CONTROLE COOPERATIVO $\mathcal{H}_\infty$ VIA REDE DE COMUNICAÇÃO

Lucas N. Egidio*, José L. Luz Netto* e Grace S. Deaecto*

*Rua Mendeleyev, 200 - CEP: 13083-860
Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP

Email: {egidio,grace}@fem.unicamp.br,jose.limaluz@gmail.com

Abstract— This paper proposes an $\mathcal{H}_\infty$ switching strategy to control cooperatively several linear time invariant (LTI) systems that share the same communication network. The control signal is transmitted through a limited bandwidth channel and a cooperative resource sharing dynamic strategy is proposed in order to assure stability and guaranteed $\mathcal{H}_\infty$ performance for the networked system. The main goal is to design a set of state feedback gains together with a switching rule that selects at each sampling instant one LTI system to receive the updated control signal, while the others maintain the previously received information. The control signal is kept constant inside a certain sampling period necessary to respect the maximum bandwidth frequency. The design conditions are expressed in terms of Lyapunov-Metzler inequalities and, therefore, are simple to solve whenever the Metzler matrix is fixed. An application example that consists in the simultaneous control of two linearized inverted pendulums illustrates the networked control methodology.

Keywords— Sampled-data control, switched systems, networked control

Resumo— Este artigo propõe uma estratégia de comutação $\mathcal{H}_\infty$ para controlar cooperativamente uma série de sistemas do tipo Linear Invariante no Tempo (LIT) que compartilham a mesma rede de comunicação. O sinal de controle é transmitido através de um canal com largura de faixa limitada e uma estratégia dinâmica de compartilhamento de recursos é proposta para assegurar estabilidade e desempenho $\mathcal{H}_\infty$ do conjunto. O objetivo principal é projetar os ganhos de realimentação de estado juntamente com uma regra de comutação, que seleciona em cada intervalo de tempo um sistema LIT para receber o sinal de controle atualizado, enquanto os outros mantêm as informações previamente recebidas. O esforço de controle é mantido constante durante um período de tempo, necessário para respeitar a largura de faixa do canal de comunicação. As condições de projeto são expressas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler e, portanto, são simples de resolver sempre que a matriz de Metzler é fixa. Por fim, a técnica é utilizada no controle simultâneo de dois pêndulos invertidos.

Palavras-chave— Controle com dados amostrados, sistemas com comutação, controle em rede

1 Introdução

A demanda por um mundo cada vez mais integrado e conectado é uma consequência do sucesso atual do conceito de Internet das Coisas. Ele tem produzido a urgência no desenvolvimento de ferramentas mais eficientes na transmissão, controle e tratamento de dados. Neste contexto, o controle através da rede, do inglês *Networked Control Systems* (NCS), ganha importância uma vez que a rede de comunicação é levada em conta no projeto de controle fazendo com que vários sistemas que interagem entre si sejam controlados de maneira mais eficiente. Este cenário é típico no contexto de controle multi-agente, especialmente em veículos aéreos não tripulados, veja (Ren et al., 2007), em sistemas rodoviários automatizados, veja (Ioannou, 2013), e também no contexto militar e teleoperado, veja (Sanfeliu et al., 2008). Diferente do que é normalmente suposto na teoria clássica de controle, a comunicação real entre uma série de sistemas é incapaz de enviar um número arbitrariamente grande de informação por unidade de tempo e, frequentemente, não pode garantir que a informação seja de fato recebida pelo receptor. Estas duas barreiras, formalmente denominadas limitação da largura de faixa e perda de pacotes de dados, respectivamente, são algumas das “imperfeições” das redes que podem inviabilizar o desempenho ou ainda causar instabilidade. Outros fatores podem ser igualmente apontados, como erros de quantização e atrasos na arquitetura de comunicação, veja (Hespanha et al., 2007) e (Wang and Liu, 2008) para mais detalhes.

Na literatura, algumas abordagens para lidar com estes desafios são propostas. Em especial, estratégias baseadas em um coordenador periódico foram fornecidas nas referências (Hristu-Varsakelis, 2001) e (Lin et al., 2005). Na primeira, padrões de comunicação foram determinados para fechar periodicamente a malha de controle de diversos sistemas através da rede, assegurando assim estabilidade do conjunto. Na segunda, é proposta uma solução baseada na abordagem de tempo médio de permanência incorporada a uma função do tipo Lyapunov quadrática por partes para resolver um problema similar, porém levando em conta um critério $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Uma política baseada em programação dinâmica foi proposta em (Antunes et al., 2012), considerando a otimização de uma função de desempenho de horizonte infinito. Outras propostas, como a utilização de uma função de comutação para gerenciar a rede pode ser encontrada em (Dai et al., 2009), (Donkers et al., 2011) e (Liu et al., 2014), no qual a última fornece um panorama da abordagem do atraso no controle através da rede. Ainda, a referência (Sousa et al., 2015) introduz um método para projetar conjuntamente uma regra de comutação e ganhos de realimentação de estado a fim de otimizar um índice $\mathcal{H}_2$ de desempenho.

Este artigo generaliza os resultados de (Sousa et al., 2015) para lidar com o projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$, que é um problema mais abrangente do ponto de vista teórico e prático. Mais especificamente, nosso objetivo é sintetizar ganhos de realimentação de estado para uma série de N sistemas LIT bem como uma política de compartilhamento de recursos da rede. É suposto que os sistemas compartilham o mesmo canal de comunicação com largura de faixa limitada. A cada instante de amostragem, apenas um sistema é capaz de receber o sinal de controle atualizado, enquanto os outros mantêm a informação previamente recebida. Para esta finalidade, primeiramente é apresentado um método para projetar a regra de comutação, também chamada de coordenador, baseada em desigualdades de Lyapunov-Metzler que são capazes de garantir estabilidade assintótica global e um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Este coordenador deve respeitar um tempo de permanência mínimo dentro do qual o esforço de controle é mantido constante. Posteriormente, o procedimento é generalizado para incluir o projeto de ganhos de realimentação de estado junto com o coordenador. O método é então aplicado para controlar dois pêndulos invertidos perturbados por uma rajada de vento, validando assim a teoria proposta.

A notação utilizada é padrão. Para vetores ou matrizes reais, $(')$ refere-se ao transposto. Para matrizes simétricas, o símbolo $(\bullet)$ denota o respectivo bloco simétrico. O símbolo $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais. O conjunto $\mathbb{K} = \{1, \cdots, N\}$ é composto pelos primeiros N números naturais positivos. Para uma matriz simétrica, $X > 0$ ($X \geq 0$) indica que a matriz X é (semi-)definida positiva. O conjunto Λ composto por vetores λ tais que $\sum_{i\in\mathbb{K}} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ é chamado de simplex unitário. A combinação convexa de matrizes $\{X_1, \cdots, X_N\}$ é denotada por $X_\lambda = \sum_{i\in\mathbb{K}} \lambda_i X_i$. A matriz X é dita Schur estável sempre que seus autovalores se posicionarem dentro do círculo unitário. A subclasse de matrizes de Metzler do tipo $\{\pi_{ji}\} = \Pi \in \mathcal{M}$ é composta por todas aquelas que satisfazem $\pi_{ji} \geq 0$ e $\sum_{j\in\mathbb{K}} \pi_{ji} = 1$, para todo $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Finalmente, $\mathcal{L}_2$ define o conjunto de trajetórias $\xi(t)$ tal que a integral $\int_0^\infty \xi(t)'\xi(t)dt < \infty$ é limitada, enquanto $\mathcal{L}_{d2}$ define o conjunto de trajetórias $\xi[k]$ tal que o somatório $\sum_0^\infty \xi[k]'\xi[k] < \infty$ é limitado.

2 Problema proposto

Considere uma rede de comunicação composta por N sistemas LIT que compartilham o mesmo canal. Estes sistemas devem ser simultaneamente controlados, de maneira cooperativa, a partir de sinais de controle transmitidos através da rede, projetados de forma a garantir estabilidade e otimizar um critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Mais especificamente, considere que o i-ésimo sistema LIT apresenta a seguinte realização em espaço de estado

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + H_i w_i(t),\ x_i(0) = 0 \quad (1)$$

$$z_i(t) = E_i x_i(t) + F_i u_i(t) + G_i w_i(t) \quad (2)$$

No qual, para todo $t \geq 0$ e $i \in \mathbb{K}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_{xi}}$ é o estado, $u_i \in \mathbb{R}^{n_{ui}}$ é o sinal de controle, $w_i \in \mathbb{R}^{n_{wi}}$ é a entrada exógena e $z_i \in \mathbb{R}^{n_{zi}}$ é a saída controlada. Note que os sistemas podem ser de ordens diferentes e dimensões de entrada e saída distintas. Consideramos que os sinais de controle devem satisfazer as seguintes características:

- **Largura de faixa limitada:** é aplicada supondo o esforço de controle do tipo

$$u_i(t) = u_i(t_k) = u_i[k],\ t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (3)$$

  para $i \in \mathbb{K}$, no qual $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são instantes de amostragem sucessivos tais que $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k \geq h > 0$. A frequência de amostragem $1/h$ é escolhida de maneira a respeitar a largura de faixa do canal de transmissão, veja (Matveev and Savkin, 2009).

- **Compartilhamento cooperativo:** é incluído de forma que a cada instante $t_k \geq 0$ o canal de comunicação é utilizado para acionar somente um sistema LIT definido por $\sigma[k] \in \mathbb{K}$, enquanto os outros mantêm a informação previamente recebida. Este fato é sintetizado pela lei de controle do tipo

$$u_i[k] = \begin{cases} K_i u_i[k-1] + L_i x_i[k], & i = \sigma[k] \\ u_i[k-1], & i \neq \sigma[k] \end{cases} \quad (4)$$

  no qual os ganhos matriciais (K_i, L_i), $\forall i \in \mathbb{K}$, e a regra de comutação $\sigma[k] \in \mathbb{K}$, no papel de coordenador, são variáveis de projeto para garantir estabilidade e desempenho $\mathcal{H}_\infty$.

Neste artigo, consideramos apenas entradas externas pertencentes a uma classe especial, caracterizada por $w_i(t) = w_i(t_k) = w_i[k]$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, sendo uma perturbação constante por partes que satisfaz a seguinte identidade

$$\int_0^\infty w_i(t)'w_i(t)dt = h \sum_{k\in\mathbb{N}} w_i[k]'w_i[k] \quad (5)$$

no qual $t_{k+1} - t_k = h > 0$ é o período de amostragem. Neste contexto, o projeto de controle deve assegurar um limitante superior para o seguinte índice de desempenho:

- **Índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$:** a saída controlada $z_i(t)$ associada a uma entrada externa constante por parte nos permite definir o índice

$$J_\infty = \inf_{K_i, L_i, \sigma\in\Omega} \sup_{w_i \in \mathcal{L}_{h2}} \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^\infty z_i(t)'z_i(t)dt}{\sum_{i=1}^N \int_0^\infty w_i(t)'w_i(t)dt} \quad (6)$$

sendo Ω o conjunto de todas as regras $\sigma[k] \in \mathbb{K}$ assintoticamente estabilizantes.

Nesta definição consideramos $\mathcal{L}_{h2} \subset \mathcal{L}_2$ como sendo o conjunto de todos os sinais constantes por partes $w_i(t) = w_i(t_k),\ t \in [t_k, t_{k+1})$ que são quadraticamente integráveis. Note que a soma presente neste índice concatena os ganhos $\mathcal{L}_2$ de toda a rede de comunicação. Então, a cada instante de amostragem t_k, a estratégia de controle conecta o ganho de realimentação de estado $u_i[k] = K_i u_i[k-1] + L_i x_i[k]$ ao i-ésimo sistema escolhido pelo coordenador $\sigma[k] = i$, enquanto os outros repetem a última informação de controle disponível $u_i[k] = u_i[k-1]$. Esta dinâmica pode ser modelada como um sistema com comutação pela adoção do delta de Kronecker δ_{ij}, definido da forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

o qual permite reescrever a lei de controle $u_i[k]$ como

$$u_i[k] = (1-\delta_{i\sigma})u_i[k-1] + \delta_{i\sigma}(K_i u_i[k-1] + L_i x_i[k]) \tag{8}$$

Ainda, o fato deste sinal de controle ser constante dentro do intervalo estipulado por dois instantes consecutivos de amostragem, com $t_{k+1} - t_k = h > 0$, torna possível avaliar, para cada $i \in \mathbb{K}$, um sistema discreto equivalente com realização em espaço de estado

$$x_i[k+1] = A_{ih}x_i[k] + B_{ih}u_i[k] + H_{ih}w_i[k] \tag{9}$$

$$z_i[k] = E_{ih}x_i[k] + F_{ih}u_i[k] + G_{ih}w_i[k] \tag{10}$$

evoluindo de uma condição inicial nula, de forma que a seguinte igualdade

$$\sup_{w_i \in \mathcal{L}_{h2}} \frac{\int_0^\infty z_i(t)' z_i(t) dt}{\int_0^\infty w_i(t)' w_i(t) dt} = \sup_{w_i \in \mathcal{L}_{d2}} \frac{\sum_{k\in\mathbb{N}} z_i[k]' z_i[k]}{h \sum_{k\in\mathbb{N}} w_i[k]' w_i[k]} \tag{11}$$

seja preservada. Note que o índice de desempenho definido por (6) para o sistema a tempo contínuo é diferente do fornecido pelo sistema a tempo discreto (9)-(10) apenas por um fator $h > 0$. Para uma discussão mais detalhada sobre este tópico, veja (Souza et al., 2014). Na mesma referência, é mostrado que as matrizes aumentadas

$$\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_{ai} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & F_{ai} \end{bmatrix} \tag{12}$$

para $B_{ai} = [B_i \quad H_i]$ e $F_{ai} = [F_i \quad G_i]$, fornecem a dinâmica do sistema a tempo discreto (A_{ih}, B_{ih}, H_{ih}), extraída de

$$e^{\mathbb{A}_i h} = \begin{bmatrix} A_{ih} & B_{aih} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{13}$$

com $B_{aih} = [B_{ih} \quad H_{ih}]$. Similarmente, obtemos as matrizes de saída (E_{ih}, F_{ih}, G_{ih}) pela decomposição em valor singular de

$$\int_0^h e^{\mathbb{A}_i' t} \mathbb{E}_i' \mathbb{E}_i e^{\mathbb{A}_i t} dt = \begin{bmatrix} E_{ih}' \\ F_{aih}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ih}' \\ F_{aih}' \end{bmatrix}' \tag{14}$$

no qual $F_{aih} = [F_{ih} \quad G_{ih}]$. Como discutido em (Souza et al., 2014), as dimensões de $z_i(t)$ e $z_i[k]$ geralmente diferem entre si. De fato, pode ocorrer que o lado esquerdo de (14) seja uma matriz positiva definida, o que impõe $z_i[k] \in \mathbb{R}^{n_{xi}+n_{ui}}$ mesmo com $z_i(t) \in \mathbb{R}^{n_{zi}}$, onde $n_{zi} \leq n_{xi} < n_{xi} + n_{ui}$.

Agora, definindo o vetor de estado aumentado $\eta_i = [x_i[k]' \quad u_i[k-1]']'$ e conectando a lei de controle na sua forma compacta (8) no sistema discreto (9)-(10), obtemos a seguinte dinâmica do sistema em malha fechada

$$\eta_i[k+1] = (\mathcal{A}_{i\sigma} + \mathcal{B}_{i\sigma}\mathcal{K}_i)\eta_i[k] + \mathcal{H}_i w_i[k], \eta_i[0] = 0 \tag{15}$$

$$z_i[k] = (\mathcal{E}_{i\sigma} + \mathcal{F}_{i\sigma}\mathcal{K}_i)\eta_i[k] + \mathcal{G}_i w_i[k] \tag{16}$$

na qual as matrizes indicadas são

$$\mathcal{A}_{i\sigma} = \begin{bmatrix} A_{ih} & (1-\delta_{i\sigma})B_{ih} \\ 0 & (1-\delta_{i\sigma})I \end{bmatrix}, \mathcal{B}_{i\sigma} = \begin{bmatrix} \delta_{i\sigma}B_{ih} \\ \delta_{i\sigma}I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} H_{ih} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{E}_{i\sigma} = \begin{bmatrix} E_{ih}' \\ (1-\delta_{i\sigma})F_{ih}' \end{bmatrix}'$$

$$\mathcal{F}_{i\sigma} = \delta_{i\sigma}F_{ih},\ \mathcal{G}_i = G_{ih}$$

e os ganhos $\mathcal{K}_i = [L_i \quad K_i]$, $\forall i \in \mathbb{K}$ devem ser determinados. Embora a lei de controle dependa de duas matrizes de ganho (L_i, K_i), o que parece mais complicado do que outros métodos da literatura, o sistema geral (15)-(16) recai no problema clássico de controle via realimentação de estado.

Antes de fechar esta seção, é importante mencionar que o problema proposto é longe de ser simples e imediado. De fato, se para um instante de amostragem $t_k > 0$, o coordenador $\sigma[k]$ escolher o i-ésimo sistema LIT, obtemos

$$\eta_i[k+1] = \begin{bmatrix} A_{ih} + B_{ih}L_i & B_{ih}K_i \\ L_i & K_i \end{bmatrix} \eta_i[k] \tag{17}$$

$$z_i[k] = \begin{bmatrix} E_{ih} + F_{ih}L_i & E_{ih}K_i \end{bmatrix} \eta_i[k] \tag{18}$$

para $i = \sigma[k] \in \mathbb{K}$, enquanto que para todos os outros sistemas em que $i \neq \sigma[k] \in \mathbb{K}$

$$\eta_i[k+1] = \begin{bmatrix} A_{ih} & B_{ih} \\ 0 & I \end{bmatrix} \eta_i[k] \tag{19}$$

$$z_i[k] = \begin{bmatrix} E_{ih} & F_{ih} \end{bmatrix} \eta_i[k] \tag{20}$$

o controle é ineficaz porque, neste intervalo, os recursos da transmissão estão alocados apenas para o sistema $\sigma[k] = i$. Note que é possível encontrar ganhos (L_i, K_i) os quais (17) é Schur estável sempre que o par (A_{ih}, B_{ih}) é controlável, apenas por impor $K_i = 0$. Entretanto, todos os outros sistemas aumentados com $i \neq \sigma[k]$ são sempre instáveis uma vez que, geralmente, a malha aberta A_{ih} não é Schur estável e os sistemas apresentam n_u autovalores unitários iguais. Este fato deixa claro que o projeto de uma lei de controle apropriada é essencial para garantir estabilidade assintótica para todos os sistemas conectados na rede. Ainda, é importante ressaltar que o índice de desempenho adotado (6) depende da saída controlada de todos os sistemas LIT envolvidos.

3 Projeto de controle

Esta seção é dedicada ao projeto de uma regra de comutação para alocação dos recursos da rede aos sistemas (15)-(16) considerando, no primeiro momento, o caso mais simples em que os ganhos $\mathcal{K}_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$, são dados. As matrizes de malha fechada $\tilde{\mathcal{A}}_{ij} = \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{B}_{ij}\mathcal{K}_i$ e $\tilde{\mathcal{E}}_{ij} = \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{F}_{ij}\mathcal{K}_i$, $\forall (i,j) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ são portanto conhecidas. As condições são baseadas na seguinte função de Lyapunov do tipo mínimo

$$V(\eta_i[k]) = \min_{j\in\mathbb{K}} \sum_{i\in\mathbb{K}} \eta_i[k]'\mathcal{P}_{ij}\eta_i[k] \tag{21}$$

no qual $\mathcal{P}_{ij} > 0$, $\forall (i,j) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ são matrizes definidas positivas que atendem um conjunto de condições que serão apresentadas a seguir. A função de comutação associada é dada por

$$\sigma[k] = \arg\min_{j\in\mathbb{K}} \sum_{i\in\mathbb{K}} \eta_i[k]'\mathcal{P}_{ij}\eta_i[k] \tag{22}$$

a qual, como esperado, depende da informação de todos os sistemas (15)-(16) para $i \in \mathbb{K}$. O próximo teorema, que será posteriormente generalizado para tratar o projeto conjunto da regra de comutação e dos ganhos de realimentação de estado, fornece um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o conjunto de sistemas LIT:

Teorema 1 *Seja $\Pi \in \mathcal{M}$ dado. Se existirem matrizes simétricas $\mathcal{P}_{ij} > 0$ e um escalar $\rho > 0$ satisfazendo as seguintes desigualdades generalizadas de Riccati-Metzler*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \mathcal{P}_{\pi ij}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \mathcal{P}_{\pi ij}\mathcal{H}_i & \mathcal{P}_{\pi ij} & \bullet \\ \tilde{\mathcal{E}}_{ij} & \mathcal{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{23}$$

para todo $(i,j) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ com $\mathcal{P}_{\pi ij} = \sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{P}_{i\ell}$, então a regra de comutação (22) garante que os sistemas em malha fechada (15)-(16) para todo $i \in \mathbb{K}$ são globalmente assintoticamente estáveis e a desigualdade

$$J_\infty < \rho/h \tag{24}$$

seja válida para um período de amostragem $h > 0$ dado.

Prova: Considere que em um instante de amostragem arbitrário $t_k \geq 0$ a regra de comutação é $\sigma[k] = j \in \mathbb{K}$ e que as desigualdades (23) são factíveis. Então, aplicando o Complemento de Schur nas duas últimas linhas e colunas de (23) e rearranjando o resultado, obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_{ij}'\mathcal{P}_{\pi ij}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} - \mathcal{P}_{ij} & \bullet \\ \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{\pi ij}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{\pi ij}\mathcal{H}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{ij}'\tilde{\mathcal{E}}_{ij} & \bullet \\ \mathcal{G}_i'\tilde{\mathcal{E}}_{ij} & \mathcal{G}_i'\mathcal{G}_i - \rho I \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

para todo $(i,j) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$. Agora, da definição da função de Lyapunov (21) segue que

$$\begin{aligned} V(\eta_i[k+1]) &= \\ &= \min_{\ell\in\mathbb{K}} \sum_{i\in\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \eta_i[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_{ij}'\mathcal{P}_{i\ell}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \bullet \\ \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{i\ell}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{i\ell}\mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_i[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix} \\ &= \min_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i\in\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \eta_i[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_{ij}'\mathcal{P}_{i\lambda}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \bullet \\ \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{i\lambda}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{i\lambda}\mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_i[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix} \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \eta_i[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_{ij}'\mathcal{P}_{\pi ij}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \bullet \\ \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{\pi ij}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} & \mathcal{H}_i'\mathcal{P}_{\pi ij}\mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_i[k] \\ w_i[k] \end{bmatrix} \\ &< V(\eta_i[k]) - \sum_{i\in\mathbb{K}} z_i[k]'z_i[k] + \rho \sum_{i\in\mathbb{K}} w_i[k]'w_i[k] \end{aligned} \tag{26}$$

em que a primeira desigualdade vem do fato de cada coluna de $\Pi \in \mathcal{M}$ ser um vetor pertencente a Λ e a segunda desigualdade é obtida de (25) multiplicada à esquerda por $[\eta_i[k]' \;\; w_i[k]']$ e a direita pelo seu transposto. Além disso, a validade de (25) assegura que $\tilde{\mathcal{A}}_{ij}'\mathcal{P}_{\pi ij}\tilde{\mathcal{A}}_{ij} - \mathcal{P}_{ij} < 0$, $\forall (i,j) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ e, portanto o sistema em rede é assintoticamente estável. Logo, somando ambos os lados de (26), para todo $k \in \mathbb{N}$, e definindo $\Delta V(\eta_i[k]) = V(\eta_i[k+1]) - V(\eta_i[k])$, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in\mathbb{N}} \Delta V(\eta_i[k]) < \\ &< -\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{K}} z_i[k]'z_i[k] + \rho \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{K}} w_i[k]'w_i[k] \end{aligned} \tag{27}$$

Como a soma telescópica assegura que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Delta V(\eta_i[k]) = \lim_{k\to\infty} V(\eta_i[k]) - V(\eta_i[0])$, o lado esquerdo de (27) é nulo, pois $\lim_{k\to\infty} V(\eta_i[k]) = 0$ devido à estabilidade assintótica global dos sistemas e $V(\eta_i[0]) = 0$ dado que $\eta_i[0] = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Consequentemente, temos

$$\sum_{i\in\mathbb{K}}\sum_{k\in\mathbb{N}} z_i[k]'z_i[k] < \tag{28}$$

$$< \rho \sum_{i\in\mathbb{K}}\sum_{k\in\mathbb{N}} w_i[k]'w_i[k], \; \forall w_i \in \mathcal{L}_{d2} \tag{29}$$

desigualdade que vem diretamente de (27). Então, a relação

$$\sup_{w_i\in\mathcal{L}_{d2}} \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\in\mathbb{N}} z_i[k]'z_i[k]}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\in\mathbb{N}} w_i[k]'w_i[k]} < \rho \tag{30}$$

é satisfeita em razão de (11), tornando a desigualdade (24) também válida, concluindo a prova. □

Do ponto de vista numérico, é interessante reconhecer que as condições de projeto do Teorema 1 se reduzem a um conjunto de LMIs sempre que a matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ for fixa. Esta matriz pode ser obtida por buscas unidimensionais com relação aos seus elementos ou considerando estruturas mais conservadoras, veja (Sousa et al., 2015). Ainda, as matrizes $\sqrt{\pi_{jj}}\tilde{\mathcal{A}}_{ij}$ devem ser Schur estáveis para todo $(i,j) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ como uma condição necessária para a factibilidade de (23). Entretanto, como $0 \leq \pi_{jj} \leq 1$, nada é imposto com relação à Schur estabilidade das matrizes $\tilde{\mathcal{A}}_{ij}$.

4 Controle por realimentação de estado

Nesta seção, nosso principal objetivo é generalizar as condições do Teorema 1 para tratar o projeto conjunto do coordenador $\sigma[\cdot]$ e os ganhos de realimentação de estado $\mathcal{K}_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Teorema 2 *Seja* $\Pi \in \mathcal{M}$ *dado. Existem matrizes simétricas* $\mathcal{P}_{ij}$ *satisfazendo (23) se, e somente se, existirem matrizes simétricas* $\mathcal{R}_{ij}$, $\mathcal{W}_{ij\ell}$ *e matrizes* $\mathcal{Y}_i$, $\mathcal{J}_{ij}$ *tais que as seguintes desigualdades*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \mathcal{A}_{ij}\mathcal{R}_{ij} & \mathcal{H}_i & \mathcal{V}_{ij} & \bullet \\ \mathcal{E}_{ij}\mathcal{R}_{ij} & \mathcal{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \neq j \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ii} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \mathcal{A}_{ii}\mathcal{R}_{ii} + \mathcal{B}_{ii}\mathcal{Y}_i & \mathcal{H}_i & \mathcal{V}_{ii} & \bullet \\ \mathcal{E}_{ii}\mathcal{R}_{ii} + \mathcal{F}_{ii}\mathcal{Y}_i & \mathcal{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}_{ij\ell} & \bullet \\ \mathcal{J}_{ij} & \mathcal{R}_{i\ell} \end{bmatrix} > 0 \tag{33}$$

sejam satisfeitas para todo $(i, j, \ell) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ *com* $\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{J}_{ij} + \mathcal{J}_{ij}' - \sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{W}_{ij\ell}$*. Em caso afirmativo, a regra de comutação (22) com* $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}^{-1}$ *e a lei de controle (8) com* $\mathcal{K}_i = \mathcal{Y}_i\mathcal{R}_{ii}^{-1}$, $\forall i \in \mathbb{K}$ *garantem que os sistemas em malha fechada (15)-(16), para todo* $i \in \mathbb{K}$*, sejam globalmente assintoticamente estáveis e a desigualdade*

$$J_\infty < \rho/h \tag{34}$$

seja válida para um período de amostragem $h > 0$ *dado.*

Prova: Inicialmente, note que a desigualdade (32) é equivalente a (31), porém considerando as matrizes de malha fechada $\mathcal{A}_{ii} + \mathcal{B}_{ii}\mathcal{K}_i \to \mathcal{A}_{ii}$ e $\mathcal{E}_{ii} + \mathcal{F}_{ii}\mathcal{K}_i \to \mathcal{E}_{ii}$ que definem o sistema (15)-(16) sempre que $i = j = \sigma[k] \in \mathbb{K}$. A aplicação do Complemento de Schur com respeito à última linha e coluna de (33) resulta em $\mathcal{W}_{ij\ell} > \mathcal{J}_{ij}'\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\mathcal{J}_{ij}$, nos permitindo reescrever

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\right)^{-1} &\geq \mathcal{J}_{ij} + \mathcal{J}_{ij}' - \sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{J}_{ij}'\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\mathcal{J}_{ij} \\ &> \mathcal{J}_{ij} + \mathcal{J}_{ij}' - \sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{W}_{ij\ell} \end{aligned} \tag{35}$$

na qual a primeira desigualdade reside no fato de que, para uma matriz simétrica $R > 0$ e uma quadrada J, temos $(J - R^{-1})'R(J - R^{-1}) \geq 0$ e, consequentemente, $R^{-1} \geq J' + J - J'RJ$, veja (De Oliveira et al., 2002) para mais detalhes. Portanto, se as desigualdades (31) e (32) são satisfeitas, então

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \tilde{\mathcal{A}}_{ij}\mathcal{R}_{ij} & \mathcal{H}_i & \left(\sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\right)^{-1} & \bullet \\ \tilde{\mathcal{E}}_{ij}\mathcal{R}_{ij} & \mathcal{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{36}$$

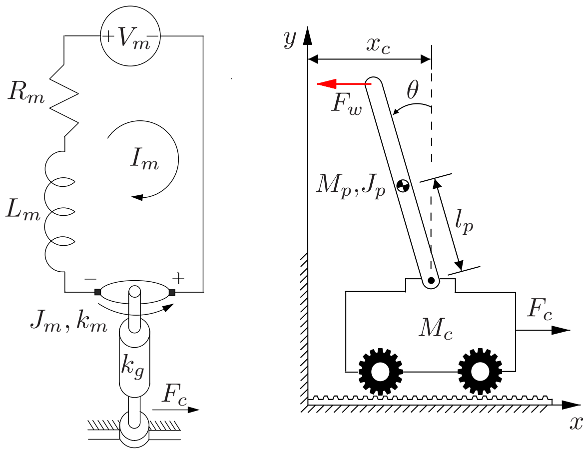

Figura 1: Diagramas elétricos e mecânicos

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ também é válida. Note que (36) é equivalente a (23) multiplicando ambos os lados por $\mathrm{diag}\{\mathcal{P}_{ij}^{-1}, I, (\mathcal{P}_{\pi ij})^{-1}, I\}$, provando então a suficiência.

Para a necessidade, assuma que a desigualdade (36) é satisfeita. Logo, tomando $\mathcal{J}_{ij} = (\sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{R}_{i\ell}^{-1})^{-1}$ e $\mathcal{W}_{ij\ell} = \mathcal{J}_{ij}'\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\mathcal{J}_{ij} + \epsilon I$ com $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\right)^{-1} &= \mathcal{J}_{ij} + \mathcal{J}_{ij}' - \mathcal{J}_{ij}'\left(\sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{R}_{i\ell}^{-1}\right)\mathcal{J}_{ij} \\ &= \mathcal{J}_{ij} + \mathcal{J}_{ij}' - \sum_{\ell\in\mathbb{K}} \pi_{\ell j}\mathcal{W}_{ij\ell} + \epsilon I \end{aligned}$$

e, portanto, as desigualdades (31)-(32) são válidas sempre que $\epsilon > 0$ é tomado arbitrariamente pequeno. A prova está concluída. □

Este resultado é essencial para nosso propósito e foi obtido sem impor nenhum conservadorismo às condições do Teorema 1. Além disso, o Teorema 2 é de fácil resolução devido ao fato de ser descrito por LMIs sempre que a matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ é dada. O custo ótimo garantido pode ser obtido resolvendo o seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{\mathcal{R}_{ij}, \mathcal{W}_{ij\ell}, \mathcal{J}_{ij}, \mathcal{Y}_i, \rho} \{\rho : (31), (32), (33)\} \tag{37}$$

que fornece as matrizes $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}^{-1}$ para serem utilizadas na regra de comutação e os ganhos $\mathcal{K}_i = \mathcal{Y}_i\mathcal{R}_{ii}^{-1}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, importantes para preservar e assegurar um desempenho garantido $\mathcal{H}_\infty$. A próxima seção ilustra os resultados teóricos obtidos.

5 Controle de pêndulos invertidos

Considere duas estações de trabalho, que consistem individualmente de um carro, atuado por um motor de corrente contínua, que desliza sobre um trilho horizontal. A Figura 1 apresenta os diagramas elétrico e mecânico do modelo. Negligenciando a indutância L_{mi} da armadura do motor e linearizando o sistema em torno de $(x_{ci}, \theta_i) = (0, 0)$,

Parâmetro	S. IP02 ($i=1$)	S. IP02 ($i=2$)
M_{pi} $[kg]$	0.23	0.13
l_{pi} $[m]$	0.33	0.18
$\mathcal{A}_{eqi}$ $[N/V]$	1.31	1.12
$\mathcal{M}_{eqi}$ $[kg]$	1.69	1.57
$\mathcal{B}_{eqi}$ $[N.s/m^2]$	7.32	6.60
B_{pi} $[N.m.s/rad]$	0.88×10^{-3}	0.74×10^{-3}
J_{pi} $[kg.m^2]$	7.47×10^{-3}	0.98×10^{-3}

Tabela 1: Valores numéricos identificados para ambas as plataformas

obtemos o modelo dinâmico

$$(M_{pi}+\mathcal{M}_{eqi})\ddot{x}_{ci}+\mathcal{B}_{eqi}\dot{x}_{ci}-M_{pi}l_{pi}\ddot{\theta}_i+F_{wi}=\mathcal{A}_{eqi}V_{mi}$$

$$\mathcal{J}_{eqi}\ddot{\theta}_i+B_{pi}\dot{\theta}_i-M_{pi}l_{pi}\ddot{x}_{ci}-M_{pi}l_{pi}g\theta_i-2l_{pi}F_{wi}=0$$

no qual x_{ci} e θ_i são os deslocamentos do carro e do pêndulo, as quantidades

$$\mathcal{M}_{eqi}=M_{ci}+\frac{\eta_{gi}k_{gi}^2J_{mi}}{r_{pmi}^2}, \mathcal{J}_{eqi}=M_{pi}l_{pi}^2+J_{pi}$$

$$\mathcal{B}_{eqi}=B_{ci}+\frac{\eta_{gi}\eta_{mi}k_{gi}^2k_{ti}k_{mi}}{r_{pmi}^2R_{mi}}$$

são as massas, momentos de inércia e os atritos viscosos equivalentes, respectivamente, $\mathcal{A}_{eqi}=(\eta_{gi}\eta_{mi}k_{gi}k_{ti})/(r_{pmi}R_{mi})$ é o ganho de atuação, $g=9.81$ [m/s^2] é a aceleração da gravidade e B_{pi} é o coeficiente de atrito viscoso dos pêndulos, para $i\in\{1,2\}$. As definições dos parâmetros η_{gi}, η_{mi}, k_{gi}, k_{ti}, r_{mi} estão disponíveis em (Quanser, 2012). Os valores reais destes parâmetros foram devidamente identificados para ambas as plataformas utilizando métodos simples de identificação de sistemas. Os valores estão apresentados na Tabela 1. Definindo o vetor de espaço de estado $x_i=[x_{ci}\ \theta_i\ \dot{x}_{ci}\ \dot{\theta}_i]'$, a entrada de controle $u_i=V_{mi}$, a entrada exógena $w_i=F_{wi}$ e a saída controlada $z_i(t)=[x_{ci}\ 0.3\theta_i\ 0.05u_i]'$ para todo $i=\{1,2\}$, podemos representar o modelo dinâmico pela equação de estado (1)-(2).

Nosso objetivo é controlar ambos os pêndulos na posição vertical para cima, com o carro na origem, utilizando uma entrada de controle enviada através de um canal com largura de faixa limitada. Considere que o período de amostragem $h=0.01$ [s] respeita essa limitação. Além disso, apenas uma plataforma deve receber o sinal de controle atualizado, enquanto a outra mantém a informação previamente recebida. Aplicamos o procedimento de discretização definido por (13)-(14) com a finalidade de obter o sistema discreto equivalente (9)-(10). Então, resolvendo as condições do Teorema 2 para $\Pi\in\mathcal{M}$ com $\pi_{11}=0$ e $\pi_{22}=0.6354$ obtivemos um custo garantido de $J_\infty<\rho/h=8.8326$, matrizes $\mathcal{P}_{ij}$, $(i,j)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ importantes para a implementação da regra de comutação (22) e os ganhos de realimentação de estado

$$L_1=\begin{bmatrix}31.8366 & -104.5757 & 30.4095 & -21.4879\end{bmatrix}$$
$$L_2=\begin{bmatrix}170.1375 & -313.3190 & 117.0744 & -46.3047\end{bmatrix}$$

com $K_1=K_2\approx 0$. Através de ensaios práticos identificamos o comportamento de uma rajada de vento passando pela extremidade de ambos os pêndulos. Estimamos a sua força correspondente a qual é apresentada a seguir

$$w_i(t)=\begin{cases}0.185-0.2(0.02-x_{ci}(t))^{1/3}[\mathrm{N}], t\in[2,5]\\ 0\ [\mathrm{N}], \text{caso contrário}\end{cases}$$

Esta função foi considerada constante entre instantes de amostragem, o que não é uma aproximação ruim tendo em vista que o período é muito pequeno. A Figura 2 apresenta a evolução temporal de x_{ci} e θ_i para o sistema $i=1$ (linha tracejada vermelha) e $i=2$ (linha tracejada em azul).

Mantendo o mesmo padrão de cor e estilo, a

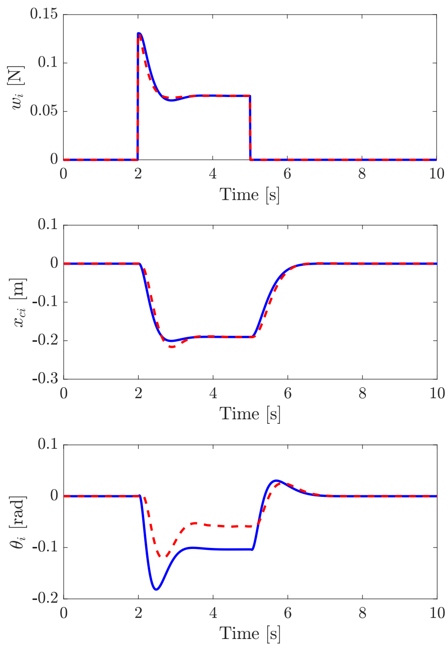

Figura 2: Perturbações w_i, trajetórias x_{ci} e θ_i.

trajetória das entrada de controle u_i são exibidas na Figura 3, juntamente com o coordenador $\sigma[k]$. Como esperado, note pelo detalhe ampliado que o sinal de controle é atualizado apenas para um dos sistemas disponíveis, enquanto o outro mantém a informação anterior. Este exemplo ilustra a eficiência da abordagem em coordenar a atualização do sinal de controle através da rede e rejeitar a perturbação representada pela força F_{wi}.

6 Conclusões

Este artigo apresenta uma nova estratégia para o projeto conjunto $\mathcal{H}_\infty$ de ganhos de realimentação de estado e de um coordenador, representado

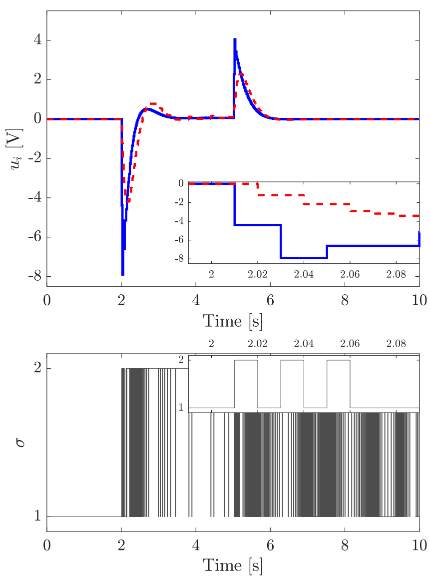

Figura 3: Entrada de controle u_i e coordenador σ.

matematicamente pela regra de comutação, que coordena a alocação de recursos da rede de comunicação com largura de faixa limitada aos sistemas LIT. Um exemplo prático, contendo dois pêndulos em carros motorizados, ilustrou a eficiência da teoria desenvolvida. O coordenador obteve sucesso gerenciando a lei de controle com um baixo esforço computacional e a influência da perturbação foi satisfatoriamente atenuada.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projeto 306911/2015-9 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), auxílio regular 2017/20343-0.

Referências

Antunes, D. J., Heemels, W. P. M. H., Hespanha, J. P. and Silvestre, C. J. (2012). Scheduling measurements and controls over networks – Part I: Rollout strategies for protocol design, *Proc. of the IEEE American Control Conference*, pp. 2036–2041.

Dai, S. L., Lin, H. and Gee, S. S. (2009). A switched system approach to scheduling of networked control systems with communication constraints, *Proc. of the IEEE Conf. Dec. and Contr.*, pp. 4991–4996.

De Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002). Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.

Donkers, M. C. F., Heemels, W. P. M. H., van de Wouw, N. and Hetel, L. (2011). Stability analysis of Networked Control Systems using a switched linear systems approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **56**(9): 2101–2115.

Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P. and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems, *Proc. of the IEEE–Special Issue on Technology of Networked Control Systems* **95**: 138–162.

Hristu-Varsakelis, D. (2001). Feedback control systems as users of a shared network: Communication sequences that guarantee stability, *Proc. of the IEEE Conf. Dec. and Contr.*, pp. 3631–3636.

Ioannou, P. (2013). *Automated Highway Systems*, Springer.

Lin, H., Zhai, G., Fang, L. and Antsaklis, P. J. (2005). Stability and $\mathcal{H}_\infty$ performance preserving scheduling policy for Networked Control Systems, *Proc. of the IFAC* **38**(1): 218–223.

Liu, K., Fridman, E. and Hetel, L. (2014). Networked Control Systems: A time-delay approach, *Proc. of the IEEE European Control Conference*, pp. 1434–1439.

Matveev, A. S. and Savkin, A. V. (2009). *Estimation and Control Over Communication Networks*, Birkhäuser, Boston.

Quanser (2012). *User Manual, IP02 Linear Inverted Pendulum and IP02 Linear Pendulum Gantry Experiments*, Quanser.

Ren, W., Beard, R. W. and Atkins, E. M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control, *IEEE Control Systems* **27**(2): 71–82.

Sanfeliu, A., Hagita, N. and Saffiotti, A. (2008). Network robot systems, *Robotics and Autonomous Systems* **56**(10): 793 – 797.

Sousa, T. T., Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2015). Switching control resource allocation in Networked Control Systems, *Proc. of the IEEE Conf. Dec. and Contr.*, pp. 6862–6867.

Souza, M., Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2014). Self-triggered linear quadratic networked control, *Optimal Control, Applications and Methods* **35**: 524–538.

Wang, F.-Y. and Liu, D. (2008). *Networked Control Systems: Theory and Applications*, Springer-Verlag, London.