_{j=1}^{2^p} \alpha_j^i = 1, \alpha_j^i \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

onde d_j representa os vértices do politopo e é comum para todos os agentes.

Observando que a dinâmica da rede em (24) está escrita como (15), a *Definição 1* pode ser reescrita para o problema de estabilidade da forma a seguir:

Definição 2 *O sistema composto por n agentes representado por (24), em malha fechada, alcança o consenso se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) \rightarrow 0. \quad (25)$$

4.2 Condições para Análise de Consenso

O principal resultado deste trabalho é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 1 *O sistema multiagentes (24) com $\tau_i(t) \in [\tau - \mu_m, \tau + \mu_m]$ para $\tau > 0$, $0 \leq \mu_m < \tau$ e com saturação no atuador $d^i(t)$ como definido em (6) para $i = \{1, 2, \dots, n\}$, entra em consenso se existirem matrizes: $F, G, P_1 = P_1^T, P_2, P_3 = P_3^T, Q = Q^T > 0, R = R^T > 0, S = S^T > 0$ e $Z = Z^T > 0$ com dimensões $m(n-1) \times m(n-1)$, tal que as seguintes desigualdades matriciais lineares sejam satisfeitas*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} \Phi_j & \mu_m \Gamma_j \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0, \quad (26) \\ \forall j = \{1, 2, \dots, 2^p\} \end{aligned}$$

com,

$$\Phi_j = \Phi_P + \Phi_Z + \Phi_R + \Phi_{QS} + \Phi_{FGj},$$

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} F \bar{B}_j \\ G \bar{B}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 2\mu_m Z & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_P = \begin{bmatrix} P_2 + P_2^T & P_1 & -P_2 & P_3 \\ * & 0 & 0 & P_2 \\ * & * & 0 & -P_3 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_R = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\tau}R & 0 & -\frac{2}{\tau}R & \frac{6}{\tau^2}R \\ * & \tau R & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{4}{\tau}R & \frac{6}{\tau^2}R \\ * & * & * & -\frac{12}{\tau^3}R \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{QS} = \begin{bmatrix} Q-2S & 0 & 0 & \frac{1}{\tau}S \\ * & \frac{\tau^2}{2}S & 0 & 0 \\ * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & -\frac{2}{\tau^2}S \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{FGj} = \begin{bmatrix} -F\bar{A}-\bar{A}^T F^T & F-\bar{A}^T G^T & -F\bar{B}_j & 0 \\ * & G+G^T & -G\bar{B}_j & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \bar{A} &= I_{n-1} \otimes A, \\ \bar{B}_j &= U\mathcal{L}W \otimes B d_j K. \end{aligned}$$

e $d_j, j = \{1, 2, \dots, 2^p\}$ representam os vértices do pol topo $\mathcal{P}$.

Prova: Considere o seguinte funcional Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$\begin{aligned} V(z_t) &= \chi^T(t)P\chi(t) + \int_{t-\tau}^t \mathbf{z}^T(\xi)Q\mathbf{z}(\xi)d\xi \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)R\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi ds \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+s}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)S\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi ds d\theta \\ &+ \int_{-\mu_m}^{\mu_m} \int_{t+s-\tau}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)Z\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi ds, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{com } \chi^T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T(t) & \int_{t-\tau}^t \mathbf{z}^T(\xi)d\xi \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix}$$

sendo $P_1 = P_1^T, P_2, P_3 = P_3^T, Q = Q^T, R = R^T, S = S^T$ e $Z = Z^T$ matrizes reais em $\mathbb{R}^{m(n-1) \times m(n-1)}$.

A condição de que $V(z_t) > 0$   satisfeita impondo $P > 0, Q > 0, R > 0, S > 0$ e $Z > 0$.

Agora são mostradas condições suficientes para que a função considerada satisfaça $\dot{V}(z_t) < 0$. Assim como em Savino et al. (2016), considere o termo nulo relacionado   dinâmica dos estados,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\Lambda(t) \left[\dot{\mathbf{z}}(t) - \bar{A}\mathbf{z}(t) - \sum_{i=1}^n \bar{B}^i(\alpha^i)\mathbf{z}(t - \tau_i(t)) \right] \\ &= 2\Lambda(t) \left[\dot{\mathbf{z}}(t) - \bar{A}\mathbf{z}(t) - \sum_{i=1}^n \bar{B}^i(\alpha^i)(\mathbf{z}(t - \tau) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{\mathbf{z}}(t + \xi)d\xi \right] \\ &= 2\Lambda(t) [\dot{\mathbf{z}}(t) - \bar{A}\mathbf{z}(t) - \bar{B}\mathbf{z}(t - \tau)] + v(t), \end{aligned} \quad (28)$$

onde

$$\bar{B} = \sum_{i=1}^n \bar{B}^i(\alpha^i), \quad (29)$$

$$\bar{B}^i(\alpha^i) = U\mathcal{L}_{a_i}W \otimes B d(\alpha^i)K, \quad (30)$$

$$v(t) = \sum_{i=1}^n \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} 2\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i)\dot{\mathbf{z}}(t + \xi)d\xi, \quad (31)$$

$$\Lambda(t) = [\mathbf{z}^T(t)F + \dot{\mathbf{z}}^T(t)G]. \quad (32)$$

Utilizando a desigualdade $2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b$ em (31) e escolhendo a^T e b como $\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i)$ e $\dot{\mathbf{z}}(t + \xi)$, respectivamente, e X^{-1} , uma matriz definida positiva, como $\frac{Z}{n}$, temos

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} (\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))nZ^{-1}(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))^T d\xi \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{-\tau_i(t)}^{-\tau} \dot{\mathbf{z}}^T(t + \xi)\frac{Z}{n}\dot{\mathbf{z}}(t + \xi)d\xi \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mu_m(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))nZ^{-1}(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))^T \\ &+ \int_{t-\tau-\mu_m}^{t-\tau+\mu_m} \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)Z\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Com estas considera  es, e usando o termo nulo (28) obt m-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\mathbf{z}^T(t)F\dot{\mathbf{z}}(t) + 2\dot{\mathbf{z}}^T(t)G\dot{\mathbf{z}} - 2\mathbf{z}^T(t)F\bar{A}\mathbf{z}(t) \\ &\quad - 2\dot{\mathbf{z}}^T(t)G\bar{A}\mathbf{z}(t) - 2\mathbf{z}^T(t)F\bar{B}\mathbf{z}(t - \tau) \\ &\quad - 2\dot{\mathbf{z}}^T(t)G\bar{B}\mathbf{z}(t - \tau) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \mu_m(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))nZ^{-1}(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))^T \\ &\quad + \int_{t-\tau-\mu_m}^{t-\tau+\mu_m} \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)Z\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Utilizando os Lemas 1 e 2 e adicionando (33)   derivada de $V(z_t)$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t) &\leq \chi^T(t)P\dot{\chi}(t) + \dot{\chi}^T(t)P\chi(t) + \mathbf{z}^T(t)Q\mathbf{z}(t) \\ &\quad - \mathbf{z}^T(t - \tau)Q\mathbf{z}(t - \tau) + \tau\dot{\mathbf{z}}^T(t)R\dot{\mathbf{z}}(t) \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)d\xi R \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi - \frac{3}{\tau} \Omega^T R \Omega \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2} \dot{\mathbf{z}}^T(t)S\dot{\mathbf{z}}(t) - 2\mathbf{z}^T(t)S\mathbf{z}(t) \\ &\quad + \frac{4}{\tau} \mathbf{z}^T(t)S \int_{t-\tau}^t \mathbf{z}(\xi)d\xi \\ &\quad - \frac{2}{\tau^2} \int_{t-\tau}^t \mathbf{z}^T(\xi)d\xi S \int_{t-\tau}^t \mathbf{z}(\xi)d\xi + 2\mu_m \dot{\mathbf{z}}^T(t)Z\dot{\mathbf{z}}(t) \\ &\quad - \int_{t-\tau-\mu_m}^{t-\tau+\mu_m} \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)Z\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi + 2\mathbf{z}^T(t)F\dot{\mathbf{z}}(t) \\ &\quad + 2\dot{\mathbf{z}}^T(t)G\dot{\mathbf{z}}(t) - 2\mathbf{z}^T(t)F\bar{A}\mathbf{z}(t) - 2\dot{\mathbf{z}}^T(t)G\bar{A}\mathbf{z}(t) \\ &\quad - 2\mathbf{z}^T(t)F\bar{B}\mathbf{z}(t - \tau) - \dot{\mathbf{z}}^T(t)G\bar{B}\mathbf{z}(t - \tau) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \mu_m(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))nZ^{-1}(\Lambda(t)\bar{B}^i(\alpha^i))^T \\ &\quad + \int_{t-\tau-\mu_m}^{t-\tau+\mu_m} \dot{\mathbf{z}}^T(\xi)Z\dot{\mathbf{z}}(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

Definindo

$$\Gamma^i(\alpha^i) = \begin{bmatrix} F\bar{B}^i(\alpha^i) \\ G\bar{B}^i(\alpha^i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon^T = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T(t) & \dot{\mathbf{z}}^T(t) & \mathbf{z}^T(t-\tau) & \int_{t-\tau}^t \mathbf{z}^T(\xi)d\xi \end{bmatrix},$$

e $\bar{\Phi}$ tal qual Φ_j definido no teorema, com a diferença que em $\bar{\Phi}$ utilizamos os termos $-F\bar{B}$ e $-G\bar{B}$, com $\bar{B}$ definido em (29), ao invés de $-F\bar{B}_j$ e $-G\bar{B}_j$, respectivamente, temos então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t) &\leq \Upsilon^T(t)\bar{\Phi}\Upsilon(t) \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu_m \Upsilon^T(t)\Gamma^i(\alpha^i)nZ^{-1}\Gamma^{iT}(\alpha^i)\Upsilon(t) \\ &= \Upsilon^T(t) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\bar{\Phi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_m \Gamma^i(\alpha^i)nZ^{-1}\Gamma^{iT}(\alpha^i) \right) \right) \Upsilon(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Logo, para a desigualdade em (35) ser satisfeita, com $\dot{V}(z_t) < 0$, o termo entre parêntesis deve ser definido negativo. O qual pode ser reescrito de forma linear considerando o complemento de Schur,

$$\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\bar{\Phi} & \mu_m \Gamma^i(\alpha^i) \\ * & -\frac{\mu_m}{n}Z \end{bmatrix} < 0,$$

se cada termo da soma for definido negativo, então a soma dos n termos é definida negativa. Considerando o i -ésimo termo da soma e o politopo $\mathcal{P}$ temos,

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2^p} \alpha_j^i \frac{1}{n}\bar{\Phi}_j & \sum_{j=1}^{2^p} \alpha_j^i \mu_m \Gamma_j^i \\ * & \sum_{j=1}^{2^p} \alpha_j^i \frac{-\mu_m}{n}Z \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

como α_j^i é sempre positivo, para verificar se (36) é definida negativa pode-se verificar se é definida negativa nos vértices do politopo $\mathcal{P}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n}\Phi_j & \mu_m \Gamma_j^i \\ * & \frac{-\mu_m}{n}Z \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

com $j = \{1, 2, \dots, 2^p\}$. Observando que, $\bar{\Phi}_j = \Phi_j$. Considerando novamente a soma em i , mas desta vez nos vértices do politopo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\Phi_j & \mu_m \Gamma_j^i \\ * & \frac{-\mu_m}{n}Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_j & \mu_m \Gamma_j \\ * & -\mu_m Z \end{bmatrix} < 0, \\ j &= \{1, 2, \dots, 2^p\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Portanto, se a condição (26) se mantém em todos os vértices de $\mathcal{P}$ então $V(t) > 0$ e $\dot{V}(t) < 0$.

Isto completa a prova. $\square$

O resultado apresentado no teorema anterior comparado com o resultado de Savino et al. (2016), considera a saturação no atuador de cada agente. Note que a matriz responsável por modelar a saturação $d^i(t)$ tem o limite inferior conhecido em modelos de agentes estabelecidos. Nestes

casos, os resultados apresentados podem ser utilizados para definir se o sistema é capaz de entrar em consenso. A busca pelos menores valores também pode ser realizada em sistemas em que os limites dos atuadores não estão definidos.

5 Exemplo Numérico

Considere um sistema composto por quatro agentes, no qual cada agente recebe informação de apenas um único agente vizinho, tal como ilustrado na Figura 1.

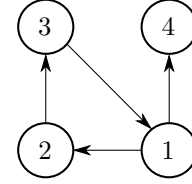


Figura 1: Representação em grafo do problema

A equação da dinâmica do i -ésimo agente é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_i^1(t) \\ \dot{x}_i^2(t) \\ \dot{x}_i^3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^1(t) \\ x_i^2(t) \\ x_i^3(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} d^i(t)u_i(t), \end{aligned} \quad (39)$$

e o atuador de todos os agentes do sistema estão sujeitos a uma saturação $d^i(t)$. A matriz Laplaciana $\mathcal{L}$ associada ao grafo $\mathcal{G}$ é dada por,

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

as condições iniciais consideradas são:

$$\begin{bmatrix} x_1^1(0) \\ x_2^1(0) \\ x_3^1(0) \\ x_4^1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -150 \\ -90 \\ 20 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1^2(0) \\ x_2^2(0) \\ x_3^2(0) \\ x_4^2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$x_i^3(0) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } K = [0.3 \quad 1 \quad 1].$$

O Teorema 1 foi utilizado para realizar a busca pelo menor valor de ϵ para o sistema. Para ilustrar, diferentes valores de ϵ foram calculados em um intervalo de atraso médio, τ , como representado na Figura 2. Durante a busca o valor de μ_m foi mantido fixo em 0.05 e os valores de τ foram variados. Para simular o atraso variante, $\mu_i(t)$, foi utilizado uma função que gera números aleatórios uniformemente distribuídos.

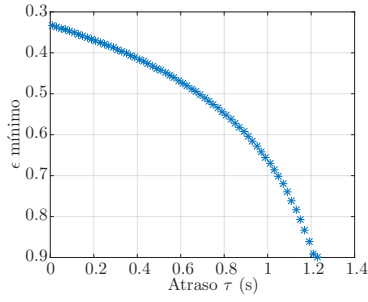


Figura 2: Valores de ϵ para diferentes atrasos

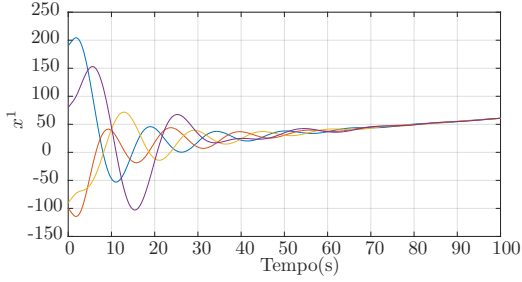


Figura 3: Progressão da variável de estado x^1

Nas Figuras 3, 4, 5 e 6 estão representadas a dinâmica de cada variável de estado dos 4 agentes do sistema, com a simulação realizada para valores da matriz $d^i(t) \in [0.58, 1]$, atraso médio $\tau = 0.8$ e $\mu_m = 0.05$. Na Figura 6 está disposta a entrada de controle de cada agente, considerando-se a saturação de forma que a magnitude do sinal de controle não ultrapasse o limite considerado para os atuadores.

Já nas Figuras 7, 8, 9 e 10 o mesmo sistema foi simulado com os mesmos valores de τ e μ_m , mas com $\epsilon = 0.15$, fora da região de convergência garantida pelo *Teorema 1*. Neste caso, no tempo de simulação realizado, o sistema não se estabilizou.

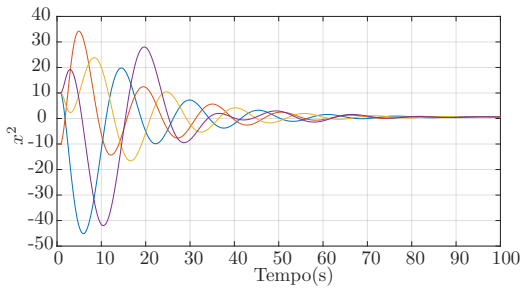


Figura 4: Progressão da variável de estado x^2

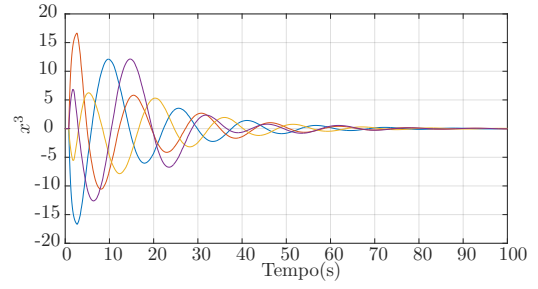


Figura 5: Progressão da variável de estado x^3

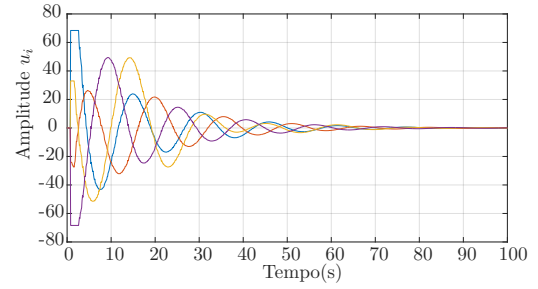


Figura 6: Amplitude de $u_i(t)$

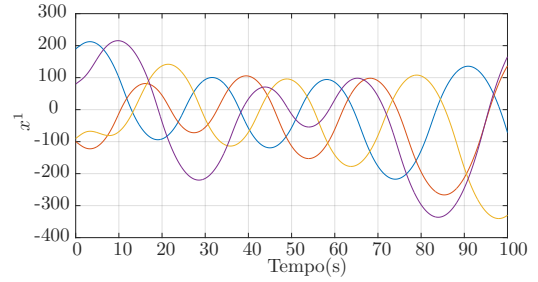


Figura 7: Variável de estado x^1 para $\epsilon = 0.15$

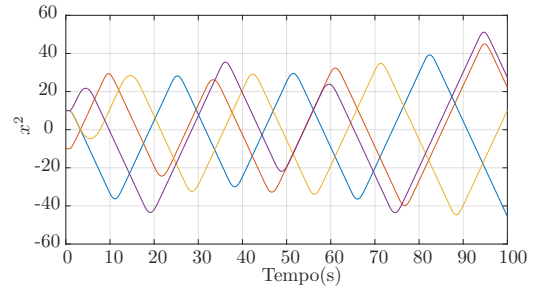


Figura 8: Variável de estado x^2 para $\epsilon = 0.15$

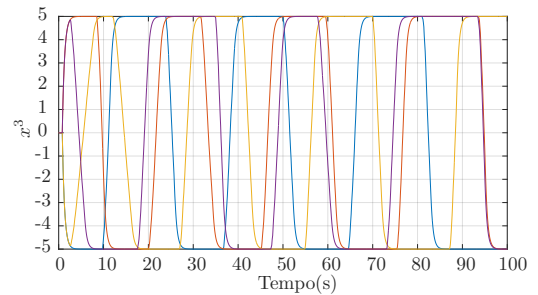


Figura 9: Variável de estado x^3 para $\epsilon = 0.15$

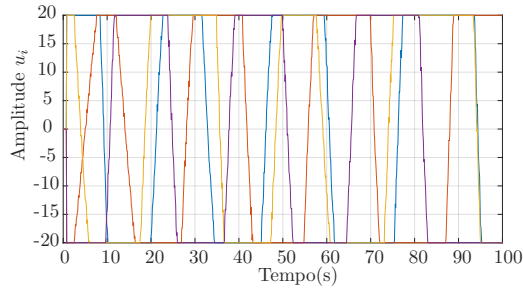


Figura 10: Amplitude dos sinais de controle, $u_i(t)$, para $\epsilon = 0.15$

6 Conclusão

Neste trabalho foram investigadas condições suficientes para verificar se sistemas multiagentes sujeitos a atrasos variantes no tempo e saturação no atuador entram em consenso. Através da abordagem realizada é possível encontrar uma região, em relação à saturação e ao atraso no tempo, na qual o sistema é capaz de entrar em consenso. No entanto, para chegar ao *Teorema 1* foram utilizadas técnicas conservadoras, por exemplo a condição de estabilidade quadrática nos vértices do polítopo com matrizes constantes e a exigência que os n termos no somatório em (35) fossem definidos negativo. Além disso, a topologia de comunicação invariante não representa a maior parte da classe de problemas de consenso. Estas limitações serão investigadas em trabalhos posteriores.

Ao final foi apresentado um exemplo numérico para ilustrar a utilização dos resultados, onde é possível verificar, através da Figura 2, que houve um compromisso entre atraso, τ , e saturação, ϵ , ou seja, a saturação restringe o atraso temporal máximo que o sistema suporta.

Agradecimentos

Agradecimentos às agências de fomento à pesquisa Capes, CNPq e FAPEMIG.

Referências

- Cui, G., Xu, S., Lewis, F. L., Zhang, B. & Ma, Q. (2016). Distributed consensus tracking for non-linear multi-agent systems with input saturation: a command filtered backstepping approach, *IET Control Theory Applications* **10**(5): 509–516.
- Li, H., Zhu, Y., jing, L. & ying, W. (2018). Consensus of second-order delayed nonlinear multi-agent systems via node-based distributed adaptive completely intermittent protocols, *Applied Mathematics and Computation* **326**: 1 – 15.
- Liu, Z., Wang, L. & Baras, J. S. (2016). Distributed hybrid consensus of second-order dy-

namics over proximity nets, *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 4273–4277.

- Mao, J., Karimi, H. R. & Xiang, Z. (2017). Observer-based adaptive consensus for a class of nonlinear multiagent systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* **PP**(99): 1–8.
- Olfati-Saber, R. & Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(9): 1520–1533.
- Qin, W., xin Liu, Z. & qiang Chen, Z. (2015). Observer-based consensus for nonlinear multi-agent systems with intermittent communication, *Neurocomputing* **154**: 230 – 238.
- Saber, R. O. & Murray, R. M. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents, *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, Vol. 2, pp. 951–956.
- Savino, H., Souza, F. & Pimenta, L. (2016). Consensus with guaranteed convergence rate of high-order integrator agents in the presence of time-varying delays, *International Journal of Systems Science* **47**(10): 2475–2486.
- Seuret, A. & Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems, *Automatica* **49**(9): 2860 – 2866.
- Su, H., Qiu, Y. & Wang, L. (2017). Semi-global output consensus of discrete-time multi-agent systems with input saturation and external disturbances, *ISA Transactions* **67**: 131 – 139.
- Sun, J., Liu, G. P. & Chen, J. (2009). Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **19**(12): 1364–1375.
- Wen, G., Yu, W., Xia, Y., Yu, X. & Hu, J. (2017). Distributed tracking of nonlinear multiagent systems under directed switching topology: An observer-based protocol, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* **47**(5): 869–881.
- You, X., Hua, C., Peng, D. & Guan, X. (2016). Leader-following consensus for multi-agent systems subject to actuator saturation with switching topologies and time-varying delays, *IET Control Theory Applications* **10**(2): 144–150.