

CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS PARA SISTEMAS LINEARES POSITIVOS CHAVEADOS DISCRETOS NO TEMPO

AMANDA SPAGOLLA*, CECÍLIA F. MORAIS*, LUCIANO FREZZATTO[†], RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*,
PEDRO L. D. PERES*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.*

*[†]Departamento de Engenharia Eletrônica,
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, 31270-010, Belo Horizonte, MG, Brasil.*

Emails: {spagolla, cfmorais, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br, lfrezzatto@cpdee.ufmg.br

Abstract— This paper proposes state-feedback control synthesis conditions for positive switched linear discrete-time systems in terms of linear matrix inequalities. In order to design either mode-dependent or mode-independent control laws and to produce less conservative results, the controller gain is determined from the slack variables introduced in the synthesis conditions, without imposing constraints to the Lyapunov matrix. To further reduce the conservatism, a search in a scalar parameter restricted to a well-defined interval is also adopted in the conditions. Numerical examples borrowed from the literature illustrate the applicability and the flexibility of the proposed approach.

Keywords— Positive switched linear systems, Discrete-time systems, State-feedback, Linear matrix inequalities.

Resumo— Este artigo propõe condições de síntese de controle por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo em termos de desigualdades matriciais lineares. Com o intuito de projetar leis de controle dependentes e independentes de modos e produzir resultados menos conservadores, o ganho de controle é determinado a partir das variáveis de folga introduzidas nas condições de síntese, sem impor restrições à matriz de Lyapunov. Para reduzir ainda mais o conservadorismo, uma busca em um parâmetro escalar restrito a um intervalo bem definido também é adotada nas condições. Exemplos numéricos retirados da literatura ilustram a aplicabilidade e a flexibilidade da abordagem proposta.

Palavras-chave— Sistemas lineares positivos chaveados, Sistemas discretos no tempo, Realimentação de estados, Desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

Úteis na modelagem de diversas aplicações em engenharia, os sistemas chaveados são uma importante classe de sistemas híbridos (Savkin e Evans, 2002). Em Liberzon e Morse (1999) os sistemas chaveados são definidos como um conjunto de subsistemas de tempo contínuo ou discreto, regido por uma regra de chaveamento responsável por definir o subsistema ativo em cada instante de tempo. Dentre as diversas aplicações de sistemas chaveados destacam-se as relativas ao controle de sistemas mecânicos, ao controle de processos, à indústria automotiva, aos sistemas de potência, ao controle de tráfego aéreo, etc. (Liberzon e Morse, 1999; Savkin e Evans, 2002). O chaveamento também é adequado para modelar sistemas sujeitos a mudanças abruptas no número de entradas de controle, ocasionadas, por exemplo, por falhas nos atuadores (Savkin e Evans, 2002). Além disso, a existência de sistemas cuja estabilidade assintótica não pode ser alcançada por uma única lei de controle de realimentação é um grande incentivo ao uso do controle chaveado (Liberzon e Morse, 1999). Para projetar uma lei de controle chaveada, duas abordagens distintas podem ser adotadas. Na primeira abordagem deseja-se determinar uma regra de chaveamento capaz de estabilizar o sistema, veja Geromel e Deaecto (2009), Deaecto et al. (2011), e, na segunda, admite-se que o sistema está sujeito a uma lei de chaveamento arbitrária e projeta-se um controlador capaz de estabilizar o sistema independente da regra de chaveamento, como em Daafouz, Riedinger e Iung (2002), Daafouz, Millerioux e Iung (2002), e Liu et al. (2017).

Por outro lado, uma vasta gama de problemas de engenharia possui como restrição adicional a não-negatividade dos estados (Dayawansa e Martin, 1999; Benzaouia e Tadeo, 2008). Sistemas cujas variáveis de estado assumem apenas valores não-negativos, chamados de sistemas positivos (Farina e Rinaldi, 2000), e podem ser encontrados nas mais diversas áreas como engenharia, biologia, medicina, ciências sociais e economia (Caccetta e Rumchev, 2000).

O estudo de sistemas positivos ainda é uma área em aberto para pesquisas, pois muitos dos resultados bem estabelecidos para sistemas lineares não podem ser aplicados diretamente aos sistemas positivos, uma vez que esses são definidos em cones e não no espaço linear (Caccetta e Rumchev, 2000). Dentre os trabalhos encontrados na literatura que abordam o controle de sistemas lineares positivos chaveados pode-se citar, por exemplo, Deaecto e Geromel (2017), no qual são apresentados métodos que fornecem uma função de chaveamento globalmente assintoticamente estável e um conjunto de ganhos de realimentação de estados que assegura a positividade e um custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas contínuos no tempo. O problema de estabilização de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo usando controle de realimentação de saída é tratado em Benzaouia e Tadeo (2008). No âmbito da biologia, Hernandez-Vargas et al. (2011) investigaram uma aplicação interessante na qual o sistema linear positivo chaveado representa a dinâmica de tratamento de uma mutação viral.

Neste trabalho é proposta uma nova condição, em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), para sín-

tese de controladores estabilizantes por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo com lei de chaveamento arbitrária. A condição desenvolvida é baseada nos resultados de Morais et al. (2013) para o caso de sistemas lineares discretos invariantes no tempo. Para realizar a síntese dos ganhos de realimentação, as condições LMIs propostas fazem uso de variáveis auxiliares com o intuito de separar a recuperação do ganho de controle da matriz de Lyapunov, proporcionando mais graus de liberdade e reduzindo o conservadorismo na busca por uma solução factível.

Este artigo encontra-se organizado da seguinte forma: na Seção 2, são introduzidos conceitos utilizados para o desenvolvimento da condição LMI de estabilização; na Seção 3, são apresentados os principais resultados obtidos; na Seção 4, exemplos numéricos são expostos; e, por fim, o artigo é concluído na Seção 5.

Notação

O conjunto de matrizes reais com n linhas e m colunas é denotado por $\mathbb{R}^{n \times m}$. O conjunto de vetores com N elementos reais não-negativos é representado por \mathbb{R}_+^N . A transposição da matriz A é designada por A^T . Para matrizes simétricas, $P \succ 0$ significa que P é definida positiva. A notação $M \geq 0$ indica que a matriz M possui elementos não-negativos. O símbolo \star representa um bloco simétrico em uma matriz quadrada.

2 Preliminares

Considere o sistema linear positivo chaveado discreto no tempo

$$x(k+1) = A_{\varepsilon(k)}x(k) + B_{\varepsilon(k)}u(k) \quad (1)$$

em que $A_{\varepsilon(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\varepsilon(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(k)$ é o vetor de estados, $u(k)$ é o vetor de entradas de controle e $\varepsilon(k) : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ é a função de chaveamento que seleciona arbitrariamente o subsistema (modo de operação) linear que está ativo a cada instante de tempo, sendo N o número de subsistemas.

Neste artigo, utiliza-se a seguinte lei de controle

$$u(k) = K_{\varepsilon(k)}x(k) \quad (2)$$

para estabilizar assintoticamente e garantir a positividade do sistema chaveado em malha-fechada

$$x(k+1) = A_{f_{\varepsilon(k)}}x(k), \quad (3)$$

em que $A_{f_{\varepsilon(k)}} = A_{\varepsilon(k)} + B_{\varepsilon(k)}K_{\varepsilon(k)}$.

Antes de passar à seção de resultados principais, algumas definições e resultados preliminares são dados a seguir.

Definição 1 (Farina e Rinaldi (2000)) *Um sistema é positivo se, dada qualquer condição inicial x_0 não negativa e entrada $u(k) \in \mathbb{R}_+^m$, $\forall k \geq 0$, a trajetória correspondente continua no quadrante positivo: $x(k) \in \mathbb{R}_+^n$, $\forall k \geq 0$.*

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema em malha fechada (3) seja positivo é dada pelo seguinte lema.

Lema 1 (Farina e Rinaldi (2000)) *O sistema em malha fechada (3) é positivo se, e somente se, todos os elementos da matriz $A_{f_{\varepsilon(k)}}$ são não-negativos.*

Outrossim, a estabilidade assintótica de um sistema chaveado pode ser certificada por de uma condição suficiente dada no lema a seguir.

Lema 2 (Daafouz, Riedinger e Jung (2002)) *Um sistema chaveado $x(k+1) = A_{\varepsilon(k)}x(k)$ é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i, i = 1, \dots, N$, tais que*

$$A_i^T P_j A_i - P_i \prec 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Equivalentemente, se existirem matrizes simétricas $P_i, i = 1, \dots, N$ tais que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

ou, ainda, se existirem matrizes simétricas $X_i, i = 1, \dots, N$ tais que

$$\begin{bmatrix} X_i & X_i A_i^T \\ \star & X_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

A condição (5) é obtida por complemento de Schur a partir de (4), e a condição (6) (chamada de condição dual) por transformação de congruência com a matriz $\text{diag}(P_i^{-1}, I)$, $X_i = P_i^{-1}$ aplicada em (5).

Finalmente, para o desenvolvimento da condição LMI de estabilização apresentada neste trabalho, o seguinte lema é necessário (Gahinet e Apkarian, 1994; Iwasaki e Skelton, 1994).

Lema 3 *Dadas as matrizes W e Y com n colunas e $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existe uma matriz não estruturada F que satisfaz*

$$Q + W^T F Y + Y^T F^T W \prec 0 \quad (7)$$

se, e somente se, as desigualdades de projeção são satisfeitas

$$N_W^T Q N_W \prec 0, \quad (8)$$

$$N_Y^T Q N_Y \prec 0, \quad (9)$$

em que N_W e N_Y são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de W e Y , respectivamente.

3 Resultados Principais

A principal contribuição deste trabalho, apresentada no teorema a seguir, consiste em uma nova condição LMI para a síntese de controladores estabilizantes por realimentação de estados que garantem que o sistema em malha fechada (3) é assintoticamente estável e positivo.

Teorema 1 Para um valor dado do parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonais e matrizes $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $i = 1, \dots, N$, tais que

$$\begin{bmatrix} \xi A_i G_i + \xi G_i^T A_i^T + \xi B_i Z_i + \xi Z_i^T B_i^T - P_j & & \\ & \star & \\ & & -\xi G_i^T + A_i G_i + B_i Z_i \\ & & & P_i - G_i - G_i^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (10)$$

$$A_i G_i + B_i Z_i \geq 0, \quad (11)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$, então $K_i = Z_i G_i^{-1}$ assegura a estabilidade assintótica e a positividade do sistema chaveado em malha fechada (3).

Prova: Admitindo que as condições (10) e (11) sejam factíveis, o bloco (2,2) da desigualdade (10) implica que

$$G_i + G_i^T \succ P_i \succ 0 \quad (12)$$

logo, a existência das matrizes inversas G_i^{-1} , $i = 1, \dots, N$, é assegurada. Multiplicando (11) à direita por G_i^{-1} , obtém-se

$$A_i + B_i Z_i G_i^{-1} \geq 0, \quad (13)$$

que corresponde à condição do Lema 1, garantindo assim, a positividade do sistema de malha fechada com $K_i = Z_i G_i^{-1}$. Além disso, a condição (10) pode ser reescrita na forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix}}_Q + \begin{bmatrix} \xi I \\ I \end{bmatrix} G^T \underbrace{\begin{bmatrix} (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})^T & -I \end{bmatrix}}_W + \begin{bmatrix} A_i + B_i Z_i G_i^{-1} \\ -I \end{bmatrix} G \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I \end{bmatrix}}_Y \prec 0 \quad (14)$$

Portanto, pelo Lema 3, para que a condição (10) seja verificada, é necessário que as condições (8) e (9) sejam satisfeitas. Escolhendo o espaço nulo $N_W^T = [I \ A_i + B_i Z_i G_i^{-1}]$, tem-se

$$\begin{aligned} N_W^T Q N_W &= \\ \begin{bmatrix} I \\ (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})^T \end{bmatrix} \\ &= -P_j + (A_i + B_i Z_i G_i^{-1}) P_i (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})^T \prec 0 \end{aligned} \quad (15)$$

que, por meio de um complemento de Schur, provê

$$\begin{bmatrix} -P_i & P_i (A_i + B_i Z_i G_i^{-1})^T \\ \star & -P_j \end{bmatrix} \prec 0, \quad (16)$$

que equivale à condição (6) do Lema 2, garantindo, assim, a estabilidade assintótica do sistema de malha fechada com $K_i = Z_i G_i^{-1}$.

Por sua vez, a escolha de $N_Y^T = [I \ -\xi I]$ produz

$$\begin{aligned} N_Y^T Q N_Y &= \begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix} \\ &= -P_j + \xi^2 P_i \prec 0. \end{aligned}$$

Fazendo o somatório da última desigualdade para todo $i, j = 1, \dots, N$, tem-se

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-P_j + \xi^2 P_i) = -\bar{P} + \xi^2 \bar{P} \prec 0, \quad (17)$$

com $\bar{P} = \sum_{\ell=1}^N P_\ell \succ 0$. De fato, a desigualdade (17) é válida para todo $\xi \in (-1, 1)$. \square

Observação 1 Como destacado em Ebihara et al. (2014), em termos de síntese, é possível escolher a matriz de Lyapunov como apenas simétrica, o que resulta em condições menos conservadoras e garante a positividade do sistema realimentado pela lei de controle determinada. Não obstante, em termos de análise de estabilidade, uma matriz de Lyapunov diagonal é necessária e suficiente para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada.

A síntese do controlador também pode ser feita de forma que a lei de controle (2) seja independente de modos. Para tanto, uma adaptação da condição de síntese do Teorema 1 é apresentada a seguir, na qual admite-se que $G_i = G$ e $Z_i = Z$ para todo $i, j = 1, \dots, N$.

Corolário 1 Para um valor dado do parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $i = 1, \dots, N$, uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \xi A_i G + \xi G^T A_i^T + \xi B_i Z + \xi Z^T B_i^T - P_j & & \\ & \star & \\ & & -\xi G^T + A_i G + B_i Z \\ & & & P_i - G - G^T \end{bmatrix} \prec 0, \quad (18)$$

$$A_i G + B_i Z \geq 0, \quad (19)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$, então $K = Z G^{-1}$ assegura a estabilidade assintótica e a positividade do sistema chaveado (1) com a lei de controle independente de modos $u(k) = Kx(k)$.

4 Experimentos numéricos

Os dois exemplos apresentados nesta seção utilizam o parser Yalmip (Löfberg, 2004) e o resolvidor de programação semidefinida de código aberto SeDuMi (Sturm, 1999) para implementar as rotinas computacionais de projeto dos controladores em Matlab (R2017a).

Exemplo 1: Este é um exemplo adaptado de Ebihara et al. (2014). Considere um sistema chaveado que possa ser descrito como em (1), com as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 1 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

O objetivo deste exemplo é avaliar o grau de conservadorismo das condições de síntese propostas, comparando as abordagens dependente e independente de modos e a influência do valor do parâmetro escalar ξ sobre os resultados obtidos. Para tanto, as matrizes A_1 e A_2 são multiplicadas por um escalar γ e determina-se o máximo valor desse escalar associado a uma solução factível para as condições contidas no Teorema 1 e, posteriormente, para as do Corolário 1 utilizando diferentes escolhas de $\xi \in [-0.9, 0.9]$, com 19 valores igualmente espaçados no intervalo.

Na Figura 1 é possível verificar que a abordagem dependente de modos fornece, para todas as variações de ξ testadas, maiores valores de γ do que os obtidos com o caso independente. Isso indica que um controlador dependente de modos consegue certificar a estabilidade de uma quantidade maior de sistemas chaveados. Perante isto, pode-se afirmar que resultados menos conservadores são obtidos com o controlador dependente de modos. Assim, faz mais sentido restringir o uso da abordagem independente de modos, Corolário 1, para situações nas quais as informações a respeito dos modos não estão disponíveis para a realimentação. Embora a escolha trivial para o parâmetro escalar seja $\xi = 0$, observou-se que o grau de conservadorismo em ambas as abordagens testadas foi menor, ou seja, foram obtidos valores maiores para o parâmetro γ , ao assumirem-se outros valores não nulos no intervalo $(-1, 1)$ para o parâmetro escalar. Assim, foram investigados 19 valores igualmente espaçados no intervalo $[-0.9, 0.9]$. No caso dependente de modos o maior valor obtido foi $\gamma = 2.5048$ para $\xi = -0.1$. Na abordagem de ganho independente de modos o maior valor obtido foi $\gamma = 1.2901$ para $\xi = 0.2$. De fato, realizar a busca no escalar ξ é uma estratégia útil, pois pode produzir resultados com diferentes níveis de conservadorismo. Por exemplo, note que a diferença percentual entre os valores máximo e mínimo de γ obtidos com o Teorema 1 considerando todos os 19 testes foi de 26.4% (com o Corolário 1, foi 22.49%).

Para verificar as vantagens da introdução da variável de folga G (ou G_i no caso dependente de modos) nas condições de projeto, considere o Teorema 1 com as escolhas particulares $\xi = 0$ e $G_i = G_i^T = P_i$ (diagonal para todo $i = 1, \dots, N$) e o Corolário 1 com $\xi = 0$ e $G = G^T = P$ (diagonal). Nesse caso, como é comum na literatura, os ganhos de controle serão determinados diretamente em termos da matriz de Lyapunov.

Para as condições sem variáveis de folga obteve-se no caso dependente de modos $\gamma = 2.4489$ e no independente $\gamma = 1.2651$. Como é possível verificar, para ambos os casos, os valores de γ são inferiores aos obtidos com as condições propostas (Teorema 1 e Corolário 1). Embora a diferença não seja tão expressiva, esses resultados indicam a existência de sistemas para os quais, dentre as técnicas testadas, apenas o método proposto com variáveis de folga é capaz de encontrar soluções estabilizantes.

Exemplo 2: Este exemplo foi retirado de Liu et al. (2017). Considere o sistema linear chaveado discreto

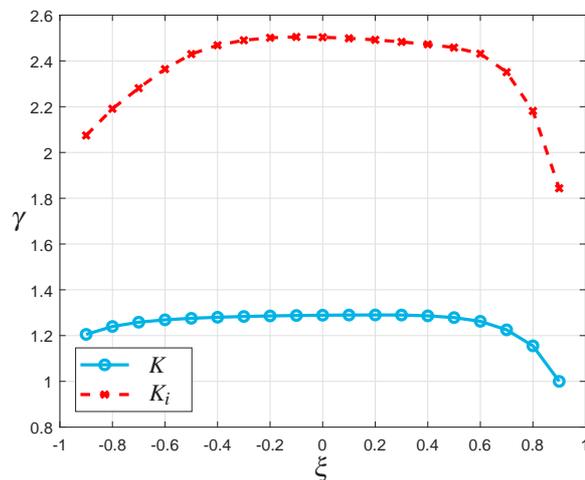


Figura 1: Máximos valores de γ obtidos com o teste de 19 valores de $\xi \in [-0.9, 0.9]$ igualmente espaçados para as abordagens dependente (Teorema 1 – curva vermelha) e independente de modos (Corolário 1 – curva azul) para o Exemplo 1.

no tempo (1), representado pelas seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.4 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

O objetivo deste exemplo é projetar controladores estabilizantes por realimentação de estados e comparar os resultados da resposta temporal dos estados do sistema em malha fechada com os resultados reportados em Liu et al. (2017). Considerando a abordagem dependente de modos, os seguintes ganhos (truncados com 4 casas decimais) foram produzidos utilizando o Teorema 1 com $\xi = -0.9$ (parâmetro escalar associado à melhor resposta no domínio do tempo)

$$K_1 = \begin{bmatrix} 11.1342 & 3.8889 \\ -12.7347 & -5.3115 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3.6667 & -2.3506 \\ 3.8671 & 2.1676 \end{bmatrix}.$$

Diferente do Teorema 1, o parâmetro associado à melhor resposta no domínio do tempo para o Corolário 1 é $\xi = 0.9$, resultando no seguinte ganho

$$K = \begin{bmatrix} 0.7361 & -4.5083 \\ 0.0562 & 4.4899 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Na sequência, utilizando a lei de chaveamento fornecida em Liu et al. (2017), com estado inicial $x_0 = [10 \ 20]^T$, foram obtidas as respostas temporais dos estados dos sistemas em malha fechada para os controladores projetados pelo método proposto e para o ganho dependente de modos reportado em Liu et al. (2017).

Diante das simulações apresentadas na Figura 2, constata-se que os controladores sintetizados por meio das condições propostas neste artigo provêm melhores respostas temporais em termos de uma convergência mais rápida para a origem.

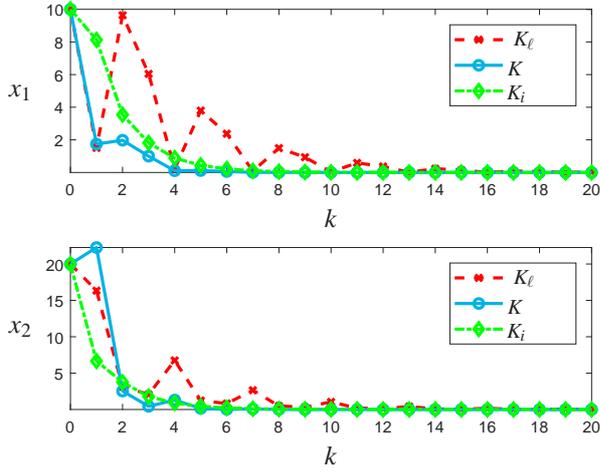


Figura 2: Respostas temporais obtidas para o sistema (20) em malha-fechada utilizando controladores dependentes de modo K_i (Teorema 1 – curva verde), controladores independente de modo K (Corolário 1 – curva azul) e o controlador dependente de modos K_ℓ (apresentado em Liu et al. (2017) – curva vermelha) para o Exemplo 2.

É importante enfatizar que o controlador independente de modos (22) projetado produz um desempenho temporal melhor do que a resposta associada ao método de Liu et al. (2017) (dependente de modos). Isso significa que, mesmo utilizando menos informações a respeito do sistema (conhecimento do modo atual de operação do sistema chaveado), a abordagem proposta proporciona uma convergência mais rápida.

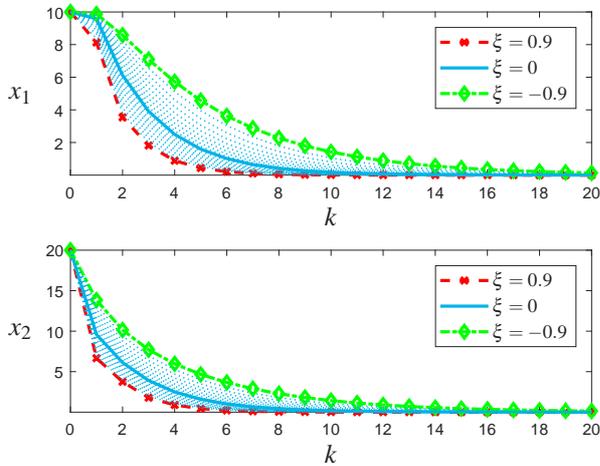


Figura 3: Respostas temporais obtidas para o sistema (20) em malha-fechada com controladores dependentes de modo sintetizados pelo Teorema 1 com $\xi \in [-0.9, 0.9]$ para o Exemplo 2.

Adicionalmente, nota-se que a técnica proposta também pode ser beneficiada caso a informação a respeito dos modos esteja disponível para realimentação. Nesse caso o resultado é ainda melhor, como pode ser observado nos gráficos da Figura 2.

Além disso, diferentes comportamentos para a resposta temporal são obtidos dependendo do ganho sintetizado para cada valor do parâmetro escalar ξ . Para ilustrar essa variedade de soluções obtidas pelo

método proposto, são apresentadas nas Figuras 3 e 4 as respostas temporais associadas aos controladores dependentes e independentes de modos, respectivamente, sintetizados pelo Teorema 1 e Corolário 1 com 19 valores de $\xi \in [-0.9, 0.9]$ igualmente espaçados. Note que, apesar da escolha trivial para o parâmetro ser $\xi = 0$ (linha contínua em azul nas figuras), os melhores resultados são obtidos para valores de $\xi \neq 0$.

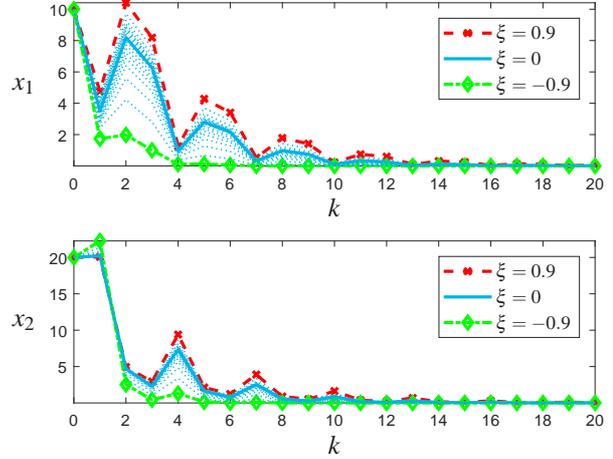


Figura 4: Respostas temporais obtidas para o sistema (20) em malha-fechada com controladores independentes de modo sintetizado pelo Corolário 1 com $\xi \in [-0.9, 0.9]$ para o Exemplo 2.

Embora a resposta temporal para uma determinada lei de chaveamento tenha sido investigada, tanto este artigo como o de Liu et al. (2017) tratam o caso de sistemas com lei de chaveamento arbitrária. Nesse sentido, uma aplicação mais realista dos controladores poderia ser explorada impondo-se uma lei de chaveamento arbitrária com modos de operação escolhidos com auxílio de um gerador pseudo-aleatório¹ uniforme.

Os resultados obtidos com uma simulação de Monte Carlo de 5×10^4 realizações para um horizonte de 20 amostras são apresentados na Figura 5.

Observe que as respostas temporais médias produzidas, tanto pelo controlador dependente de modos (curva vermelha na Figura 5) quanto pelo independente de modos (curva verde), convergem mais rapidamente para zero do que as respostas obtidas aplicando-se o controlador dependente de modos computado pelo método de Liu et al. (2017) (curva azul). Todavia, mesmo que o desvio padrão das primeiras amostras do segundo estado em malha fechada com o controlador independente de modos (22) seja maior do que o desvio padrão referente ao controlador dependente de modos de Liu et al. (2017), o método proposto pode ser considerado vantajoso, pois requer uma lei de controle mais simples.

5 Conclusão

Neste trabalho foram propostas condições de síntese de controle por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo

¹Foi utilizada a função `randi()` do software Matlab.

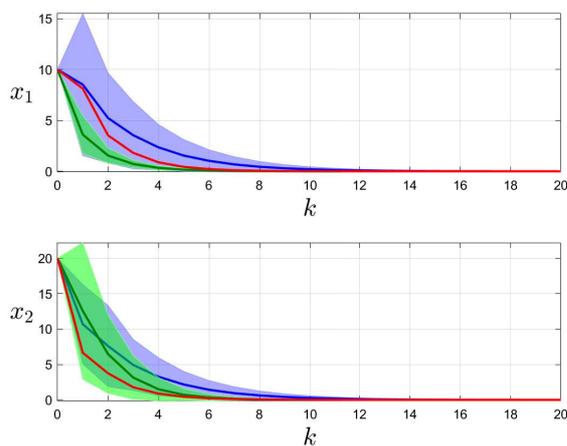


Figura 5: Trajetórias médias dos estados do sistema (20) em malha fechada e desvios padrões associados (áreas sombreadas) obtidos por meio de uma simulação de Monte Carlo para o Teorema 1 (em vermelho); o Corolário 1 (em verde) e o método de Liu et al. (2017) (em azul) para o Exemplo 2.

em termos de desigualdades matriciais lineares. As condições baseiam-se no lema da Projeção e, para diminuir o conservadorismo, um parâmetro escalar é adotado. Por meio das condições de síntese propostas é possível determinar leis de controle dependentes e independentes de modo para sistemas chaveados positivos. Os exemplos numéricos comprovam a eficácia das condições propostas, assegurando a positividade e garantindo uma boa resposta temporal para o sistema positivo chaveado em malha fechada.

Agradecimentos

Às agências CAPES, CNPq (Processo 408782/2017-0) e FAPESP (Processos 2016/25273-8, 2017/01771-1 e 2017/18785-5).

Referências

- Benzaouia, A. e Tadeo, F. (2008). Output feedback stabilization of positive switching linear discrete-time systems, *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2008)*, Ajaccio, France, pp. 119–124.
- Caccetta, L. e Rumchev, V. G. (2000). A survey of reachability and controllability for positive linear systems, *Annals of Operations Research* **98**(1): 101–122.
- Daafouz, J., Millerioux, G. e Iung, C. (2002). A poly-quadratic stability based approach for linear switched systems, *International Journal of Control* **75**(16-17): 1302–1310.
- Daafouz, J., Riedinger, P. e Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(11): 1883–1887.

- Dayawansa, W. P. e Martin, C. F. (1999). A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(4): 751–760.
- Deaecto, G. S. e Geromel, J. C. (2017). \mathcal{H}_2 state feedback control design of positive switched linear systems, *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, Toulouse, France, pp. 3136–3141.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. e Daafouz, J. (2011). Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems, *International Journal of Control* **84**(9): 1500–1508.
- Ebihara, Y., Peaucelle, D. e Arzelier, D. (2014). LMI approach to linear positive system analysis and synthesis, *Systems & Control Letters* **63**: 50–56.
- Farina, L. e Rinaldi, S. (2000). *Positive Linear Systems: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- Gahinet, P. e Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **4**(4): 421–448.
- Geromel, J. C. e Deaecto, G. S. (2009). Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems, *Automatica* **45**(2): 593–597.
- Hernandez-Vargas, E., Colaneri, P., Middleton, R. e Blanchini, F. (2011). Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **21**(10): 1093–1111.
- Iwasaki, T. e Skelton, R. E. (1994). All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas, *Automatica* **30**(8): 1307–1317.
- Liberzon, D. e Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine* **19**(5): 59–70.
- Liu, T., Wu, B., Wang, Y. e Liu, L. (2017). New stabilization results for discrete-time positive switched systems with forward mode-dependent average dwell time, *Transactions of the Institute of Measurement and Control* **39**(2): 224–229.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.
- Morais, C. F., Braga, M. F., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2013). Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter, *Proceedings of the 2013 American Control Conference*, Washington, DC, USA, pp. 3876–3881.
- Savkin, A. V. e Evans, R. J. (2002). *Hybrid Dynamical Systems. Controller and Sensor Switching Problems*, Birkhäuser, Boston, MA, USA.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.