

CONTROLADOR PREDITIVO COM ESTABILIDADE GARANTIDA EM DUAS CAMADAS PARA SISTEMAS COM POLOS INTEGRADORES REPETIDOS

ERBET ALMEIDA COSTA*, IGOR M. L. PATARO*, FILIPE S. PACHECO*, MÁRCIO A. F. MARTINS*

**PPGM - Programa de Pós-Graduação em Mecatrônica
Universidade Federal da Bahia
Salvador, Bahia, Brasil*

Abstract — This work proposes a nominally stabilizing model predictive control for integrating systems with repeated poles. The proposed method covers the formulation put forward by Costa et al. (2017), so that the resulting control law is obtained from a sequential solution of two optimization problems. This two-layer approach aims to force the convergence of the slack variables associated with integrating states more quickly than in the previous approach. The controller is tested in a Hover model, for the scenarios of output tracking and rejection of disturbances.

Keywords — Model Predictive Control, Integrating systems, Closed-loop stability

Resumo — O trabalho apresentado propõe um controlador preditivo nominalmente estável para sistemas com polos integradores repetidos. O método apresentado neste trabalho abrange a formulação proposta por Costa et al. (2017) estendendo-a para uma lei de controle resultante de uma solução sequencial de dois problemas de otimização. Esta nova abordagem, em duas camadas, tem como objetivo forçar a convergência das variáveis de folga associadas aos estados integradores de forma mais rápida do que na abordagem anterior. O controlador é testado em um modelo de Hover, para os cenários servomecanismo e rejeição de distúrbios.

Palavras-chave — Controle preditivo, Sistemas integradores, Estabilidade em malha fechada

1 Introdução

Técnicas de controle preditivo (MPC) que garantem a estabilidade nominal em malha fechada, independentemente da sintonia utilizada para os parâmetros, são denominadas de MPC com estabilidade nominal garantida. Mayne (2014) revisa os métodos de MPC e indica, como principal caminho para alcançar a estabilidade, a viabilidade recursiva do controlador e a adoção de funções objetivo com horizonte de predição infinito (IHMPC).

Ao investigar as diferentes técnicas de controle nominalmente estáveis, Rossiter (2003) as estratifica segundo a forma do problema de otimização e o mecanismo de limitação da função objetivo adotado, quais sejam: i) modo dual; ii) restrições terminais. González et al. (2011), por sua vez, indicam que a viabilidade do problema no modo dual é limitada por questões relativas ao tamanho do domínio de atração, custo computacional e desempenho do otimizador.

González et al. (2011) sugerem então utilizar a abordagem com restrições terminais para limitar o custo e, com esta formulação, a principal referência é o trabalho seminal do Rawlings e Muske (1993). Esse controlador, possui bom desempenho para o caso regulador, todavia no cenário servomecanismo apresenta algumas dificuldades de convergência. Desta forma, Rodrigues e Odloak (2003) propõem a extensão do trabalho de Rawlings e Muske (1993) através de um novo IHMPC livre de erro de regime, adequado tanto ao caso servomecanismo quanto ao regulador e efetivo na compensação de distúrbios.

Os esforços posteriores foram no sentido de

preencher algumas lacunas e ampliar as propriedades estabilizantes dos controladores. Dois progressos importantes foram apresentados por Odloak (2004) e Carrapiço e Odloak (2005). O primeiro deles é a combinação dos métodos de Rawlings e Muske (1993) e Rodrigues e Odloak (2003) que culminou na construção de um controlador aplicável ao caso servomecanismo, com domínio de atração expandido através do uso variáveis de folga que suavizam as restrições terminais referentes à predição. O segundo avanço, apresentado por Carrapiço e Odloak (2005), foi a expansão para abarcar sistemas com polos integradores e, de modo consecutivo, a inclusão variáveis de folga para suavizar as restrições terminais referentes aos polos integradores, ampliando ainda mais o domínio de atração e garantindo a factibilidade do problema. Ambas as funções objetivo são construídas de forma que sejam limitadas e decrescentes, tal qual uma função de Lyapunov.

Considerando o controle de sistemas eletromecânicos, uma característica comum é a existência de polos integradores duplos. Um destes é uma simulação de quadricóptero em base fixa que possui quatro variáveis manipuláveis para controlar três estados do sistema. A literatura apresenta alguns resultados da aplicação de diversas técnicas de controle nesse sistema, dentre eles está a combinação entre *feedforward* e *feedback* (Kara-Mohamed, 2017), e também *fuzzy* (Pitarch e Sala, 2014), entretanto essas abordagens não possuem mecanismos que garantem a estabilidade da malha fechada. Um controlador IHMPC que segue os conceitos de Carrapiço e Odloak (2005) e passível de implementação no quadricóptero foi

apresentado por Costa et al. (2017). Esse controlador é resolvido em uma camada de otimização para o caso servomecanismo e, empiricamente, apresenta as propriedades estabilizantes requeridas.

Este trabalho apresenta uma extensão dos resultados apresentados por Costa et al. (2017) ampliando as propriedades estabilizantes através da construção do controlador IHMPC com uma camada de otimização adicional responsável por forçar as variáveis de folga associadas aos estados integradores para zero. Este controlador é aplicado em um modelo de quadricóptero e comparado com o controlador proposto no trabalho de Costa et al. (2017).

2 Formulação do Modelo

A construção do IHMPC requer que a modelagem seja feita em um espaço de estados específico, seguindo o modelo apresentado por Costa et al. (2017), a saber:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^i \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^i \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ny \times nu}^s \\ \mathbf{B}_{nd \times nu}^i \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ny} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s \\ \mathbf{x}^i \end{bmatrix}_k, \quad (2)$$

em que $\mathbf{x}^s$ é vetor de estados integradores artificiais, adicionados pela resposta ao degrau do sistema e $\mathbf{x}^i$ o vetor de estados integradores, correspondentes aos polos reais do sistema, e que podem se repetirem ni vezes. Na notação utilizada, ny é a quantidade de saídas do sistema, nu é a quantidade de entradas, ni é a quantidade de polos integradores repetidos e $nd = nu \cdot ni \cdot ny$. $\mathbf{0}$ é uma matriz nula de dimensões apropriadas ao enquadramento. Já as matrizes $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}^s$ e $\mathbf{B}^i$ são construídas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} \Delta t \mathbf{I}_{1,(ny,ny)} & \binom{2}{0} \Delta t^2 \mathbf{I}_{2,(ny,ny)} \\ \binom{3}{0} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3,(ny,ny)} & \dots & \Delta t^{ni} \mathbf{I}_{ni,(ny,ny)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \binom{1}{1} \mathbf{I}_f & \binom{2}{1} \Delta t^2 \mathbf{I}_f & \dots & \binom{n}{1} \Delta t^{ni-1} \mathbf{I}_f \\ 0 & \binom{2}{2} \mathbf{I}_f & \dots & \binom{n}{2} \Delta t^{n-2} \mathbf{I}_f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \mathbf{I}_f \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1}^s & \mathbf{B}_{1,2}^s & \dots & \mathbf{B}_{1,nu}^s \\ \mathbf{B}_{2,1}^s & \mathbf{B}_{2,2}^s & \dots & \mathbf{B}_{2,nu}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{ny,1}^s & \mathbf{B}_{ny,2}^s & \dots & \mathbf{B}_{ny,nu}^s \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_{i,j}^s = d_{i,j}^s + \sum_{l=i}^{ni} d_{i,j,l}^{ni} \Delta t^l, \quad (6)$$

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} D_{1,1,1}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{1,1,2}^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D_{ni,ny,nu}^i \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$D_{l,i,j}^i = \sum_{f=i}^{ni} \binom{f}{l} d_{l,i,j}^i \Delta t^{f-l}, \quad (8)$$

nas quais Δt é o tempo de amostragem utilizado para parametrizar as curvas de resposta das funções de transferência do sistema. $\mathbf{I}_n$ são matrizes identidades de dimensão n apropriadas ao contexto. Os conjuntos de constantes $d_{l,i,j}^i$, $i = 1, \dots, ny$; $j = 1, \dots, nu$; $l = 1, \dots, ni$; e $d_{i,j}^s$ são relativos aos termos da função de transferência e são associados aos estados integradores reais do sistema e aos integradores artificiais, respectivamente.

3 IHMPC para sistemas com múltiplos estados integradores

O controlador apresentado por Costa et al. (2017) é definido através do problema de otimização:

Problema P1:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\delta}_{y,k}, \boldsymbol{\delta}_{i,k}} J_{1,k}, \quad (9)$$

sujeito a:

$$U = \begin{cases} \Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u}(k+j|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \\ \Delta \mathbf{u}(k+j|k) = 0, \quad j > m, \\ \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{u}_{\max}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{x}^s(k+m|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{x}^i(k+m|k) - \boldsymbol{\delta}_{i,k} = 0, \quad (12)$$

em que:

$$J_{1,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \boldsymbol{\delta}_{y,k} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma}_{(j-m)} \boldsymbol{\delta}_{i,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_{i,k}\|_{\mathbf{S}_i}^2, \quad (13)$$

cujas matrizes $\boldsymbol{\Gamma}_j$ é definida, genericamente, como:

$$\boldsymbol{\Gamma}_j = \sum_{i=0}^j \mathbf{F}^i, \quad (14)$$

m é o horizonte de controle, $\mathbf{Q}_{y(ny \times ny)}$ é a matriz de ponderação do erro de regime, $\mathbf{R}_{(nu \times nu)}$ a matriz de supressão de movimentos e $\mathbf{y}_{sp}$ o vetor de referências das saídas. $\boldsymbol{\delta}_{y(1,ny)}$ são as variáveis de folga da restrição dos estados integradores artificiais e $\boldsymbol{\delta}_{i(1,ni)}$ são as variáveis de folga dos estados integradores naturais repetidos. $\mathbf{S}_y$ e $\mathbf{S}_i$ são as matrizes de supressão do uso das variáveis de folga,

positiva-definidas, e seus valores mínimos são discutidos em Costa (2017) e, usualmente, definidos milhares de vezes maior do que as matrizes $\mathbf{Q}_y$ e $\mathbf{R}$.

O problema de otimização formulado por Costa et al. (2017) respeita as condições de estabilidade impostas a um controlador de horizonte infinito, a saber, viabilidade recursiva e função monotonicamente decrescente, unicamente após as variáveis de folga referentes aos estados integradores convergirem para zero. A contração de tais variáveis está condicionada ao uso de matrizes de supressão com valores elevados, forçando o otimizador a utilizar as variáveis somente quando necessário já que o **Problema P1** não possui mecanismo que force o decrescimento monotônico.

4 Formulação do controlador em duas camadas

Existem dois mecanismos capazes de forçar a contração das variáveis de folga associadas aos estados integradores do sistema. O primeiro deles seria o uso de uma restrição não linear convexa de contração no **Problema P1**, todavia isso transforma um problema quadrático de fácil solução em um problema de otimização não linear. Esse fato torna a aplicação inviável em sistemas de dinâmica rápida, como os eletromecânicos.

A abordagem alternativa, proposta neste trabalho, é transformar o **Problema P1** em dois problemas quadráticos, especificamente:

Problema P2(a):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_{a,k}, \delta_{i,k}} J_{a,k},$$

sujeito à (12) e:

$$\mathbf{x}_a^i(k+m|k) - \delta_{i,k} = 0, \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{a,k} \in U, \quad (16)$$

nas quais,

$$\Delta \mathbf{u}_{a,k} = [\Delta \mathbf{u}_a(k|k)^\top \quad \Delta \mathbf{u}_a(k+1|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}_a(k+m-1|k)^\top]^\top, \quad (17)$$

$$J_{a,k} = \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}_a(k+j|k)\|_{\mathbf{R}^2}^2 + \|\delta_{i,k}\|_{\mathbf{S}_i}^2. \quad (18)$$

Este problema de otimização continua sendo sempre viável, assim os estados integradores no fim do horizonte de controle com a solução ótima desse problema são incluídos como restrição do segundo problema de controle, tal qual:

Problema P2(b):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_{b,k}, \delta_{y,k}} J_{b,k},$$

sujeito à (11) e:

$$\mathbf{x}_b^i(k+m|k) = \mathbf{x}_a^{i*}(k+m|k), \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{b,k} \in U, \quad (20)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{b,k} = [\Delta \mathbf{u}_b(k|k)^\top \quad \Delta \mathbf{u}_b(k+1|k)^\top \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}_b(k+m-1|k)^\top]^\top, \quad (21)$$

em que:

$$J_{b,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \delta_{y,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}_b(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\delta_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2. \quad (22)$$

Observação: Considerando o **Problema P2(a)**, a solução é sempre factível, trivial, ou seja, como o peso S_i é mantido grande as variáveis de folga deste problema são zeradas rapidamente (em finitos passos). Neste contexto, a partir do instante em que as variáveis de folga dos estados integradores são zeradas, a solução sequencial dos **Problema P2(a)** e **Problema P2(b)** pode ser condensada da seguinte forma:

Problema P3:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_k, \delta_{y,k}} J_k,$$

sujeito à (10), (11) e:

$$\mathbf{x}^i(k+m|k) = \mathbf{0}, \quad (23)$$

$$J_{3,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+j|k) - \mathbf{y}_{sp} - \delta_{y,k}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+j|k)\|_{\mathbf{R}}^2 + \|\delta_{y,k}\|_{\mathbf{S}_y}^2. \quad (24)$$

Portanto, a lei de controle obtida a partir da solução do **Problema P3** conduz à convergência assintótica das saídas do sistema ao valor de referência, sumarizada pelo teorema apresentado a seguir.

Teorema 1. Seja um sistema não perturbado com polos integradores repetidos, com o par de matrizes estabilizáveis $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Então, as ações de controle obtidas através da solução sequencial do **Problema P3** garantem o decrescimento monotônico da função objetivo e conduzem a saída do sistema para a sua referência desejada, se esta for realizável, do contrário o ponto de equilíbrio atingido estará numa distância mínima em relação ao estado estacionário desejado.

Prova. A prova deste Teorema é baseada nos conceitos apresentados por Rawlings e Muske (1993), também explorados por Carrapiço e Odloak (2005). Posto que o modelo do sistema é igual ao de predição, a solução herdada no instante $k+1$

também irá satisfazer as restrições terminais. De modo adicional, o valor da função objetivo, considerando a solução ótima, é $J_{3,k}^*$. Utilizando a solução herdada calcula-se o novo valor da função objetivo para o instante seguinte $\tilde{J}_{3,k+1} \leq J_{3,k}^*$. Por se tratar de um sistema nominal, a solução ótima no instante $k + 1$ irá coincidir com a encontrada em k , desta forma, $\tilde{J}_{3,k+1} = J_{3,k+1}^*$ e isto implica em $J_{3,k+1}^* \leq J_{3,k}^*$. Portanto, a função objetivo definida pelo **Problema P3** é assintoticamente decrescente caso o estado estacionário seja atingível, do contrário convergirá para um estado mínimo que representa a menor distância possível entre o desejado e o atingível, qual seja: $J_{3,\infty} = \|\delta_{y,\infty}\|_{\mathbf{S}_y}^2$.

5 Resultados de Simulação

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação para um sistema eletromecânico Hover (Kit Didático da Quanser), que simula um quadricóptero e é constituído de um conjunto planar com quatro propulsores montados sobre um pivô, cujo diagrama esquemático é mostrado na Figura 1. Os propulsores são acionados por motores de corrente contínua (CC), usados diretamente para controle das atitudes: arfagem, guinada e rolagem (ângulos de inclinação dos eixos).

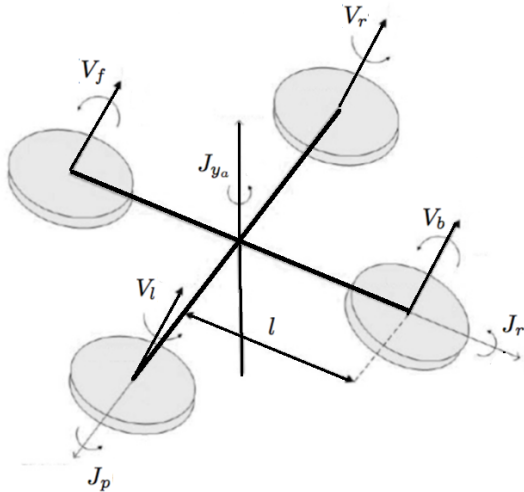


Figura 1: Esquema do Kit didático Quanser - HOVER.

Fonte: Apkarian e Lévis (2013).

O sistema possibilita o controle de três estados a partir da manipulação de quatro entradas. As equações diferenciais linearizadas do sistema são:

$$J_p \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = l \cdot K_f (V_f - V_b) \quad (25)$$

$$J_r \left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right) = l \cdot K_f (V_r - V_l) \quad (26)$$

$$J_{ya} \left(\frac{\partial^2 y_a}{\partial t^2} \right) = K_{ch} (V_f - V_b) + K_n (V_r - V_l), \quad (27)$$

nas quais J_p , J_r e J_y são os momentos de inércia sobre o eixo arfagem, rolagem e guinada, respectivamente. p é o ângulo de arfagem, r é o ângulo de rolagem e y_a o ângulo de guinada. A distância entre o rotor e o centro do corpo é l , K_f é a constante de empuxo, K_{ch} é a constante de torque-empuxo anti-horária e K_n é a constante normal de toque-empuxo. As variáveis manipuladas do sistema são as tensões aplicadas aos motores CC dos propulsores frontal V_f , direito V_r , esquerdo V_l e traseiro V_b .

Assim, a matriz de função de transferência é escrita como:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{ch}}{J_{ya} \cdot s^2} & \frac{-K_{ch}}{J_{ya} \cdot s^2} & \frac{K_n}{J_{ya} \cdot s^2} & \frac{-K_n}{J_{ya} \cdot s^2} \\ \frac{l \cdot K_f}{J_p \cdot s^2} & \frac{-l \cdot K_f}{J_p \cdot s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l \cdot K_b}{J_r \cdot s^2} & \frac{-l \cdot K_b}{J_r \cdot s^2} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

No entanto, para sintetizar o controlador, a função de transferência da Equação (28) foi parametrizada e escrita no formato de espaço de estados desenvolvido por Costa et al. (2017).

Os testes consistem em comparar o controlador IHMPC em duas camadas proposto no **Problema P2**, *Controlador 1*, com o IHMPC em apenas uma camada do **Problema P1**, *Controlador 2* e comprovar a estabilidade e o decaimento monotônico do custo da função objetivo proposta no **Problema P2**.

A simulação foi realizada para um tempo de amostragem igual a um segundo, $\Delta t = 1$ s, os valores das constantes foram substituídos conforme especificações do manual do equipamento (Apkarian e Lévis, 2013) e os parâmetros de sintonia proposto para os dois controladores foram definidos conforme Tabela 1.

Tabela 1: Tabela de Parâmetros de Sintonia

Parâmetro	Valor
m	3
$\mathbf{Q}_y$	$\text{diag}(1, 1, 1)$
$\mathbf{R}$	$\text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
$\mathbf{S}_y$	$10^6 \text{diag}(1, 1, 1)$
$\mathbf{S}_i$	$10^6 \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
$y_{\max}$	$\pi/4$ [rad]
$y_{\min}$	$-\pi/4$ [rad]
$\mathbf{u}_{\max}$	$24 \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ [V]
$\mathbf{u}_{\min}$	$\text{diag}(0, 0, 0, 0)$ [V]
$\Delta \mathbf{u}$	$10 \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ [V]

O sistema parte do estado estacionário $\mathbf{y}_{ss} = [0, 0, 0]^T$ rad e $\mathbf{u}_{ss} = [2, 2, 2, 2]^T$ V com uma mudança de referência para $\mathbf{y}_{sp} = [\pi/6, -\pi/6, \pi/6]^T$ rad. No instante $t = 10$ s é inserido um distúrbio não medido do tipo impulso nas entradas, com amplitude $d = [0, 3 \quad -0, 5 \quad 0, 2 \quad -0, 6]$ V.

A Figura 2 mostra as saídas do sistema, geradas pelas ações de controle calculadas pelos con-

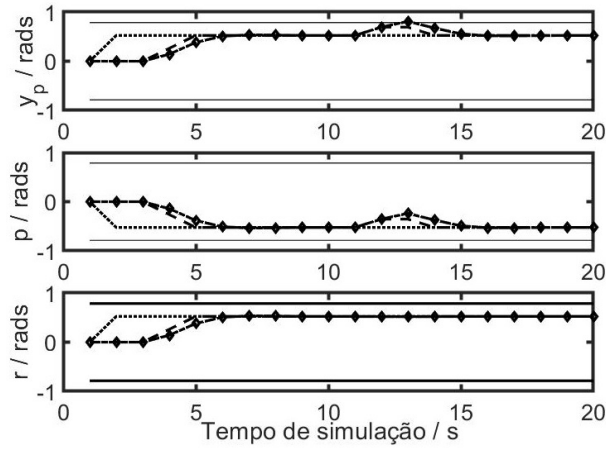


Figura 2: Saída do sistema para mudança de variável e absorção de distúrbio. (— Limites superior e inferior; ··· Referência; —◇— Controlador 1; --- Controlador 2).

troladores. Nela é possível perceber que os controladores são equivalentes, tanto para o caso servomecanismo quanto para o caso de atenuação de distúrbios, porém o *Controlador 2* apresenta uma resposta ligeiramente mais rápida que o *Controlador 1* para o caso servomecanismo.

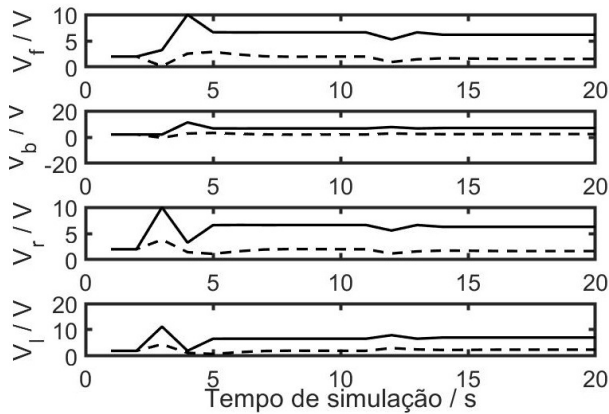


Figura 3: Entradas do sistema para mudança de variável e absorção de distúrbio. (- - - Controlador 1; — Controlador 2).

A Figura 3 também mostra que o *Controlador 1* possui variações menores das entradas. Uma vez que o *Controlador 2* produz ações de controle mais agressivas, o comportamento observado na Figura 2 é coerente. Por outro lado, é interessante ponderar que os controladores calculam um conjunto de entradas, inclusive pontos de equilíbrio distintos, que produzem a mesma saída. Esse é um comportamento típico de sistemas integradores. Do ponto de vista energético, é importante que o controlador leve a variável manipulada para um estado mínimo quando a referência da saída for alcançada, pois implicará em maior eficiência energética. Nesse aspecto, o controlador com duas ca-

madras possui um comportamento mais adequado, visto que impeliu as entradas a voltarem para o ponto inicial $\mathbf{u}_{ss}$.

O comportamento das variáveis de folga, relativas aos estados naturais do sistema, é mostrado na Figura 4. São mostradas aos pares para cada uma das três saídas e os resultados mostram que são utilizadas no estado transitório do sistema e zeradas antes que as saídas atinjam a referência e, portanto, os estados integradores reais do sistema confluem à origem. Portanto, a ativação se restringe aos instantes imediatamente após as perturbações no sistema, isto é, mudança de referência conjunta para todas as saídas, e ao segundo momento quando há a introdução de um distúrbio não medido nas entradas.

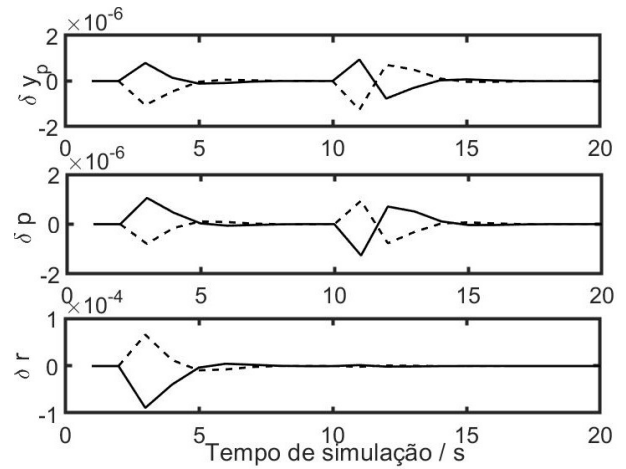


Figura 4: Variáveis de folga $\delta_{i,k}$ para cada saída. (— Primeiro estado integrador real do sistema; - - Segundo estado integrador real do sistema).

O comportamento da função objetivo é um dos aspectos utilizados para a prova de estabilidade do controlador de horizonte infinito. A Figura 5 permite comparar os valores das funções custo do *Controlador 1* e *Controlador 2*. Nos primeiros instantes da simulação o valor da função objetivo $J_{b,k}$ não decresce, isto ocorre pois, ainda neste momento, as variáveis de folga $\delta_{i,k}$ ainda não foram zeradas. Nos instantes subsequentes, com a convergência das variáveis de folga, o valor da função objetivo $J_{a,k}$ dirige-se a zero e, por sua vez, a função objetivo do **Problema 2(b)** torna-se monotonicamente decrescente e converge para zero.

6 Conclusão

Este artigo apresentou a construção e aplicação de um controlador preditivo com estabilidade nominal garantida, em duas camadas de otimização, para sistemas com polos integradores repetidos. Baseado nos resultados encontrados, as principais observações são que:

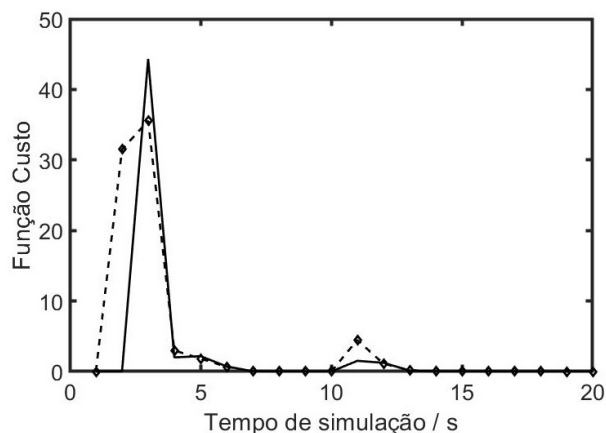


Figura 5: Valor da Função Objetivo. (— Controlador 1; - - - Controlador 2)

- ambos os controladores são efetivos nos casos testados, a saber, busca de referência e atenuação de distúrbios;
- o controlador em duas camadas, possui factibilidade mesmo utilizando horizonte de controle inferior ao número de estados instáveis do sistema;
- a camada superior leva as variáveis de folga para zero, tal como esperado;
- o controlador apresentado calculou entradas mais eficientes, do ponto de vista energético, para os casos simulados;
- o controlador proposto não apresenta perda de desempenho quando comparado ao controlador em apenas uma camada.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Centro de Capacitação Tecnológica em Automação Industrial - CTAI da UFBA por disponibilizar a infraestrutura dos laboratórios de Controle.

Referências

- Apkarian, J. Q. e Lévis, M. Q. (2013). LABORATORY GUIDE 3 DOF Hover Experiment for MATLAB/Simulink Users.
- Carrapiço, O. L. e Odloak, D. (2005). A stable model predictive control for integrating processes, *Computers and Chemical Engineering* **29**(5): 1089–1099.
- Costa, E. A. (2017). *Controle preditivo com estabilidade nominal garantida para sistemas integradores com polos repetidos*, Mestrado, Universidade Federal da Bahia.

Costa, E. A., Martins, M. A. F., Schnitman, L. e Kalid, R. d. A. (2017). Controle preditivo de horizonte infinito, com estabilidade nominal garantida aplicado a sistema barra e bola não-linear, *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente SBAI*, p. 6.

González, A. H., Adam, E. J., Marcovecchio, M. G. e Odloak, D. (2011). Application of an extended IHMPC to an unstable reactor system: Study of feasibility and performance, *Journal of Process Control* **21**(10): 1493–1503.

Kara-Mohamed, M. (2017). Advanced trajectory tracking for UAVs using combined feedforward/feedback control design, *Robotics and Autonomous Systems* **96**: 143–156.

Mayne, D. Q. (2014). Model predictive control: Recent developments and future promise, *Automatica* **50**(12): 2967–2986.

Odloak, D. (2004). Extended robust model predictive control, *AIChE Journal* **50**(8): 1824–1836.

Pitarch, J. e Sala, A. (2014). Multicriteria fuzzy-polynomial observer design for a 3DoF nonlinear electromechanical platform, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **30**: 96–106.

Rawlings, J. B. e Muske, K. R. (1993). The stability of constrained receding horizon control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(10): 1512–1516.

Rodrigues, M. A. e Odloak, D. (2003). MPC for stable linear systems with model uncertainty, *Automatica* **39**(4): 569–583.

Rossiter, J. A. (2003). *Model-based predictive control: a practical approach*, 1 edn, Press, CRC.