CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ DE SISTEMAS INCERTOS EM TEMPO DISCRETO COM DEPENDÊNCIA POLINOMIAL DE PARÂMETROS

Danielle Silva Gontijo, Mateus Clemente de Sousa, Eduardo Nunes Gonçalves*

*Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica UFSJ/CEFET-MG
Departamento de Engenharia Elétrica - CEFET-MG, Av. Amazonas 7675
Belo Horizonte, MG, Brasil

Email: daniellegontijo@ymail.com, mateusclementesousa@gmail.com, eduardong@des.cefetmg.br

Abstract— This work deals with robust control synthesis procedure $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ for linear discrete-time time-invariant systems with polynomial parameter dependence. The robust control problem requires ensuring robust stability and optimizing performance for an infinite number of systems, which results in a semi-infinite optimization problem of difficult solution. In previous works, it was proposed the solution of the $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ robust control problem by means of a two-step procedure, synthesis and analysis, implemented by the Cone-Ellipsoidal algorithm and the Branch-and-Bound method. Subsequently it was proposed to apply the Differential Evolution method to both steps of the procedure. Considering systems with parametric uncertainties, it is possible to obtain a considerable reduction in the computational cost of the analysis step by replacing the polytopic model by a parameter dependent model. This work presents a new implementation of the two-step synthesis procedure to consider models with polynomial dependence of parameters that allows its application for more complex problems with lower computational cost. We provide an illustrative example to demonstrate the capability of the new implementation.

Keywords— $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ Robust control, parameter dependent systems, differential evolution algorithm.

Resumo— Este trabalho trata da síntese de controle robusto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ para sistemas lineares invariantes no tempo, em tempo discreto, com dependência polinomial de parâmetros. O problema de controle robusto requer garantir a estabilidade robusta do sistema e otimizar o desempenho para um número infinitos de sistemas, o que resulta em um problema de otimização semi-infinita de difícil solução. Em trabalhos anteriores, foi proposta a solução do problema de controle robusto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ através de um procedimento de dois passos, síntese e análise, implementados pelos algoritmo Cone-Elipsoidal e método *Branch-and-Bound.* Posteriormente foi proposto aplicar o método Evolução Diferencial para ambos os passos do procedimento. Considerando sistemas com incertezas paramétricas, é possível obter uma redução considerável no custo computacional da etapa de análise substituindo o modelo politópico por um modelo dependente de parâmetros. Este trabalho apresenta uma nova implementação do procedimento de síntese de dois passos para considerar modelos com dependência polinomial de parâmetros que permite a sua utilização para problemas mais complexos com menor custo computacional. É apresentado um exemplo ilustrativo para demonstrar a capacidade da nova implementação.

Palavras-chave— Controle robusto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, sistemas dependente de parâmetros, algoritmo evolução diferencial.

1 Introdução

Este trabalho trata de controle robusto de sistemas lineares invariantes no tempo, em tempo discreto com parâmetros que não são precisamente conhecidos, mas que pertencem a um intervalo conhecido. Do ponto de vista de otimização, o desempenho de sistemas de controle pode ser quantificado em termos de normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ das matrizes de transferência. O sistema de controle deve garantir tanto a estabilidade do sistema bem como o seu desempenho $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ para todos os valores possíveis dos parâmetros incertos, resultando em problemas de otimização semi-infinita de difícil solução. As formulações de análise de estabilidade e desempenho e síntese descritas em termos de problemas de otimização linear com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) são bastante populares na área de controle robusto. Através das formulações LMI é possível analisar e projetar sistemas de controle, considerando somente os sistemas correspondentes aos vértices do politopo do espaço de incerteza. Desse modo, os problemas de otimização originais, de difícil solução, são representados por problemas convexos, mais simples de serem solucionados, com disponibilidade de *softwares* comerciais e gratuitos para sua solução. Entretanto, nem todos os problemas de controle robusto podem ser colocados na forma de problemas LMI, em especial, o projeto de controladores robustos fixos por realimentação dinâmica de saída de qualquer ordem para sistemas com incertezas paramêtricas. O trabalho de de Oliveira et al. (2002) apresenta formulações LMIs para síntese de controle robusto por realimentação de estados para sistemas em tempo discreto com modelo politópico e controle por realimentação de saída, com ordem igual a do sistema, para sistemas precisamente conhecidos. Ao invés de se obter diretamente um controlador por realimentação dinâmica de saída com ordem fixa, é possível, através de uma representação aumentada do sistema proposta por Ghaoui et al. (1997), projetar um controlador de qualquer ordem a partir de uma formulação para projeto de controladores por realimentação estática de saída. Em Agulhari et al. (2010) é proposto um procedimento de controle robusto por realimentação de saída, para modelos politópicos em tempo discreto, baseado em formulações LMI, realizado em dois passos. No primeiro passo, é projetado um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros que é utilizado como entrada para o segundo passo que calcula o controlador robusto por realimentação de saída. Procedimento similar é utilizado em outros trabalhos para síntese de controladores robustos por realimentação de saída (Moreira et al., 2011; Sadabadi and Karimi, 2015).

Em uma abordagem alternativa, o problema de controle robusto, na forma original de problema de otimização semi-infinita, foi solucionado através de um procedimento iterativo de dois passos similar ao método proposto por Zakovic and Rustem (2002). A ideia do método é obter a solução do problema em dois passos: síntese e análise. No passo de síntese, o domínio infinito é substituído por um conjunto finito de sistemas que pode ser inicialmente os vértices do domínio de incerteza ou somente o sistema nominal. O controlador é projetado para minimizar a função objetivo e garantir o atendimento às restrições somente para esse conjunto finito, o que torna o problema mais fácil de ser solucionado. No passo de análise, o controlador obtido no passo de síntese é analisado para todos os infinitos sistemas do domínio de incerteza. Se for verificado que alguma restrição foi violada ou que o máximo da função objetivo nos passos de síntese e de análise possuem uma diferença significativa, novos sistemas são acrescentados no conjunto finito e os dois passos são executados novamente. O procedimento finaliza quando é verificado que todas as restrições são atendidas para todos os sistemas no domínio infinito e que a diferença entre o mínimo da função objetivo calculada em cada passo está dentro de um limite especificado. Nos trabalhos anteriores, esse procedimento foi inicialmente implementado considerando o algoritmo cone-elipsoidal (CE) para o passo de síntese e o método *Branch-and-bound* (BB) para o passo de análise (Gonçalves et al., 2011). Posteriormente, aplicando o método Evolução Diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*) em ambos os passos (de Moura Marcos et al., 2016). Uma versão mais complexa deste procedimento de síntese foi implementada considerando um método de otimização multiobjetivo evolutivo para o passo de síntese, requerendo um passo intermediário adicional de tomada de decisão (Bachur et al., 2017). Nas primeiras versões deste procedimento de síntese, o método BB apresenta um crescimento rápido do custo computacional com o aumento da ordem do sistema e do número de vértices do politopo. Para problemas mais complexos, o método DE requer menor custo computacional do que o método BB. Mesmo com o uso do método DE na etapa de análise, na representação de incerteza por modelo politópico, o espaço de busca é de dimensão 2^η, sendo η o número de parâmetros incertos. Obviamente é mais vantajoso trabalhar com um modelo dependente de parâmetros de modo que, na etapa de análise, o espaço de busca seja de dimensão η. A contribuição deste trabalho é implementar e avaliar a modificação do procedimento de síntese de dois passos, baseado no método DE, para considerar modelos com dependência polinomial de parâmetros incertos ao invés de modelos politópicos.

Esse trabalho é organizado como descrito a seguir. Na seção 2 é apresentada a formulação do problema de controle robusto em termos de um problema de otimização semi-infinita. Na seção 3 é apresentado o procedimento iterativo de síntese. Na seção 4 é detalhado como o método de evolução diferencial é utilizado para implementar os dois passos do procedimento de síntese. Na seção 5 é apresentado um exemplo ilustrativo, com seis parâmetros incertos, para a validação da implementação proposta para o procedimento de síntese, seguido pelas conclusões apresentadas na seção 6.

A notação utilizada nesse artigo é padrão. É considerada a notação compacta para matrizes de transferência:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right].$$

e $x(k) \triangleq x(kT)$, sendo $k \in \mathbb{N}$ e T o período de amostragem.

2 Formulação do problema

Considere o sistema linear invariante no tempo, em tempo discreto, descrito pelo modelo no espaço de estados

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \\ z(k) &= C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), \\ y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k) + D_{yu} u(k), \end{aligned} \qquad (1)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de variáveis manipuladas, as saídas do controlador, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas (distúrbios, $d(k) \in \mathbb{R}^{n_d}$, e ruídos de medição, $n(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$), $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de saídas controladas (saídas da planta, $c(k)$ e variáveis manipuladas, $u(k)$) e $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas medidas que são as entradas do controlador dinâmico.

Para simplificar a notação, as matrizes do modelo no espaço de estados, Eq. (1), podem ser reunidas na representação matricial seguinte:

$$\mathcal{S} \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_z & D_{zu} & D_{zw} \\ C_y & D_{yu} & D_{yw} \end{array}\right]. \qquad (2)$$

Considere que a matriz sistema $\mathcal{S}$ possui η parâmetros incertos que variam em faixas: $p_i \in$

$[\underline{p}_i,\ \overline{p}_i]$, $i = 1, \ldots, \eta$. Seja $p = [p_1 \ldots p_\eta]^T$ o vetor de parâmetros incertos, o sistema com incerteza paramétrica pode ser representado por um modelo com dependência afim de parâmetros:

$$S(p) = S_0 + \sum_{i=1}^{\eta} S_i p_i, \tag{3}$$

sendo S_0 composto pelos termos constantes de $S(p)$ e S_i incluindo as constantes que multiplicam o parâmetro incerto p_i, $i = 1, \ldots, \eta$. Outra possibilidade é o modelo politópico definido pela combinação convexa de seus vértices:

$$S(\alpha) \triangleq \left\{ \mathcal{S} : \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{2^\eta} \alpha_i \mathcal{S}_i; \quad \alpha \in \Omega \right\}, \tag{4}$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{2^\eta} \ : \ \alpha_i \geq 0,\ \forall\, i, \sum_{i=1}^{2^\eta} \alpha_i = 1 \right\}, \tag{5}$$

sendo $\mathcal{S}_i$ os vértices do politopo, obtidos da 2^η combinações dos valores limites dos parâmetros incertos, e $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^\eta}]^T$ o vetor que parametriza o politopo. O modelo politópico é adequado para as formulações de análise e síntese baseadas em formulações LMI, porém, o número de vértices cresce rapidamente com o aumento do número de parâmetros incertos. Por exemplo, quando $\eta = 6$, então $p \in \mathbb{R}^6$ ao passo que $\alpha \in \mathbb{R}^{64}$. Este trabalho irá considerar a representação com dependência polinomial de parâmetros:

$$S(p) = S_0 + \sum_{i=1}^{n_t} S_i \prod_{j=1}^{\eta} p_j^{\sigma_{i,j}}, \tag{6}$$

sendo $\sigma_{i,j} \in \mathbb{N}$ a potência do j-ésimo parâmetro no i-ésimo termo do polinômio com $n_t + 1$ termos. O modelo com dependência afim de parâmetros, Eq. (3), é um caso particular do modelo com dependência polinomial de parâmetros, Eq. (6). A dependência das matrizes do sistema de p será omitida para simplificar a notação.

Neste trabalho, consideramos o controlador dinâmico por realimentação de saída definido pelas seguintes matrizes:

$$K(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]. \tag{7}$$

O sistema em malha-fechada com realimentação dinâmica de saída é dado por:

$$T_{zw}(z) = \begin{bmatrix} T_{cd}(z) & T_{ud}(z) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|} A + B_u \Gamma D_c C_y & B_u \Gamma C_c \\ B_c C_y + B_c D_{yu} \Gamma D_c C_y & A_c + B_c D_{yu} \Gamma C_c \\ \hline C_z + D_{zu} \Gamma D_c C_y & D_{zu} \Gamma C_c \end{array} \right. \tag{8}$$

$$\left. \begin{array}{|c} B_w + B_u \Gamma D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} + B_c D_{yu} \Gamma D_c D_{yw} \\ \hline D_{zw} + D_{zu} \Gamma D_c D_{yw} \end{array} \right],$$

sendo $\Gamma \triangleq (I - D_c D_{yu})^{-1}$.

Neste trabalho, o objetivo do sistema de controle é manter o sistema no ponto de operação desejado minimizando o efeito de distúrbios sobre a saída do sistema e o esforço de controle, objetivos conflitantes. Desse modo, o problema de síntese de controlador robusto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ pode ser estabelecido como sendo: dado um sistema linear invariante no tempo com modelo com dependência polinomial de parâmetros, $S(p)$, $p \in \mathcal{P} = [\underline{p}_1, \overline{p}_1] \times \ldots \times [\underline{p}_\eta, \overline{p}_\eta]$, encontre o controlador dinâmico por realimentação de saída, $K(z)$, que minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$ máxima da matriz de transferência em malha-fechada que relaciona o vetor de distúrbios com o vetor de saídas da planta, $T_{cd}(z)$, e a norma $\mathcal{H}_2$ máxima da matriz de transferência em malha-fechada que relaciona o vetor de distúrbios com o vetor de variáveis manipuladas, $T_{ud}(z)$, garantindo a estabilidade do sistema em malha-fechada para todo o domínio de incerteza:

$$K^*(z) = \arg \min_{K(z)} \begin{bmatrix} \max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{cd}(z, p, K)\|_\infty \\ \max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{ud}(z, p, K)\|_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\text{sujeito a:} \quad K(z) \in \mathcal{F},$$

sendo $\mathcal{F}$ o conjunto de controladores, com uma estrutura especificada pelo projetista, que resultam em sistemas em malha-fechada robustamente estáveis. O problema (9) é um problema de otimização semi-infinita de difícil solução.

3 Procedimento de Síntese Iterativo

Para facilitar a solução do problema (9), pode ser considerado um procedimento baseado em dois passos:

Passo 1 = Síntese. O domínio de incerteza, $\mathcal{P}$, do problema (9) é substituído por um conjunto finito de pontos, $\widetilde{\mathcal{P}}$. Além disso, para aplicar técnicas de otimização escalar, o problema de otimização multiobjetivo (9) é transformado em um problema de otimização escalar tratando a segunda função objetivo como restrição:

$$K^*(z) = \arg \min_{K} \max_{p \in \widetilde{\mathcal{P}}} \|T_{cd}(z, p, K)\|_\infty$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} \max_{p \in \widetilde{\mathcal{P}}} \|T_{ud}(z, p, K)\|_2 \leq \epsilon_2 \\ K(z) \in \mathcal{F} \end{cases}, \tag{10}$$

sendo ϵ_2 o valor da restrição que pode ser variado para gerar diferentes soluções.

Passo 2 = Análise. O controlador calculado no passo 1, $K^*(z)$, tem quer ser validado para todo o domínio infinito de incerteza, $\mathcal{P}$.

O problema de análise de estabilidade robusta do sistema com dependência polinomial de parâmetros pode ser formulado como um problema de otimização em que é desejado determinar se o máximo módulo dos n autovalores das infinitas matrizes $A_f(p)$ são menores que 1:

$$p_u = \arg \min_{p \in \mathcal{P}} -f_u(p),\ \ f_u(p) \triangleq \max_i |\lambda_i(A_f(p))| - 1, \tag{11}$$

sendo $\lambda_i(A)$ o i-ésimo autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $f(p_u) \geq 0$, isso significa que existe polo sobre ou fora do disco de raio unitário do plano-Z e o sistema em malha-fechada com $K^*(z)$ não é robustamente estável.

Se o sistema é robustamente estável, deve-se verificar os valores das função objetivos. Os problemas de cálculo dos custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ de um sistema com incerteza paramétrica podem ser formulados como problemas de otimização:

$$p_\infty = \arg\min_{p\in\mathcal{P}} -f_\infty(p),\ f_\infty(p) \triangleq \|T_{cd}(z,p,K^*)\|_\infty, \quad (12)$$

$$p_2 = \arg\min_{p\in\mathcal{P}} -f_2(p),\ f_2(p) \triangleq \|T_{ud}(z,p,K^*)\|_2. \quad (13)$$

Defina $\widetilde{f}_\infty \triangleq \max_{p\in\widetilde{\mathcal{P}}} \|T_{cd}(z,p,K^*)\|_\infty$, o valor ótimo obtido na etapa de síntese para o conjunto finito, novos pontos no conjunto finito $\widetilde{\mathcal{P}}$ serão acrescentados nas seguintes situações:

1. Se $f_u(p_u) \geq 0$, então $\widetilde{\mathcal{P}} \leftarrow \widetilde{\mathcal{P}} \bigcup \{p_u\}$.
2. Se $|f_\infty(p_u) - \widetilde{f}_\infty| > \varepsilon \widetilde{f}_\infty$, então $\widetilde{\mathcal{P}} \leftarrow \widetilde{\mathcal{P}} \bigcup \{p_\infty\}$.
3. Se $f_2(p_2) > \epsilon_2$, então $\widetilde{\mathcal{P}} \leftarrow \widetilde{\mathcal{P}} \bigcup \{p_2\}$.

Sendo ε uma precisão especificada pelo projetista. Neste trabalho foi adotado $\varepsilon = 0{,}01$.

Todos os cálculos para determinação de $S(p)$ são realizados para a representação do sistema em tempo contínuo, sendo realizada a discretização, pelo método de segurador de ordem zero, apenas no momento de cálculo de $T_{zw}(z)$. Todos os cálculos de autovalores e normas são feitos sobre a realização mínima de $T_{zw}(z)$.

O conjunto $\widetilde{\mathcal{P}}$ é inicializado com um conjunto finito de pontos, podendo ser adotado um ponto correspondente ao sistema nominal ou os 2^η vértices do domínio politópico de incerteza. Se no passo 2 são acrescentados pontos no conjunto $\widetilde{\mathcal{P}}$, p_u ou p_∞ e/ou p_2, os passos 1 e 2 devem ser executados novamente, caso contrário o procedimento é finalizado. Na próxima seção é descrito como os passos do procedimento de síntese podem ser implementados pelo método evolução diferencial. Como a etapa de análise é baseada nas soluções de problemas de otimização não convexo, não se pode garantir que o controlador obtido resulte em um sistema robustamente estável. Entretanto, em vários testes exaustivos realizados, o algoritmo DE se mostrou bastante eficiente para análise de estabilidade robusta (de Moura Marcos and Gonçalves, 2016).

4 Algoritmo Evolução Diferencial

O algoritmo de Evolução Diferencial é um algoritmo de otimização evolucionário para solução de problemas com funções com domínio real (Storn and Price, 1997; Das and Suganthan, 2011). O algoritmo DE possui os mesmos operadores de algoritmos evolucionários padrões: mutação, cruzamento e seleção.

Seja $\mathcal{U}_{(a,b)}$ um número pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo (a,b); $\mathcal{I}_{(m)}$ um número pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[1,m]$; $\chi \in \mathbb{R}^\eta$ o vetor de variáveis de otimização; e N o número de indivíduos da população. Defina a população na k-ésima iteração, $X_k = \{\chi_{k,i};\ i = 1,\ldots,N\}$, sendo a i-ésima solução:

$$\chi_{k,i} = \begin{bmatrix} \chi_{k,i,1} \\ \vdots \\ \chi_{k,i,m} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Os operadores do DE são descritos a seguir.

4.1 População Inicial

Na solução do problema (10) na etapa de síntese, as variáveis de otimização são os parâmetros do controlador, $\chi_{k,i} = [\theta_1,\ldots,\theta_\upsilon]^T$, sendo $m = \upsilon$ o número de parâmetros. A população inicial é distribuída uniformemente no intervalo entre $-L$ e L, sendo o valor de L especificado pelo projetista, isto é, $\chi_{1,i,j} = \mathcal{U}_{(-L,L)}$, $i = 1,\ldots,N$ e $j = 1,\ldots,\upsilon$. O tamanho da população foi fixado em $N = 5\upsilon$.

Nas soluções dos problemas (11), (12) e (13) na etapa de análise, as variáveis de otimização são os parâmetros incertos, $\chi_{k,i} = [p_1,\ldots,p_\eta]^T$, $m = \eta$. Neste trabalho, foi adotado que $N = 2^\eta + \eta$, sendo que a população inicial inclui os 2^η vértices e 3η soluções distribuídas de forma aleatória em $\mathcal{P}$.

4.2 Mutação diferencial

Considere os índices $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ dados por $r_j = \mathcal{I}_{(N)}$, $j = 1,...,3$. Adotamos que a i-ésima solução mutante é obtida como sendo:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_i(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}) \quad (15)$$

$i = 1,\ldots,N$. Adotamos o fator de escala aleatório para cada mutação, sendo $F_i = \mathcal{U}_{(0{,}5,1)}$

4.3 Cruzamento

O cruzamento entre as i-ésimas soluções da k-ésima população, X_k, e da população mutante, V_k, gera a população tentativa, U_k:

$$u_{k,i,j} = \begin{cases} v_{k,i,j}, & \text{se } \mathcal{U}_{(0,1)} \leq C_r \text{ ou } j = \delta_i \\ \chi_{k,i,j}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (16)$$

para $j = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,N$, sendo $C_r \in [0,1]$ a taxa de cruzamento. Adotamos $C_r = 0{,}5$. O índice $\delta_i = \mathcal{I}_{(\eta)}$ garante que $\mathbf{u}_{k,i} \neq \chi_{k,i}$.

4.4 Tratamento das restrições

Na etapa de síntese, não é realizada nenhuma restrição adicional sobre os parâmetros do controlador. Com relação à restrição sobre a norma $\mathcal{H}_2$ e a restrição do sistema a malha-fechada ser estável para $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$, é utilizado o método de penalidades. Para a solução que corresponde a um sistema instável é atribuído um valor maior para a função objetivo do que a solução que viola a restrição sobre a norma $\mathcal{H}_2$, que por sua vez possui um valor de função objetivo maior que a solução que não viola nenhuma das duas restrições.

Na etapa de análise, uma solução é factível se $\chi_{k,i} \in \mathcal{P}$. Neste trabalho, optamos por forçar que toda solução pertença a $\mathcal{P}$ utilizando o método de reflexão, isto é, refletir a variável em relação ao valor mínimo ou máximo quando $\chi_{k,i} = p_i < \underline{p}_i$ ou $\chi_{k,i} = p_i > \overline{p}_i$, respectivamente.

4.5 Seleção

A operação de seleção determina qual solução, se o alvo, $\chi_{k,i}$, ou a tentativa, $\mathbf{u}_{k,i}$, sobrevive para próxima geração. Para $i = 1, \ldots, N$:

$$\chi_{k+1,i} = \begin{cases} \mathbf{u}_{k,i}, & \text{se } f(\mathbf{u}_{k,i}) \leq f(\chi_{k,i}) \\ \chi_{k,i}, & \text{caso contrário} \end{cases} , \qquad (17)$$

4.6 Critério de parada

Adotamos como critérios de parada um número máximo de gerações, N_g, ou a convergência da população comparando os valores máximos e mínimos de $f(\chi)$ da k-ésima população, $f_{max}(\chi) - f_{min}(\chi) \leq \epsilon$, $\chi \in \mathbf{X}_k$, sendo ϵ um número pequeno. No passo de síntese, adotamos $N_g = 2.000$ e $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$, e no passo de análise, na verificação da estabilidade adotamos $N_g = 3.000$ e $\epsilon = 10^{-4}$, e no cálculo do máximo da norma adotamos $N_g = 200\eta$ e $\epsilon = 10^{-5}$.

5 Exemplo Ilustrativo

Como exemplo, utilizamos neste trabalho um protótipo laboratorial de suspensão ativa fabricado pela Quanser® apresentado na Fig. 1 (Apkarian and Abdossalami, 2013). Este sistema de controle é estudado em vários trabalhos, por exemplo, em Alves et al. (2014) e de Oliveira et al. (2015).

Seja $x_1(t) \triangleq x_{eq,1} + z_1(t)$ e $x_2(t) \triangleq x_{eq,2} + z_2(t)$, sendo $x_{eq,1}$ e $x_{eq,2}$ os deslocamentos no ponto de equilíbrio e z_1 e z_2 são os desvios em relação ao ponto de equilíbrio. Definindo $x \triangleq [z_2 - z_1 \quad \dot{z_2} \quad z_1 - z_r \quad \dot{z_1}]^T$, $w = \dot{z_r}$, $u = F_c$, $z = [F_c \quad \ddot{z}_2]^T$, as matrizes da representação no espaço de estados são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 & \frac{B_2}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{B_2+B_1}{M_1} \end{bmatrix},$$
$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_1}{M_1} \end{bmatrix}, \; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_2} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_1} \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

$$C_z = \begin{bmatrix} -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 & \frac{B_2}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; D_{zu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -\frac{K_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} & 0 & \frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix},$$
$$D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \; D_{zu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Os valores nominais dos parâmetros são: $M_1 = 1$kg, $M_2 = 2.45$kg, $K_1 = 2 \times 1250$N/m, $K_2 = 2 \times 450$N.m, $B_1 = 5$N.s/m e $B_2 = 7.5$N.s/m (Apkarian and Abdossalami, 2013). É tratado o caso em que estes 6 parâmetros são incertos com variações de $\pm 25\%$. O vetor de parâmetros incertos é definido como sendo $p = [1/M_1 \; 1/M_2 \; K_1 \; K_2 \; B_1 \; B_2]^T$. Neste caso $\eta = 6$ e $n_t = 8$. É adotado o período de amostragem $T = 1ms$ (sugerido pelo fabricante).

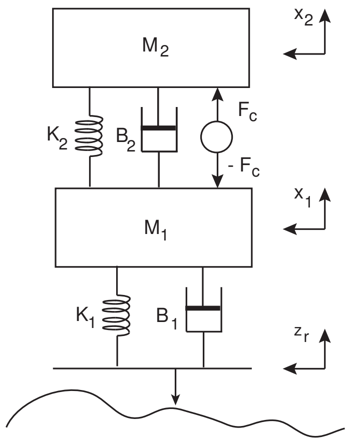

Figura 1: Modelo da suspensão ativa.

Nós consideramos uma estrutura de controle proporcional-integral-derivativo (PID) com 3 parâmetros a serem determinados, ganho proporcional, k_p, tempo integral, $T_i > 0$, e tempo derivativo, $T_d > 0$:

$$K(z) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{T}{T_i} \\ 0 & 0 & -\frac{T_d}{T} \\ \hline k_p & -k_p & -k_p(1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T}) \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\theta_1 \\ 0 & 0 & -\theta_2 \\ \hline \theta_3 & -\theta_3 & -\theta_3(1 + \frac{\theta_1}{2} + \theta_2) \end{array}\right]. \qquad (21)$$

Utilizando o método de síntese com dois passos, com $\epsilon_2 = 20$, considerando o conjunto finito inicial $\widetilde{\mathcal{P}}$ com um ponto correspondendo aos parâmetros nominais, são obtidos, após 2 iterações, com $\widetilde{\mathcal{P}}$ composto por apenas 3 pontos, os seguintes parâmetros do controlador PID: $k_p = 46{,}0211$, $T_i = 0{,}2071$ e $T_d = 1{,}2196 \times 10^{-7}$. Tal controlador resulta em $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{cd}(z, p, K^*)\|_\infty = 6{,}6913$ e $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{ud}(z, p, K^*)\|_2 = 19{,}9999$. A Fig. 2 apresenta as respostas transitórias da aceleração do chassi para o sistema em malha-aberta (suspensão passiva) e o sistema em malha-fechada com o controlador PID (suspensão ativa) para os três pontos do espaço de incerteza do conjunto final $\widetilde{\mathcal{P}}$. É notável a melhor rejeição do distúrbio do controle robusto projetado. A Fig. 3 mostra em detalhes as respostas transitórias da aceleração do chassi, $\ddot{z}_2$, em malha-fechada. Por fim, a Fig. 4 apresenta as respostas transitórias do sinal de controle, F_c, onde pode ser observado que pela escolha de $\epsilon_2 = 20$ é evitada a saturação do atuador com $F_c \leq 40N$. Projetando um controlador de 2ª ordem cheio, com 9 parâmetros de otimização, foi obtido $\max_{p \in \mathcal{P}} \|T_{cd}(z, p, K^*)\|_\infty = 6{,}0552$.

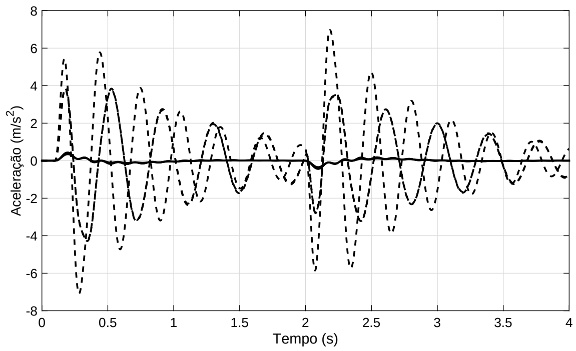

Figura 2: Respostas transitórias da aceleração do chassi, $\ddot{z}_2$, em malha-aberta (linha tracejada) e malha-fechada (linha sólida), para $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

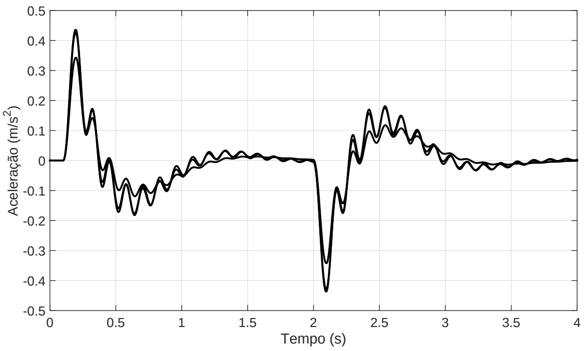

Figura 3: Respostas transitórias da aceleração do chassi, $\ddot{z}_2$, para $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

Não foram feitas comparações com outras técnicas da literatura por não ser do conhecimento dos autores procedimentos que tratem de projeto PID robusto com matriz $D_{yu} \neq 0$. Caso fosse considerado um modelo politópico para tratar o sistema com seis parâmetros incertos, um sistema pertencente ao politopo seria a combinação convexa de 64 vértices. Na etapa de análise seria necessário realizar a otimização em um espaço de dimensão 64, no caso de modelo politópico, ao invés de dimensão 6, no caso de modelo com dependência de parâmetros.

6 Conclusões

Foi proposta uma nova implementação para um procedimento de síntese de sistemas de controle robusto $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$, de sistemas lineares invariantes

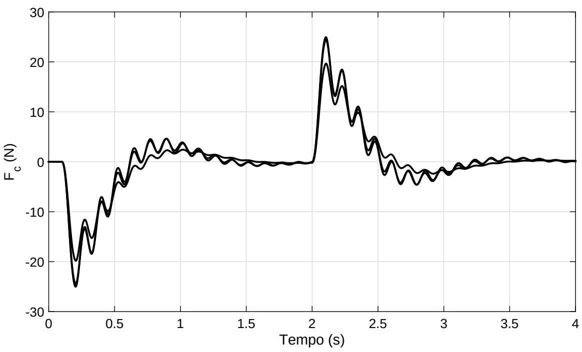

Figura 4: Respostas transitórias do sinal de controle, F_c, para $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

no tempo, em tempo discreto, baseado em dois passos iterativos. A modificação realizada foi considerar modelos com dependência polinomial de parâmetros ao invés de modelos politópicos, o que reduz consideravelmente a dimensão do espaço de busca na etapa de análise do procedimento. Foi demonstrado por meio de um exemplo ilustrativo que a implementação do procedimento de síntese proposta nesse trabalho funcionou de forma satisfatória para um sistema com seis parâmetros incertos.

Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios das agências CAPES, CNPq, e FAPEMIG, [APQ-02943-15] - Edital 01/2015 - Demanda Universal.

Referências

Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2010). Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains, *2010 American Control Conference*, AACC, Baltimore, MD, USA, pp. 4677–4682.

Alves, U. N. L. T., Garcia, J. P. F., Teixeira, M. C., Garcia, S. C. and Rodrigues, F. B. (2014). Sliding mode control for active suspension system with data acquisition delay, *Mathematical Problems in Engineering* **2014**.

Apkarian, J. and Abdossalami, A. (2013). *Active Suspension Experiment for MATLAB®/Simulink® Users - Laboratory Guide*, Quanser Inc., Markham, Ontario, Canada.

Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Ramirez, J. A. and Batista, L. S. (2017). A multiobjective robust controller synthesis approach aided by multicriteria decision analysis, *Applied Soft Computing* **60**: 374–386.

Das, S. and Suganthan, P. N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **15**(1): 4–31.

de Moura Marcos, D., e Silva, S. J. and Gonçalves, E. N. (2016). Síntese de controladores robustos pelo método de Evolução Diferencial, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, CBA, Vitória, ES, pp. 182–187.

de Moura Marcos, D. and Gonçalves, E. N. (2016). Análise de estabilidade robusta pelo método de Evolução Diferencial, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, CBA, Vitória, ES, pp. 170–175.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (2002). Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems, *International Journal of Control* **75**(9): 666–679.

de Oliveira, T. G., Gonçalves, E. N. and Rodrigues, G. G. (2015). Multi-objective $\mathcal{H}_\infty$ control of a laboratory model of active suspension system, *2015 IEEE Conference on Control Applications*, IEEE, Sydney, Australia, pp. 1710–1715.

Ghaoui, L. E., Oustry, F. and AitRami, M. (1997). A cone complementarity linearisation algorithm for static output feedback and related problems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(8): 1171–1176.

Gonçalves, E. N., Bachur, W. E. G., Palhares, R. M. and Takahashi, R. H. C. (2011). Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$/reference model dynamic output-feedback control synthesis, *International Journal of Control* **84**(12): 2067–2080.

Moreira, H. R., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2011). Robust $\mathcal{H}_2$ static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems, *Optimal Control Applications and Methods* **31**(1): 1–13.

Sadabadi, M. S. and Karimi, A. (2015). Fixed-order control of LTI systems subject to polytopic uncertainty via the concept of strictly positive realness, *2015 American Control Conference*, AACC, Chicago, IL, USA, pp. 2882–2887.

Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization* **11**(4): 341–359.

Zakovic, S. and Rustem, B. (2002). Semi-infinite programming and applications to minimax problems, *Annals of Operations Research* **124**: 81–110.