

CONTROLE EXTREMAL DE MAPEAMENTOS ESCALARES COM SINAL DE HESSIANA DESCONHECIDO

ALINE LOPES DIBO*, TIAGO ROUX OLIVEIRA*

**Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil*

Emails: alineldibo@gmail.com, tiagoroux@uerj.br

Abstract— Extremum seeking control aims at determining and keeping the output of a nonlinear map on its unknown extremum point. In the literature, despite of considering an unknown objective function in the real-time optimization problem, it is mandatory to know whether the extremum point is a maximum or a minimum, which is determined by means of the Hessian signs in case of static scalar maps. This paper proposes the process of extremum seeking occurs independent of the Hessian sign information. The key idea is to combine the classical extremum seeking approach with a switching monitoring function. The switching algorithm will drive the closed-loop system to the unknown extremum, neglecting if it is a maximum or a minimum. In addition, simulation results show the robustness properties of the proposed recipe under changes of the Hessian signs occurring “on-the-fly” fashion as well as its adaptability to solve distinct online minimizing and maximizing problems in sequence.

Keywords— Extremum-seeking Control, Adaptive Control, Uncertain Nonlinear Systems, Switching Monitoring Function, Real-time Optimization.

Resumo— O controle extremal tem como objetivo determinar e manter a saída de um mapeamento não-linear desconhecido em seu ponto de extremo. Na literatura, apesar de não se conhecer a função objetivo do problema de otimização em tempo real, é necessário saber se o extremo desconhecido se trata de um ponto de máximo ou de mínimo, informação esta caracterizada pelo sinal da Hessiana do mapeamento escalar estático. Neste trabalho, propõe-se que o processo de busca pelo extremo (busca extremal) se dê independentemente dessa informação sobre o sinal da Hessiana. A ideia chave para que o processo de otimização aconteça é combinar o esquema clássico de controle extremal com uma função de monitoração chaveada. O algoritmo de chaveamento irá conduzir o sistema em malha fechada ao extremo desconhecido, independente de se tratar de um ponto de máximo ou de mínimo. Além disso, resultados de simulação mostram a robustez do algoritmo proposto a mudanças repentinas do sinal da Hessiana desconhecido e sua capacidade de adaptação na tarefa de tratar problemas distintos de minimização e maximização em tempo real e em sequência.

Palavras-chave— Controle Extremal, Controle Adaptativo, Sistemas Não-Lineares Incertos, Funções de Monitoração Chaveadas, Otimização em Tempo Real.

1 Introdução

O controle extremal, ou busca extremal, do inglês *extremum seeking control* (ESC) surgiu com (Leblanc, 1922), e se desenvolveu intensamente entre 1940 e 1970 (Ariyur and Krstić, 2003). Mas foi recentemente que o controle extremal atingiu o ápice de popularidade (Tan et al., 2010), obtendo resultados promissores para as mais diversas aplicações (Krstić et al., 2014), sendo considerada uma das áreas mais promissoras do controle adaptativo (Astrom and Wittenmark, 2005).

Esse método de otimização em tempo real não é baseado no conhecimento do modelo (Krstic and Wang, 2000) e tem como objetivo determinar o extremo de uma função quando aplicado em situações em que se depara com uma não linearidade, quando esta apresenta um mínimo ou máximo no problema de controle. O ESC não requer conhecimento explícito da planta nem da função a ser otimizada, é necessário apenas que se saiba que a função em questão possui um extremo (Krstić, 2009). O sinal da Hessiana irá definir se o mapa estático se trata de uma função de máximo ou de mínimo.

No tradicional ESC baseado em *dither* utiliza-se um filtro passa-alta na saída da planta e uma

perturbação senoidal para estimar o gradiente da função objetivo (Ariyur and Krstić, 2003). Este método é reconhecido pela sua simplicidade e sua adaptação satisfatória. Porém, pode-se garantir apenas a estabilidade local, assumindo-se acesso a todo vetor de estado (Krstic and Wang, 2000).

No geral, em um problema de otimização clássica assume-se que o sinal da Hessiana é sempre conhecido. Neste trabalho, questiona-se a necessidade do conhecimento desse sinal, ou seja, propõe-se que a otimização seja feita sem que se possa afirmar que o ponto de extremo é um máximo ou um mínimo. Essa falta de conhecimento pode ser contornada utilizando um algoritmo de chaveamento baseado em uma função de monitoração para a estimativa do gradiente.

Nos últimos anos, foram desenvolvidos trabalhos de ESC baseados em funções de monitoração, em (Yan et al., 2008), (Oliveira et al., 2007) e (Aminde et al., 2013), porém em todas elas o sinal da hessiana é conhecido. A proposta desse trabalho é desenvolver uma abordagem inexistente na literatura e apresentar resultados em que, independente de conhecer o sinal da Hessiana, o sistema seja conduzido para uma vizinhança pe-

quena do extremo desconhecido.

2 Formulação do Problema

Considere o mapa estático

$$y(t) = Q(\theta), \quad (1)$$

com um extremo na vizinhança de θ^* e podendo mensurar y e manipular θ . O esquema de busca extremal baseado em gradiente para este mapa estático quadrático de uma única entrada, é mostrado na Figura 1, e seus sinais de perturbação são definidos como

$$S(t) = a \sin(\omega t), \quad (2)$$

$$M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (3)$$

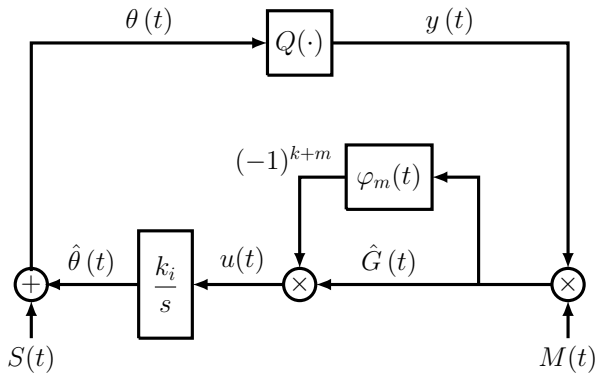


Figura 1: Esquema de controle por busca extremal pelo método gradiente.

O mapa quadrático a ser otimizado é definido por

$$y(t) = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2, \quad (4)$$

onde $H \neq 0$ é a Hessiana desconhecida do mapeamento estático, (θ^*, y^*) é o ponto de extremo desconhecido, com $\theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$. Em particular, assumiremos aqui que o sinal da Hessiana – $\text{sgn}(H)$ – é desconhecido.

Para o desenvolvimento, três diferentes θ são apresentados, a entrada θ , o ponto desconhecido que otimiza o mapa, θ^* , e a estimativa desse ponto, $\hat{\theta}$. Pode ser visto também, a função de monitoração $\varphi_m(t)$, onde $k \in [0, 1, \dots]$ é o índice de chaveamento gerado pela função de monitoração e $m \in [0, 1]$. Logo, dependendo da escolha de m (0 ou 1) podemos definir o valor inicial para a estimativa da direção de controle desconhecida $(-1)^{(k+m)}$ (Rodrigues and Oliveira, 2017).

A entrada do mapa, $\theta(t)$, como pode ser visto, se dá pela perturbação de sinal $S(t)$ somada à estimativa de θ^* .

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\omega t), \quad (5)$$

e o sinal de controle pode ser definido por

$$u(t) = (-1)^{(k+m)} k_i \hat{G}(t). \quad (6)$$

A estimativa $\hat{\theta}$ controla a velocidade de estimação com o integrador e o ganho k_i . Para que sejam encontrados resultados satisfatórios é preciso que o erro de estimação $\tilde{\theta}(t)$, convirja para zero, e esse erro é obtido através da diferença entre a estimativa $\hat{\theta}(t)$, e o ponto de otimização do mapa θ^* ,

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*. \quad (7)$$

Ainda analisando a Figura 1, facilmente constata-se que

$$\hat{G}(t) = M(t)y(t). \quad (8)$$

Pode-se afirmar também que

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = (-1)^{(k+m)} k_i \hat{G}(t), \quad (9)$$

e substituindo (3) e (4) em (8), tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) = y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t) \sin(\omega t) + \\ + 2H\tilde{\theta}(t) \sin^2(\omega t) + aH \sin^3(\omega t). \end{aligned} \quad (10)$$

Sabendo que $\sin^2(\omega t) = (1 - \cos(2\omega t))/2$, pode-se reescrever (10) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) = y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t) \sin(\omega t) + H\tilde{\theta}(t) \\ - H\tilde{\theta}(t) \cos(2\omega t) + aH \sin^3(\omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo (11) em (9), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) = (-1)^{(k+m)} [k_i \frac{2}{a} y^* \sin(\omega t) - H\tilde{\theta} \cos(2\omega t) \\ + \frac{H}{a} \sin(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + H\tilde{\theta} + aH \sin^3(\omega t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Para continuidade da análise de estabilidade aplica-se a Teoria da Média (Khalil, 2002). O método aproxima a solução de um sistema pela solução de um sistema médio. No sistema encontrado, isso é feito calculando a média temporal dos termos senoidais e obtém-se, então,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = (-1)^{(k+m)} k_i H \tilde{\theta}_{av}(t), \\ = \left[(-1)^{(k+m)} \text{sgn}(k_i) \text{sgn}(H) \right] |k_i| |H| \tilde{\theta}_{av}(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Para garantir a estabilidade desse sistema, é preciso conhecer o sinal de H , para, a partir deste, definir o sinal de k_i . Como o sinal da hessiana é desconhecido, se faz necessário usar a função de monitoração, sendo esta aplicada sempre que o sinal de controle é desconhecido. Mais detalhes serão apresentados na próxima seção.

3 Função de Monitoração

3.1 Majorante do Gradiente

A função de monitoração é construída com base no majorante do Gradiente. Para isso, assumiremos num primeiro momento, que o sinal de H é conhecido, ou seja, que é possível saber se o mapa possui um sinal de máximo ou de mínimo.

Partindo do esquema básico, Figura 2, por hora é conveniente a utilização de filtros passa-alta e passa-baixa para melhorar o desempenho do sistema e obter o majorante do gradiente. Para encontrar esse majorante, é necessário obter a equação dinâmica do gradiente. Com algum abuso de notação, nesta seção iremos misturar os domínios do tempo e frequência, assumindo que a função de transferência age como um operador na função no domínio do tempo.

Analisando novamente a Figura 2, e substituindo (5) em (4), tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= y^* + \frac{H}{2} \left[\left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) + a \sin(\omega t) \right]^2, \\ &= y^* + \frac{H}{2} \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right)^2 + \frac{H}{2} a^2 \sin^2(\omega t) + \\ &\quad + H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) a \sin(\omega t), \\ &= y^* + \frac{H}{2} \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right)^2 - \frac{H}{4} a^2 \cos(2\omega t) + \\ &\quad + H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) a \sin(\omega t) + \frac{H}{4} a^2. \end{aligned} \quad (14)$$

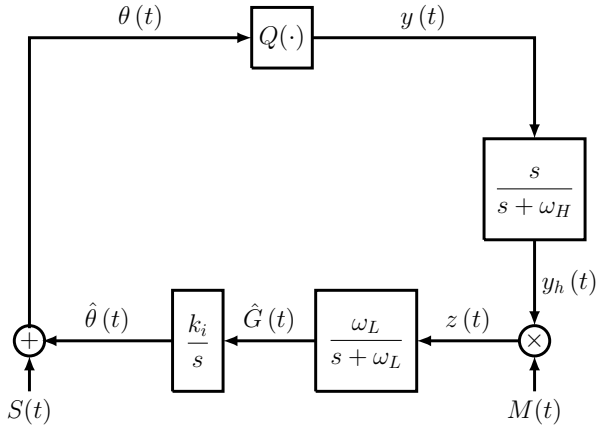


Figura 2: Esquema de ESC pelo método gradiente utilizando filtros passa-alta e passa-baixa.

Ao passar pelo filtro passa-alta, só permanecem os sinais de alta frequência, os componentes de baixa frequência serão atenuados.

$$\begin{aligned} y_h &= \frac{s}{s + \omega_H} y \\ &= H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) a \sin(\omega t) - \frac{H}{4} a^2 \cos(2\omega t). \end{aligned} \quad (15)$$

Ao passar pela perturbação de sinal:

$$\begin{aligned} z(t) &= 2H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) \sin(\omega t) - \frac{H}{2} a \cos(2\omega t) \sin(\omega t), \\ &= H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) - H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) \cos(2\omega t) + \\ &\quad - \frac{H}{4} a \sin(3\omega t) + \frac{H}{4} a \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (16)$$

Em seguida, o filtro passa-baixa descarta os sinais de alta frequência, permanecendo apenas os componentes de baixa frequência.

Obtém-se então, a seguinte estimativa

$$\hat{G} = \frac{\omega_L}{s + \omega_L} z = H \left(\hat{\theta}(t) - \theta^* \right) \quad (17)$$

para o gradiente de (4):

$$G(t) = \frac{\partial y}{\partial \theta} = H \left(\theta(t) - \theta^* \right). \quad (18)$$

Voltando para a estimativa (17) e substituindo (5), temos:

$$\hat{G}(t) = H \left(\theta(t) - a \sin(\omega t) - \theta^* \right), \quad (19)$$

$$= H \left(\theta(t) - \theta^* \right) - H a \sin(\omega t). \quad (20)$$

Reconhecendo (18) em (20):

$$\hat{G}(t) = G(t) - H a \sin(\omega t). \quad (21)$$

Isolando $G(t)$ e derivando (18):

$$\dot{G}(t) = H \dot{\theta}. \quad (22)$$

Sabemos que $\hat{\theta} = \theta - a \sin(\omega t)$ e que $\dot{\hat{\theta}} = k_i \hat{G}(t)$:

$$\dot{\theta} = a \omega \cos(\omega t) + \dot{\hat{\theta}}, \quad (23)$$

$$= a \omega \cos(\omega t) + k_i G(t) - k_i H a \sin(\omega t). \quad (24)$$

Substituindo (24) em (22), obtém-se:

$$\dot{G}(t) = H k_i G(t) + H a \omega \cos(\omega t) - k_i H^2 a \sin(\omega t). \quad (25)$$

Para encontrar a solução da equação diferencial (25), aplica-se a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(\dot{G}(t)) = H k_i \mathcal{L}(G(t)) + H a \omega \mathcal{L}(\cos(\omega t)) - k_i H^2 a \mathcal{L}(\sin(\omega t)), \quad (26)$$

e obtém-se

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s - k_i H} G(t_0) + \\ &\quad + \frac{H a \omega}{2 \sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left[\frac{e^{j \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{k_i H} \right)}}{s - j \omega} + \frac{e^{-j \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{k_i H} \right)}}{s + j \omega} \right] \\ &\quad - \frac{k_i H^2 a}{2 \sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{e^{j \left[\text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{k_i H} \right) - \frac{\pi}{2} \right]}}{s - j \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-j \left[\text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{k_i H} \right) - \frac{\pi}{2} \right]}}{s + j \omega} \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\quad (28)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned}
G(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{k_i H(t-t_i)} G(t_i) + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{e^{\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right]}}{2} + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right]}}{2} \right\} - \\
&- \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{e^{\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) - \frac{\pi}{2} \right]}}{2} + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) - \frac{\pi}{2} \right]}}{2} \right\}, \\
&= e^{k_i H(t-t_i)} G(t_i) + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \cos \left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right] \\
&- \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \sin \left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Chegamos então ao majorante de $G(t)$

$$\begin{aligned}
|G(t)| &\leq e^{k_i H(t-t_i)} |G(t_i)| + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \cos \left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right] \right| \\
&- \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \sin \left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right] \right|.
\end{aligned} \tag{30}$$

A partir de (21), temos:

$$\begin{aligned}
|G(t)| &= |\hat{G}(t) - H \text{asen}(\omega t)|, \\
&\leq |\hat{G}(t)| + |H \text{asen}(\omega t)|.
\end{aligned} \tag{31}$$

Substituindo (31) em (30), obtém-se :

$$\begin{aligned}
|G(t)| &\leq e^{k_i H(t-t_i)} |\hat{G}(t_i)| + |H \text{asen}(\omega t)| + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \cos \left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right] \right| \\
&- \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \sin \left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) \right] \right|.
\end{aligned} \tag{32}$$

Sabendo que o valor máximo das senóides é 1 e invocando (21), logo, podemos escrever:

$$|\hat{G}(t)|, |G(t)| \leq e^{k_i H(t-t_i)} |\hat{G}(t_i)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right), \tag{33}$$

onde $t_i \geq 0$ para qualquer instante de tempo inicial.

3.2 Projeto da Função de Monitoração

Como dito anteriormente, o projeto da monitoração se dá a partir do majorante do Gradiente, definido em (33). É sabido também que os sinais de H e k_i são sempre opostos, ou seja, $\text{sgn}(H) = -\text{sgn}(k_i)$. Pode-se então definir a função auxiliar $\varphi_k(t)$ como

$$\varphi_k(t) = e^{-\lambda(t-t_k)} |\hat{G}(t_k)| + a(k) \left(\frac{1}{\omega} + a \right), \tag{34}$$

onde $0 < \lambda < |k_i||H|$, o termo t_k é o instante em que ocorre o chaveamento, k é a quantidade de chaveamentos e $a(k)$ é qualquer sequência monotonicamente crescente em k .

A função de monitoração $\varphi_m(t)$ pode ser definida como (Oliveira et al., 2007)

$$\varphi_m(t) = \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, +\infty). \tag{35}$$

Como trata-se de uma abordagem onde o sinal da Hessiana é desconhecido, não se pode afirmar nada sobre o extremo desse sistema, invoca-se, então, φ_m . Visto em (35), sempre $|\hat{G}(t)| \leq \varphi_k(t_k)$ em $t = t_k$. Deste modo, o tempo de chaveamento t_k será definido (para $k \geq 0$) por

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{t \geq t_k : |\hat{G}(t)| = \varphi_k(t)\}, \\ +\infty, \end{cases} \tag{36}$$

onde $k \in [1, 2, \dots]$ e $t_0 := 0$. Por construção, a seguinte desigualdade é obtida de (35)

$$|\hat{G}(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, +\infty). \tag{37}$$

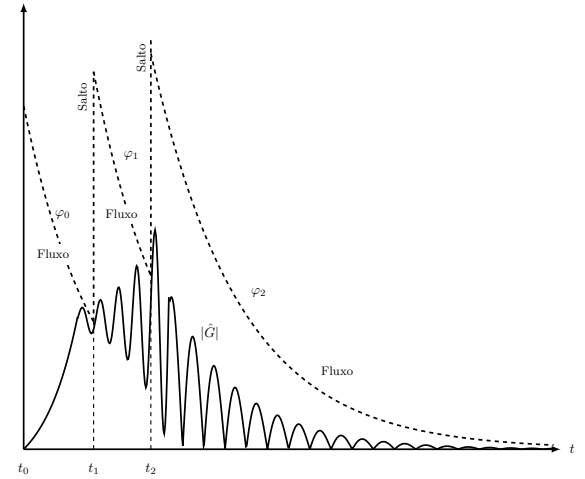


Figura 3: Trajetória da função de monitoração φ_m (linha pontilhada) e $|\hat{G}(t)|$ (linha sólida).

A função de monitoração pode ser vista como um operador híbrido (Goebel et al., 2012) onde cada salto é definido pelo tempo de chaveamento t_k (36). Após cada salto, um decaimento de forma exponencial é percebido, esse comportamento é chamado de *fluxo*, e a Figura 3 ilustra o valor absoluto do gradiente ao longo do tempo e a função

de monitoração (Rodrigues and Oliveira, 2017), a última sendo levada à convergência quando a primeira alcança também esta condição.

4 Análise de Estabilidade

Teorema 1 *Considerando o mapa estático (4), com a lei de controle (6) e a função de monitoração (35). Então, se ω em (2) e (3) é suficientemente grande, pode-se concluir que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right), \quad (38)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2} + a^2\right), \quad (39)$$

independente do sinal da Hessiana.

Prova: Apenas um esboço da prova é apresentado. Por simplicidade, assumiremos em (33) que o conjunto residual de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right) = k_1\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$, sendo k_1 uma constante fixa desconhecida. Considera-se dois casos: $|G(t)| > \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ e $|G(t)| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$. Enquanto $|G(t)| < \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$, suponhamos por contradição que a lei de controle $u(t)$, vista em (6), realiza infinitos chaveamentos, $\forall t \in [0, +\infty)$. Então, o termo $a(k)$ (34) aumentará ilimitadamente à medida que $k \rightarrow +\infty$. Assim, existe um valor finito $\kappa > 0$ tal que para $k \geq \kappa$: (i) o termo $a(k)$ será o limitante superior para k_1 em (33), tal que $k_1\left(\frac{1}{\omega} + a\right) < a(\kappa)\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$, e (ii) o sinal da Hessiana é corretamente estimado, i.e., $(-1)^{(\kappa+m)} \text{sgn}(k_i) \text{sgn}(H) = -1$. Por conveniência, define-se

$$\zeta(t) := e^{k_i H(t-t_i)} |\hat{G}(t_i)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right), \quad (40)$$

de acordo com o lado direito da desigualdade (33). A partir do item (i), conclui-se que $\varphi_m(t) > \zeta(t)$, $\forall t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$. Do item (ii), ζ é o limitante superior válido para $|G(t)|$. Consequentemente, nenhum chaveamento irá ocorrer após $t = t_\kappa$, i.e., $t_{\kappa+1} = +\infty$ - veja (36) - o que nos leva a uma contradição. Portanto, $\varphi_k(t)$ deve parar o chaveamento após algum valor finito $k = N$ e $t_N \in [0, +\infty)$, sempre que $|G(t)| > \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$. Assim sendo, de (34), (35) e (37), conclui-se que

$$|G(t)| \leq e^{-\lambda(t-t_N)} |\hat{G}(t_N)| + \underbrace{a(N)\left(\frac{1}{\omega} + a\right)}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)}, \quad (41)$$

i.e., o gradiente converge para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$. Lembrando que no caso complementar já temos $|G(t)| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$. Logo, conclui-se que $G(t)$ tende localmente para um conjunto residual da ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$, à medida que $t \rightarrow +\infty$.

Desta forma, a partir de (18) tem-se que $\theta(t) - \theta^* = H^{-1}G(t)$, podendo-se concluir (38). Além disto, de (4) e (38), obtém-se (39). $\square$

5 Resultados de Simulação

Considere o mapa estático quadrático de uma entrada utilizado nas seções anteriores, com Hessiana $H = 2$, otimizador $\theta^* = 5$, e valor ótimo $y^* = 5$. Os parâmetros do sinal *dither* e do proposto ESC baseado no método de Gradiente tem os seguintes valores $\omega = 10$, $a = 0.2$, $c = 10$ e $K = 0.2$.

A simulação numérica foi desenvolvida com o propósito de descobrir se a função de monitoração seria capaz de levar a saída do sistema para a convergência, independente de saber se tratar de uma função de máximo ou de mínimo, corrigindo qualquer possível erro de interpretação do sistema.

Nos resultados da simulação de malha fechada, Figura 4(a), é possível ver a entrada do mapa, θ , convergindo para o ponto de otimização, θ^* . O sistema foi inicializado achando se tratar de um problema de máximo, Figura 4(b), porém, nota-se que a saída, $y(t)$, começa a se distanciar logo em seguida, divergindo em aproximadamente dez segundos. Visto o erro na interpretação do sistema, a função de monitoração fez um chaveamento identificando o extremo como mínimo, recuperando a saída e garantindo a convergência do sistema.

A fim de testar a eficiência dessa abordagem, após 30 segundos, a direção de controle foi alterada (pode ser visto em zoom na Figura 4(d)) e com isso inicia-se novamente a análise de $y(t)$. Desta vez o saída foi interpretada com um sinal de mínimo e após 40 segundos começa a divergir. Novamente a função de monitoração atua e seu chaveamento leva a saída a identificar o extremo máximo e convergir.

Na Figura 4(c) pode ser vista a trajetória da função de monitoração, φ_m , e de $|\hat{G}(t)|$. Nos momentos em que a saída, $y(t)$ e, consequentemente, $|\hat{G}(t)|$ começam a divergir, acontece o chaveamento de φ_m , levando ambos à convergência, mesmo que momentânea. O decaimento exponencial da função de monitoração se dá após cada chaveamento e será alcançado em definitivo se o mesmo comportamento puder ser visto em $|\hat{G}(t)|$, ou seja, se a convergência acontecer.

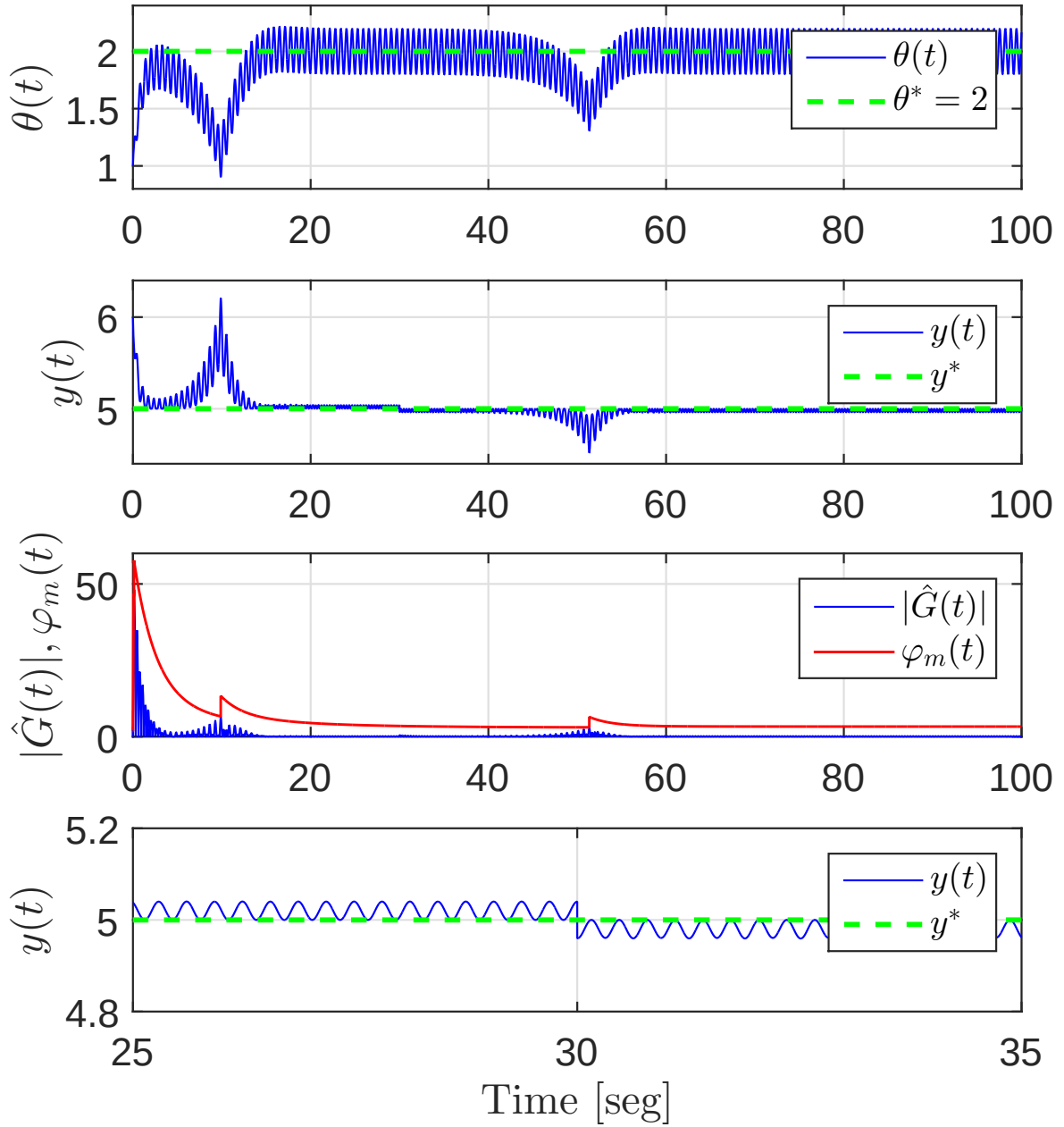


Figura 4: Resultados de simulação: (a) entrada do mapa $\theta(t)$ e o ponto de otimização θ^* ; (b) saída $y(t)$ e o valor ótimo y^* ; (c) função de monitoração $\varphi_m(t)$ e $|\hat{G}(t)|$; (d) *zoom* no sinal de saída na ocorrência de uma mudança de direção do sinal de controle.

6 Conclusões

Este trabalho apresentou uma proposta de otimização em tempo real de um mapeamento estático escalar desconhecendo o sinal de sua Hessiana. A estratégia escolhida para contornar esse problema foi a utilização de uma função de monitoração capaz de conduzir o sistema a uma vizinhança do extremo desconhecido. A ideia proposta foi testada em simulações numéricas e foram apresenta-

dos resultados satisfatórios. A função de monitoração foi capaz de levar o sistema à convergência e se mostrou eficiente também quando a direção de controle (sinal da Hessiana) sofre alteração.

7 Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela CAPES, CNPq e FAPERJ.

Referências

- Aminde, N. O., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2013). Global output-feedback extremum seeking control via monitoring functions, *52nd IEEE Conference on Decision and Control* pp. 1031–1036.
- Ariyur, K. B. and Krstić, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking*, John Wiley & Sons.
- Astrom, K. J. and Wittenmark, B. (2005). *Adaptive Control*, Canada: Addison-Wesley.
- Goebel, R., Sanfelice, R. G. and Teel, A. (2012). Hybrid dynamical systems – modeling, stability, and robustness., *Princeton University Press*. pp. ISBN: 978-0-691-15389-6.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*., Englewood Cliffs: Prentice-Hall,.
- Krstić, M. (2009). *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*, Birkhauser.
- Krstić, M., Ghaffari, A. and Seshagiri, S. (2014). Extremum seeking for wind and solar energy applications, *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation* pp. ISBN: 978-1-4799-5825-2.
- Krstic, M. and Wang, H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, *Automatica* **36**(4): 595–601.
- Leblanc, M. (1922). *Sur l’électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée*, Revue Generale de l’Electricite.
- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J., Nunes, E. V. L. and Hsu, L. (2007). Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes., *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. pp. 692–707.
- Rodrigues, V. H. P. and Oliveira, T. R. (2017). Global adaptive hosm differentiators via monitoring functions and hybrid norm-state observers for output feedback., *International Journal of Control*. p. DOI:10.1080/00207179.2017.1392041.
- Tan, Y., Moase, W., Manzie, C., Nesic, D. and Mareels, I. (2010). Extremum seeking from 1922 to 2010, *In: IEEE. Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese. [S.l.]*. pp. 14–26.
- Yan, L., Hsu, L., Costa, R. R. and Lizarralde, F. (2008). A variable structure model reference robust control without a prior knowledge of high frequency gain sign, *Automatica* **44**(4): 1036–1044.