

CONTROLE DE SISTEMAS BILINEARES POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA

EDUARDO S. TOGNETTI*, IAN R. MASSA†, TAÍS R. CALLIERO†

*Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília – UnB, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

†Faculdade Gama de Tecnologia, Universidade de Brasília – UnB, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

Emails: estognetti@ene.unb.br, ianmassa2013@gmail.com,
tais.calliero@gmail.com

Abstract— This paper considers the problem of stabilizing a bilinear system via dynamic output feedback controllers and the estimation of the domain of stability of the closed-loop system. The dynamic controller has a bilinear term that mitigates the effect of the nonlinear term of the system and the design is performed in two stages, described via linear matrix inequalities (LMIs) and valid in a polytopic region that contains the origin. The domain of attraction is the largest invariant set contained in the polytope. The results are illustrated by numerical examples.

Keywords— Bilinear systems, dynamic output feedback, linear matrix inequalities, domain of attraction.

Resumo— Neste artigo é considerado o problema de estabilização de sistemas bilineares por meio de controladores de realimentação dinâmica de saída e a estimativa da região de estabilidade do sistema em malha fechada. O controlador dinâmico possui termo bilinear de forma a atenuar o efeito da bilinearidade do sistema e o projeto é realizado em dois estágios, expressos por desigualdades matriciais lineares (LMIs) e válidos dentro de um polítopo contendo a origem. O domínio de atração obtido é o maior conjunto invariante contido no polítopo. Os resultados são ilustrados por meio de exemplos numéricos.

Palavras-chave— Sistemas bilineares, controlador dinâmico de saída, desigualdades matriciais lineares, região de atração.

1 Introdução

Sistemas bilineares são uma classe especial de sistemas não lineares que representam vários processos físicos, como por exemplo, aplicações em engenharia nuclear, processos químicos, aplicações em biologia e imunologia (Mohler e Kolodziej, 1980). Além disso, muitos problemas práticos podem ser aproximados por um modelo bilinear.

Na literatura, muitos trabalhos tratam o problema de estabilização de sistemas bilineares contínuos (Tarbouriech et al., 2009) e discretos no tempo (Stepanenko e Yang, 1996). Um problema estreitamente relacionado é o cálculo de uma estimativa da região de atração de um sistema não linear, em particular para o caso de sistemas não lineares quadráticos (Amato et al., 2007; Tarbouriech et al., 2009; Merola et al., 2017). Na maioria dos casos, a lei de controle e a região de estabilidade são obtidas por meio da existência de uma função de Lyapunov e o problema é fornecer condições construtivas para computar o controlador de realimentação e a matriz de Lyapunov associada. Por exemplo, em (Derese e Noldus, 1980) o projeto de uma lei de controle por realimentação de estados linear e a região de estabilidade correspondente são reduzidos ao problema de encontrar uma solução de uma equação algébrica de Riccati.

O problema da síntese de ganhos estabilizantes por realimentação de saída é um dos problemas mais desafiadores em teoria de controle (Fu e Luo, 1997). As estratégias baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), extensivamente abordadas na literatura, são consideradas como problemas NP-completos (Fu e Luo, 1997). Uma solução para tornar o problema convexo foi apresentada em (Mehdi et al., 2004) através de uma meto-

dologia para a síntese de ganhos estáticos de realimentação de saída baseada em um procedimento de dois estágios. Tal metodologia foi desenvolvida e adaptada para lidar com realimentação dinâmica de saída de sistemas lineares (Aguilhari et al., 2012; Tognetti et al., 2012b). Contudo, o problema torna-se extremamente desafiador quando considerados sistemas não lineares, e em particular, sistemas bilineares.

Apesar dos recentes avanços dos métodos de análise e síntese para sistemas bilineares, o problema de realimentação dinâmica de saída tem sido pouco explorado nesse contexto (Andrieu e Tarbouriech, 2013; Sassi et al., 2017). Em Andrieu e Tarbouriech (2013) e Sassi et al. (2017) utiliza-se controle baseado em observadores e em Kang et al. (2013) é empregado o uso de controladores estáticos de saída por meio de SOS (do inglês, *sum-of-square*). Pelo conhecimento dos autores, não há trabalhos de realimentação dinâmica de saída por meio de LMIs para sistemas bilineares. Dessa forma, o presente artigo contribui na solução desse problema e apresenta uma estimativa de área de atração da validade do sistema em malha fechada. Destaca-se também a presença de um termo bilinear no controlador dinâmico como forma de compensar o efeito da bilinearidade do sistema. Exemplos numéricos validam a eficiência do método proposto.

Notação. Para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \succeq 0$ significa que todos os componentes de x , denotado por $x_{(i)}$, são não negativos. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \succeq y$ significa que $x_{(i)} - y_{(i)} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. $A_{(i)}$ denota a i -ésima linha da matriz A . Para duas matrizes simétricas, A e B , $A > B$ implica $A - B$ é definido positivo. A' denota a transposta de A , $\text{Tr}(A)$ denota traço de A e $\text{co}\{v_j, j = 1, \dots, N\}$ denota envelope convexo formado pelos elementos v_i . A matriz identidade de ordem n é denotada por I_n e a matriz nula $m \times n$ é de-

notada por $0_{m,n}$ (ou simplesmente I e 0 na ausência de confusão). O símbolo $\star$ denota os blocos simétricos em matrizes particionadas.

2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema bilinear contínuo no tempo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \sum_{q=1}^m N_q x(t) u_q(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é sinal de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de sinais medidos, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $N_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q = 1, \dots, m$. O objetivo é estabilizar o sistema (1) por meio do controlador dinâmico de realimentação de saída

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) + [K_1 x_c(t) \quad \dots \quad K_r x_c(t)] y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t)\end{aligned}\quad (2)$$

em que $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ são os estados do controlador, $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times r}$, $C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $D_c \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $K_q \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$, $q = 1, \dots, m$. Adotou-se um controlador de ordem completa, ou seja, $n_c = n$, e ganhos K_q de forma a compensar a não linearidade introduzida no sistema pelo termo N_q em (1).

Serão adotados as seguintes abreviações por facilidade de notação

$$\begin{aligned}N(x) &\triangleq [N_1 x(t) \quad \dots \quad N_m x(t)] \\ K(x_c) &\triangleq [K_1 x_c(t) \quad \dots \quad K_r x_c(t)]\end{aligned}$$

O objetivo deste trabalho é tratar o seguinte problema.

Problema 1 Encontrar um controlador dinâmico de saída (2) e uma região de estabilidade $\mathcal{S}_0$ tal que o sistema em malha fechada

$$\dot{x}_a(t) = A_{mf} x_a(t) \quad (3)$$

com

$$A_{mf} \triangleq \begin{bmatrix} A + (B + N(x))D_c C & (B + N(x))C_c \\ (B_c + K(x_c))C & A_c \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$x_a(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

tenha comportamento local assintoticamente estável para qualquer condição inicial $x(0)$ pertencente a $\mathcal{S}_0$.

Algumas definições de politopos serão apresentadas seguindo as linhas presentes em (Tarbouriech et al., 2009) antes de se propor uma solução para o Problema 1.

3 Principais Resultados

Dado um politopo $\chi(x) \subset \mathbb{R}^n$ definido por

$$\chi(x) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : Qx(t) \preceq q\} \quad (5)$$

ou, equivalentemente,

$$\chi(x) = \text{co}\{v_j, j = 1, \dots, s\} \quad (6)$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $n \leq g$, $\text{rank}(Q) = n$; $q \in \mathbb{R}^g$ e $q_{(i)} > 0$, $\forall i = 1, \dots, g$, e os vetores $v_j \in \mathbb{R}^n$ são os vértices que permitem descrever o envelope convexo que contém os pontos de $\chi(x)$. Note que a positividade do vetor q significa que a origem pertence ao interior de $\chi(x)$.

Uma estimativa para a região de estabilidade $\mathcal{S}_0$ pode ser dada por $\Omega(x_a)$, definido como

$$\begin{aligned}\Omega(x_a) &\triangleq \{x_a \in \mathbb{R}^n : x_a(t)' P x_a(t) \leq \gamma^{-1}, \\ &P = P' > 0\} \subseteq \chi(x_a)\end{aligned} \quad (7)$$

sendo $\Omega(x_a)$ interpretado como uma curva de nível da função de Lyapunov $V(x_a) = x_a(t)' P x_a(t)$ contida no politopo $\chi(x)$.

Para garantir a invariância da estimativa da região de estabilidade $V(x_a) \leq \gamma^{-1}$ é necessário $\dot{V}(x_a) < 0$ (estabilidade assintótica de (3)) e portanto foi necessário aumentar a dimensão do politopo χ incluindo os estados do controlador de forma que $\Omega(x_a) \subseteq \chi(x_a)$. Para a escolha $\Omega(x) \subseteq \chi(x)$ como uma estimativa da região de estabilidade, como em Tarbouriech et al. (2009), seria necessário que $\dot{V}(x_a) < 0$ implicasse $\dot{V}(x) < 0$, de forma a garantir a invariância de $\Omega(x)$, o que acontece quando $x_c(t) = 0$.

Condições de projeto de controladores dinâmicos de realimentação de saída baseadas em mudanças de variáveis para linearização do problema seguindo as linhas de Scherer et al. (1997) levam a presença do termo $N(x)$ na recuperação dos ganhos do controlador e portanto à dependência da leitura dos estados, o que assume-se não ser disponível. Dessa forma, adota-se como procedimento de projeto a síntese do controlador por meio de uma estratégias de dois estágios (Agulhari et al., 2012; Tognetti et al., 2012b). No primeiro estágio encontra-se um ganho de realimentação de estados para o sistema aumentado, que é utilizado como parâmetro de entrada na condição que recupera as matrizes do controlador dinâmico. Essa técnica tem a vantagem de proporcionar um controlador que não depende das leituras dos estados devido a presença de $N(x)$, contudo o ganho de entrada para a condição do segundo estágio não é único, podendo levar a resultados conservadores a depender do critério de projeto do controlador de realimentação de estados.

Observa-se que o termo $K(x_c)C$ em (4) é de difícil tratamento para a implementação numérica nas condições de projeto uma vez que demandaria a representação de uma região politópica a qual $x_c(t)$ pertenceria. Propõe-se a seguinte manipulação como forma de contornar esse problema.

Considere a matriz C em (1) particionada da seguinte forma

$$C = \begin{bmatrix} (C_{(1)})' & \cdots & C_{(r)}' \end{bmatrix}', \quad C_{(j)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tem-se,

$$\begin{aligned} K(x_c)y(t) &= K(x_c)Cx(t) = \sum_{j=1}^r K_j x_c(t) C_{(j)} x(t) \\ &= \sum_{j=1}^r C_{(j)} x(t) K_j x_c(t) \\ &= C(x) \hat{K} x_c(t), \end{aligned} \quad (8)$$

com

$$C(x) \triangleq [C_{(1)} x(t) I_n \quad \cdots \quad C_{(r)} x(t) I_n], \quad \hat{K} \triangleq \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_r \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Para o projeto via estratégia dois estágios é necessário escrever o problema de realimentação dinâmica como um problema de realimentação estática de saída. Dessa forma, a matriz A_{mf} em (4) e o sistema em malha fechada (3) considerando (8) são reescritos como

$$\begin{aligned} A_{mf} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C(x) \hat{K} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \\ &\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & B + N(x) \\ I & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}}_{K_{dof}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{C}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \hat{A} x_a(t) + \hat{B} \hat{u}(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C} x_a(t) \end{aligned}, \quad (10)$$

com

$$\hat{u}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{y}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

$\varphi(t) \triangleq \dot{x}_c(t) - C(x) \hat{K} x_c(t)$. Pode-se definir os seguintes ganhos de realimentação K_{sf} e K_{dof} em $\hat{u}(t) = K_{sf} x_a(t)$ e $\hat{u}(t) = K_{dof} \hat{y}(t)$. A matriz do sistema em malha fechada com a lei de realimentação de estados é definida por

$$\hat{A}_{mf} = \hat{A} + \hat{B} K_{sf}. \quad (11)$$

Observe que a estabilidade de (10) deve ser verificada para todo $x \in \chi(x)$. A partir da definição de χ em (6), para possibilitar a implementação numérica das condições de projeto, tem-se

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j(x) [N_1 v_j \quad \cdots \quad N_m v_j] \\ &= \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j(x) \mathbb{N}_j = \mathbb{N}(\beta) \end{aligned} \quad (12)$$

e, analogamente,

$$C(x) = \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j(x) C_j = \mathbb{C}(\beta)$$

com $\beta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ pertencendo ao simplex unitário

$$\mathcal{U} = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^s : \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j = 1, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, s \right\} \quad (13)$$

para todo $t \geq 0$.

O projeto dos ganhos K_{sf} e $\hat{K}$, que servirão como dados de entrada para a síntese de K_{dof} , é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1 Se existem matrizes $W = W' > 0$, G_1 , G_2 , G_3 , R e Z , e um escalar $\xi > 0$ tais que as seguintes condições são satisfeitas

$$\begin{bmatrix} \Phi_i + \Phi_i' & \star \\ W - G + \xi \Phi_i' & -\xi(G + G') \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, 2^n \quad (14)$$

com

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} AG_1 & AG_2 \\ 0 & \mathbb{C}_i R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B + \mathbb{N}_i \\ I & 0 \end{bmatrix} Z, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & G_3 \end{bmatrix},$$

então (10) é assintoticamente estável para todo $x \in \chi(x)$ com $\hat{u}(t) = K_{sf} x_a(t)$, $K_{sf} = ZG^{-1}$, e $\hat{K} = RG_3^{-1}$.

Prova: Seja a função de Lyapunov $V(x_a) = x_a(t)' W^{-1} x_a(t)$ e observe que

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2^n} \beta_i(x) \Phi_i = \hat{A}_{mf} G$$

com $\hat{A}_{mf}$ definido em (11), $R = \hat{K} G_3$ e $Z = K_{sf} G$. Tem-se que (14) implica em

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{mf} G + G' \hat{A}_{mf}' & \star \\ W - G + \xi G' \hat{A}_{mf}' & -\xi(G + G') \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

Multiplicando (15) por Λ a direita e por Λ' a esquerda, com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I \\ \hat{A}_{mf}' \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\hat{A}_{mf} W + W \hat{A}_{mf}' < 0 \Rightarrow W^{-1} \hat{A}_{mf} + \hat{A}_{mf}' W^{-1} < 0,$$

que garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. $\square$

Devido a presença de zeros nas matrizes da dinâmica (10), o ganho K_{sf} obtido no Teorema 1 pode ser esparso levando a um ganho K_{dof} com os blocos das matrizes B_c e C_c assumindo valores nulos. Para contornar esse problema, adotou-se o procedimento apresentado em Tognetti et al. (2012b), que consiste em acrescentar um termo T , de dimensão apropriada e representando grau de liberdade adicional, da seguinte forma:

$$\hat{A} + \hat{B} K_{sf} = \hat{A} + \hat{B} T^{-1} T K_{sf} = \hat{A} + \hat{B} T^{-1} \hat{K}_{sf} \quad (16)$$

$$\hat{K}_{sf} = TK_{sf}, \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix},$$

com $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Corolário 2 Se existem matrizes $W = W' > 0$, $G_1, G_2, G_3, R, Q, Z_2, Z_3$ e Z_4 , e escalares $\xi \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que as LMIs (14) são satisfeitas com

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} AG_1 & AG_2 \\ 0 & C_i R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B + N_i)(QY + Z_2) & (B + N_i)(Q + Z_4) \\ Z_3 Y & Z_3 \end{bmatrix}$$

e

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & G_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \beta I$$

então (10) é assintoticamente estável para todo $x \in \chi(x)$ com $\hat{u}(t) = K_{sf}x_a(t)$,

$$K_{sf} = \begin{bmatrix} Z_3 Y & Z_3 \\ QY + Z_2 & Q + Z_4 \end{bmatrix} G^{-1},$$

$$e \hat{K} = RG_3^{-1}.$$

Prova: A prova segue os passos do Teorema 1 e as linhas apresentadas em (Tognetti et al., 2012a). $\square$

Tendo como dados de entrada os ganhos K_{sf} e $\hat{K}$ obtidos do Teorema 1 ou Corolário 2, o seguinte teorema fornece condições suficientes para a obtenção das matrizes do controlador dinâmicos em K_{dof} .

Teorema 3 Sejam as matrizes K_{sf} e $\hat{K}$ dadas. Seja uma matriz $P = P' > 0$, e matrizes F, V, R, L e T , e um escalar $\gamma > 0$ e dado os parâmetros de ponderação $\omega_1 \geq 0$ e $\omega_2 \geq 0$ tais que é satisfeito o seguinte problema de minimização:

$$\min\{\omega_1 \text{Tr}(T) + \omega_2 \gamma\}$$

sujeito à

$$\begin{bmatrix} F\Psi_i + \Psi_i'F' & \star & \star \\ P - F' + V\Psi_i & -V - V' & \star \\ \Theta_i'F' + L\hat{C} - RK_{sf} & \Theta_i'V' & -R - R' \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$i = 1, \dots, 2^n$$

$$\begin{bmatrix} \gamma q_{(i)} & Q_{(i)} \\ Q_{(i)}' & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, g \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} T & P \\ P & P \end{bmatrix} > 0 \quad (19)$$

em que

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C_i \hat{K} \end{bmatrix} + \Theta_i K_{sf}, \quad \Theta_i = \begin{bmatrix} 0 & B + N_i \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

e, Q e q dados descrevendo $\chi(x_a)$. Então o controlador dinâmico de realimentação de saída (2) com

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = K_{dof} = R^{-1}L$$

faz da origem um ponto de equilíbrio assintoticamente localmente estável para o sistema em malha fechada (3) no conjunto invariante do domínio de atração $\Omega(x_a) \subseteq \chi(x_a)$.

Prova: Seja a função de Lyapunov $V(x_a) = x_a(t)'Px_a(t)$. Observe que

$$\hat{A}_{mf} = \sum_{i=1}^{2^n} \beta_i(x)\Psi_i \quad \text{e} \quad \hat{B} = \sum_{i=1}^{2^n} \beta_i(x)\Theta_i,$$

com $\hat{A}_{mf}$ dado em (11), assim (17) implica em

$$\begin{bmatrix} F\hat{A}_{mf} + \hat{A}_{mf}'F' & \star & \star \\ P - F' + V\hat{A}_{mf} & -V - V' & \star \\ \hat{B}'F' + R(K_{dof}\hat{C} - K_{sf}) & \hat{B}'V' & -R - R' \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

com $L = RK_{dof}$. A multiplicação de (20) por Γ a direita e por Γ' a esquerda, sendo

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I \\ A_{mf} \\ K_{dof}\hat{C} - K_{sf} \end{bmatrix},$$

resulta em $A_{mf}'P + P'A_{mf} < 0$, com A_{mf} dado por (4), implicando em $\dot{V}(x_a) < 0$. Observe que o bloco formado pelas primeiras e segundas linhas e colunas de (20) implica na estabilidade do sistema em malha fechada com a lei de realimentação $\hat{u}(t) = K_{sf}x_a(t)$. Para um politopo $\chi(x_a)$, a condição (18) assegura que $\Omega(x_a)$ definido em (7) está incluso no politopo $\chi(x_a)$, ou seja, $\Omega(x_a) \subseteq \chi(x_a)$ (Boyd et al., 1994), e a função $V(x_a)$ é localmente decrescente em $\Omega(x_a)$. Assim, $\Omega(x_a)$ é um conjunto invariante em relação as trajetórias de (1) e, portanto, um domínio de estabilidade do sistema não linear. A condição (19) assegura a minimização do traço de P pois, via complemento de Schur, tem-se $T \geq P$, e portanto a maximização do volume de $\Omega(x_a)$ (Boyd et al., 1994). $\square$

Destaca-se que para construir $\chi(x_a)$ para dado $\chi(x)$, os limites dos estados do controlador podem ser definidos arbitrariamente grandes ($q_{(i)} \gg 0, i > n$) sem implicar em conservadorismo na fatibilidade das condições de projeto.

4 Exemplos Numéricos

Todas as rotinas foram implementadas em Matlab, versão 7.10 (R2010a) usando Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999), em um computador Intel Core i7 CPU (3.40GHz), 8GB RAM, e os resultados apresentados foram truncados com 4 casas decimais.

Exemplo 1 Considere o sistema (1) descrito pelos seguintes parâmetros

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \\ N_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e o polítopo $\chi(x_a)$ definido por $|x_i(t)| < 1$, $i = 1, 2$, e $|x_{c_i}(t)| < 5$, $i = 1, 2$. Para o projeto do controlador dinâmico (2), implementou-se o Corolário 2, com $\xi = 1$ e $\beta = 0.1$, e o Teorema 3, com $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Obteve-se $\gamma = 2.20$,

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0793 & -0.0003 & 0.0005 \\ -0.0352 & -1.0563 & -0.2872 \\ 0.0332 & -0.0221 & 0.8948 \\ -0.0112 & 0.0056 & -0.3236 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.2877 & 0.0024 \\ -0.0036 & 0.2153 \end{bmatrix}.$$

As projeções da região de atração dado por $\Omega(x_a)$ são mostradas na Figura 1, e na Figura 2 no plano $x_c(t) = 0$ e com volume proporcional a $\sqrt{\det(P^{-1}/\gamma)} = 0.6233$.

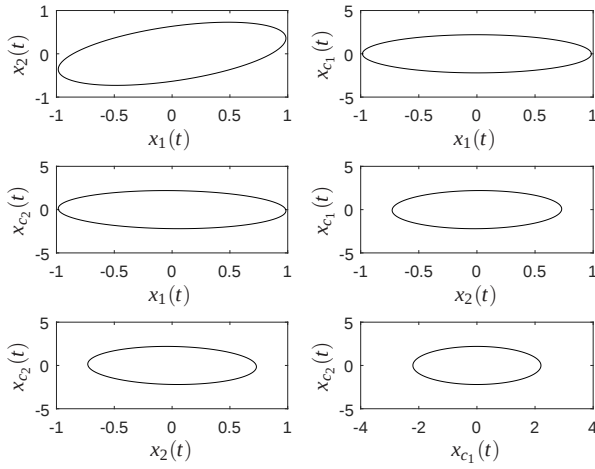


Figura 1: Projeções da estimativa da região de atração dada por $\Omega(x)$ para o Exemplo 1.

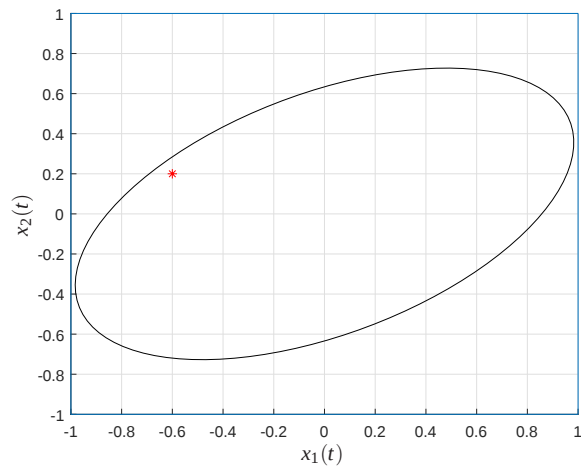


Figura 2: Estimativa da região de atração dada por $\Omega(x)$ para o Exemplo 1 na projeção $x_c = 0$ e condição inicial $x(0) = [-0.6 \ 0.2]'$.

A evolução temporal do sistema iniciado em $x_a(0) = [-0.6 \ 0.2 \ 0 \ 0]'$ e o sinal de entrada $u(t)$ ge-

rado pelo controlador dinâmico são expressas na Figura 3 e 4, respectivamente. Na Figura 4, fica evidente que o esforço de controle é importante no início da simulação, e depois decaindo a zero.

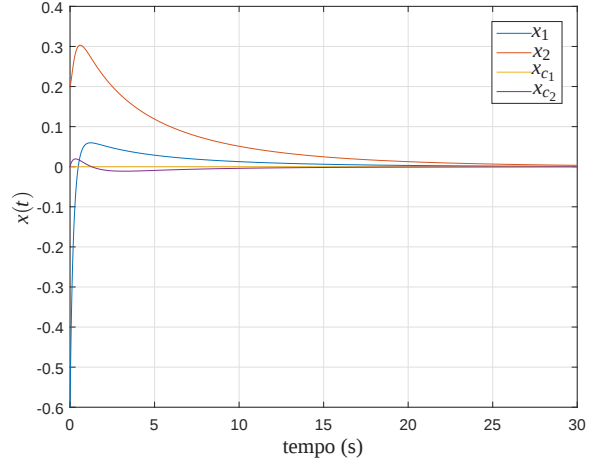


Figura 3: Evolução dos estados para a condição inicial $x_a(0) = [-0.6 \ 0.2 \ 0 \ 0]'$ para o Exemplo 1.

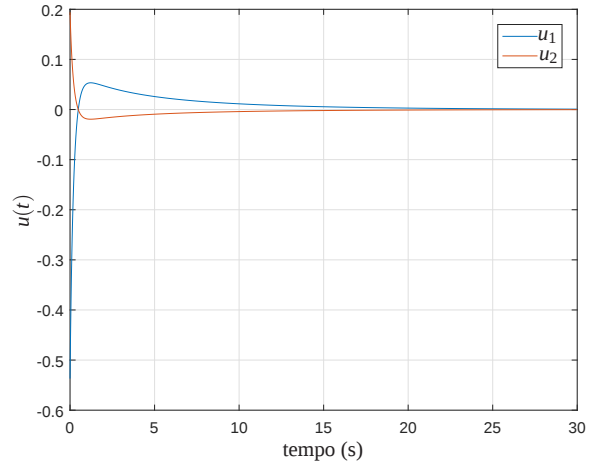


Figura 4: Entradas de controle $u(t)$ para a condição inicial $x_a(0) = [-0.6 \ 0.2 \ 0 \ 0]'$ para o Exemplo 1.

Exemplo 2 Considere o sistema adaptado de Tarbouriech et al. (2009) na forma (1) e descrito pelos seguintes parâmetros

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 & 4 \\ 4.3 & 6.0 & 5.0 \\ 3.2 & 6.8 & 7.2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0.7 & -1.3 \\ 0 & -4.3 \\ 0.8 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e o polítopo $\chi(x)$ definido por $|x_i(t)| < 10$, $i = 1, 2, 3$.

Por meio da implementação do Corolário 2, com $\xi = 1$ e $\beta = 0.1$, e do Teorema 3, com $\omega_1 = \omega_2 = 1$

obteve-se $\gamma = 0.8785$ e as seguintes matrizes para o controlador dinâmico (2) e a matriz de Lyapunov P

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ \bar{C}_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8962 & 15.6880 & -1.6261 & -0.9902 \\ 41.5641 & 58.5624 & -7.4950 & -3.5282 \\ 48.9749 & 70.2553 & -9.2106 & -4.0323 \\ \hline 295.2243 & 423.3539 & -51.9379 & -25.8147 \\ -293.9536 & -421.5313 & 51.7110 & 25.7059 \end{bmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.0099 & -0.0000 & -0.0001 \\ -0.0000 & 0.0099 & -0.0002 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0098 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.3648 & 0.2653 & -0.1587 \\ 0.2653 & 0.3188 & -0.1544 \\ -0.1587 & -0.1544 & 0.1949 \end{bmatrix}.$$

As projeções da região de atração dado por $\Omega(x_a)$ são mostradas nas Figuras 5 e 6, com volume do elipsoide proporcional a $\sqrt{\det(P^{-1}/\gamma)} = 16.7963$, junto com a trajetória dos estados partindo da condição inicial $x_a(0) = [-2.33 \ 3.04 \ 0.84 \ 0 \ 0 \ 0]'$.

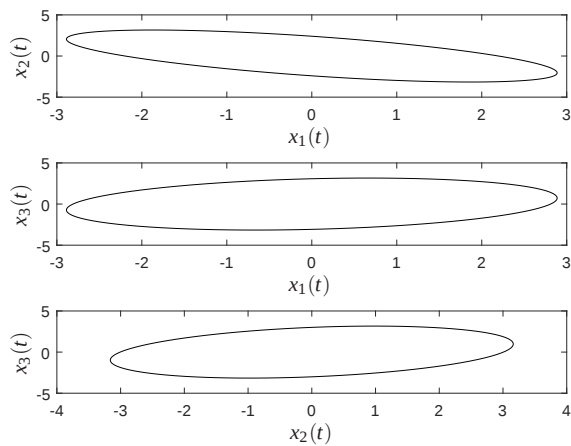


Figura 5: Projeções da estimativa da região de atração dada por $\Omega(x)$ para o Exemplo 2.

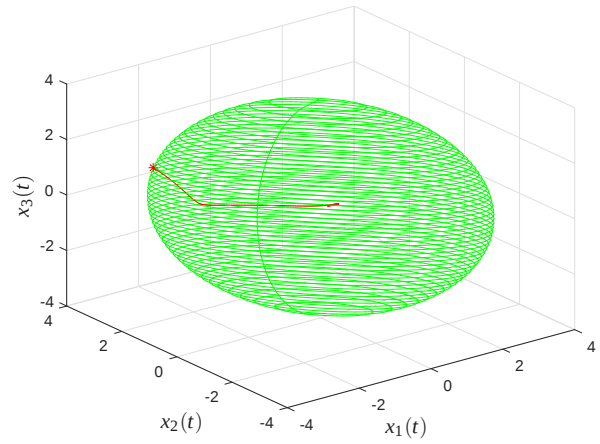


Figura 6: Estimativa da região de atração dada por $\Omega(x)$ e a trajetória dos estados partindo da condição inicial $x_a(0) = [-2.33 \ 3.04 \ 0.84 \ 0 \ 0 \ 0]'$, localizada na borda da elipse, para o Exemplo 2.

5 Conclusões

Esse artigo propôs condições convexas suficientes para o projeto de um controlador dinâmico de realimentação de saída de ordem completa associado a região de estabilidade para um sistema bilinear. Como trabalhos futuros pretende-se tratar o caso com incertezas, controladores de ordem reduzida e o uso de funções de Lyapunov não quadráticas.

Agradecimentos

Às agências CAPES, CNPq e FAPDF.

Referências

- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). LMI relaxations for reduced-order robust $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(6): 1532–1537.
- Amato, F., Cosentino, C. e Merola, A. (2007). On the region of attraction of nonlinear quadratic systems, *Automatica* **43**(12): 2119–2123.
- Andrieu, V. e Tarbouriech, S. (2013). Global asymptotic stabilization for a class of bilinear systems by hybrid output feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(6): 1602–1608.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Dereze, I. e Noldus, E. (1980). Design of linear feedback laws for bilinear systems, *International Journal of Control* **31**(2): 219–237.

- Fu, M. e Luo, Z. (1997). Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design, *Systems & Control Letters* **30**(5): 209–215.
- Kang, D., Won, S. e Jang, Y. J. (2013). Guaranteed cost control for bilinear systems by static output feedback, *Applied Mathematics and Computation* **219**(14): 7398 – 7405.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the IEEE CCA/ISIC/CACSD Multiconference*, Taipei, Taiwan.
- Mehdi, D., Boukas, E. K. e Bachelier, O. (2004). Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **21**(1): 1–13.
- Merola, A., Cosentino, C., Colacino, D. e Amato, F. (2017). Optimal control of uncertain nonlinear quadratic systems, *Automatica* **83**: 345 – 350.
- Mohler, R. R. e Kolodziej, W. J. (1980). An overview of bilinear system theory and applications, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **10**(10): 683–688.
- Sassi, A., Zasadzinski, M., Ali, H. S. e Abderrahim, K. (2017). A robust reduced order functional H_∞ observer for time delay bilinear systems, *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pp. 637–642.
- Scherer, C., Gahinet, P. e Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(7): 896–911.
- Stepanenko, Y. e Yang, X. (1996). Stabilizing controllers for discrete bilinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **06**(08): 855–867.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- Tarbouriech, S., Queinnec, I., Calliero, T. R. e Peres, P. L. D. (2009). Control design for bilinear systems with a guaranteed region of stability: an lmi-based approach, *Proc. 17th Medit. Conf. Contr. Aut. (MED2009)*, Thessaloniki, Greece, pp. 809–814.
- Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012a). Realimentação dinâmica de saída de ordem reduzida para sistemas nebulosos Takagi-Sugeno discretos no tempo, *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2928–2934.
- Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012b). Reduced-order dynamic output feedback control of continuous-time T–S fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* **207**: 27–44.