

CRITÉRIO DE ESTABILIDADE SIMPLIFICADO PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO VARIÁVEL: UMA ABORDAGEM VIA PREDITOR DE ARTSTEIN

TANIEL SILVA FRANKLIN*, TITO LUÍS MAIA SANTOS*

* *Universidade Federal da Bahia (UFBA),
Departamento de Engenharia Elétrica e Computação (DEEC),
R. Aristides Novis, N. 02, CEP 4210-630, Salvador, Bahia, Brasil.*

Emails: tanielfranklin@gmail.com, tlsantos@ufba.br

Abstract— This paper deals with the dead-time compensation control of linear systems with time-varying delay. The compensation term is defined for the minimum delay value in order to mitigate its inherent closed-loop performance degradation while the time-varying term is treated with a new simplified stability criterion. The Artstein predictor is used to compensate the minimum delay so that the proposed approach can be directly applied to control unstable systems. The proposed criterion is simple since the computation of the infinity norm of a linear system is the only additional requirement. A case study is presented to illustrate the benefits of the proposed approach.

Keywords— Dead-time compensation, time-varying delay, Artstein predictor, robust control

Resumo— Neste artigo trata-se do controle de sistemas realimentados com compensação de atraso na presença de atraso de transporte variável. A compensação da componente mínima do atraso variável permite mitigar a degradação causada pelo tempo-morto, ao passo que a parcela variável é tratada através de um novo critério de estabilidade simplificado. A compensação de componente constante é realizada com o preditor de Artstein, o que permite aplicar a estratégia e seu respectivo critério a sistemas instáveis em malha aberta. O critério proposto é simples uma vez que se requer apenas a definição da norma infinito de um sistema linear convencional. Um estudo de caso é utilizado para ilustrar os benefícios da estratégia proposta.

Palavras-chave— Compensação de tempo-morto, atraso variável, preditor de Artstein, controle robusto

1 Introdução

O atraso simples de entrada, também conhecido como tempo-morto, se manifesta como um intervalo de tempo entre uma alteração na variável de controle e a sua efetiva ação nas variáveis de processo. Os efeitos indesejados do atraso estão presentes em diversos problemas de controle reais (Normey-Rico and Camacho, 2007). Técnicas de compensação de atraso têm despertado interesse desde o trabalho pioneiro de Smith (1957) na medida em que o modelo do processo pode ser utilizado para estimar o comportamento futuro das variáveis de saída. Na ausência hipotética de perturbações e erros de modelagem, este tipo de abordagem permite obter uma antecipação das variáveis do processo, o que possibilita eliminar o atraso da malha de controle (Smith, 1957). Além do exposto, diversos estudos têm sido conduzidos com o intuito de lidar com o fenômeno do atraso variável, motivados especialmente pelos avanços dos sistemas de controle via redes (Yang, 2006).

Sabe-se que o preditor de Smith - em sua formulação original - não pode ser utilizado para controlar sistemas instáveis em malha aberta (Normey-Rico and Camacho, 2007). Neste contexto, diversas modificações foram propostas com o intuito de aplicar o conceito de compensação de atraso a processos instáveis em malha aberta (Normey-Rico and Camacho, 2008). O método de redução, também conhecido como preditor de Artstein (Artstein, 1982), permite realizar a com-

pensação de atraso constante no contexto de sistemas instáveis em malha aberta sem a necessidade de qualquer modificação na estrutura de predição. Conceitualmente, o preditor de Artstein baseia-se no modelo em espaço de estados em contraposição da descrição entrada-saída do preditor de Smith. Nos últimos anos, algumas modificações foram propostas para melhorar a rejeição de perturbação do preditor de Artstein devido à facilidade em lidar com processos instáveis em malha aberta, uma vez que nenhuma modificação se faz necessária para estabilizar a predição obtida por esta técnica (Sanz et al., 2016; Santos, 2016; Santos and Franklin, 2018).

Múltiplos critérios têm sido propostos com o objetivo de verificar a estabilidade de sistemas lineares com atraso variável (Kao and Lincoln, 2004; Kao and Rantzer, 2007; Sun et al., 2010; Kim, 2011; Zhou and Egorov, 2016). Tipicamente, estas técnicas fazem uso de funções de Lyapunov-Razumikhin ou Lyapunov-Krasovskii em decorrência da natureza variante no tempo do problema de controle. Alternativamente, o teorema do pequeno ganho oferece um caminho simples de se verificar a estabilidade neste tipo de problema (Kao and Lincoln, 2004). A grande diferença da abordagem apresentada por Kao and Lincoln (2004) decorre da simplicidade do método, uma vez que a análise frequencial dispensa a formulação de um problema de otimização convexo com desigualdades matriciais lineares. Este critério simplificado, proposto originalmente para sistemas lineares com

uma entrada e uma saída, foi generalizado para sistemas lineares de segunda ordem com múltiplas entradas em Santos et al. (2018).

Diversos sistemas de controle com atraso variável apresentam um atraso mínimo devido ao tempo-morto inerente ao processo ou em consequência de um tempo mínimo necessário para transportar massa ou energia. A título de exemplo, este tipo de atraso pode ser consequência do intervalo de tempo mínimo necessário para realizar a comunicação em uma rede de industrial (Lai and Hsu, 2010) ou dos limites operacionais de variáveis de controle como a vazão mínima de um determinado líquido (Roca et al., 2011). Assim, o atraso mínimo pode ser obtido por meio de modelos fenomenológicos ou a partir do conhecimento das propriedades rede de comunicação utilizada.

A robustez do preditor de Artstein foi analisada no contexto de atraso incerto e constante em Krstic (2008) e Li et al. (2014). No que diz respeito ao atraso variável, um critério de estabilidade para compensadores de atraso foi proposto em Karafyllis and Krstic (2013) considerando margens simétricas de incertezas. A despeito de se basear no teorema do pequeno ganho, a estimativa proposta em Karafyllis and Krstic (2013) não se aplica à compensação do atraso mínimo em decorrência da natureza assimétrica da incerteza neste tipo de descrição. Além do exposto, o critério com intervalos simétricos requer a solução de uma equação de Ricatti modificada na qual há uma constante a ser arbitrada sem uma formulação sistemática (Karafyllis and Krstic, 2013, Seção 4), o que dificulta a utilização do mesmo.

Neste trabalho, avalia-se a utilização do preditor de Artstein no controle de sistemas de atraso variável que possuem um atraso mínimo a partir de uma modificação do critério simplificado proposto em Kao and Lincoln (2004) tendo em vista a utilização do referido preditor. A compensação do atraso mínimo permite minimizar o efeito do atraso conhecido, ao passo que o critério de estabilidade possibilita a utilização da compensação de atraso na presença de variação do atraso. Se comparado a resultados similares, a compensação do atraso mínimo simplifica a definição do valor do atraso nominal, dado pelo limitante inferior do tempo-morto, bem como a utilização do critério, definido pela norma infinita de um sistema linear modificado. Um estudo de caso será apresentado para ilustrar os benefícios da abordagem proposta.

A organização do trabalho se divide da seguinte forma. Na Seção 2 apresenta-se o problema do controle na presença de atraso variável, na Seção 3 propõe-se o novo critério de estabilidade simplificado baseado no Teorema do Pequeno ganho, na Seção 4 avalia-se um estudo de caso e as conclusões serão apresentadas na Seção 5.

2 Apresentação do problema

Considere um sistema descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \bar{h} - \delta(t)), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$u(\tau) = \phi(\tau), \quad \tau \in [-\bar{h} - \delta_{\max}, 0) \quad (3)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle definido em t , \bar{h} um atraso mínimo conhecido e $0 \leq \delta(t) \leq \delta_{\max}$ um atraso variável. Note que $x(0) = x_0$ e $u(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-\bar{h} - \delta_{\max}, 0)$ são apresentados uma vez que os mesmos definem a condição inicial do problema com atraso variável.

Observe que \bar{h} pode ser consequência do processo em si, bem como um atraso mínimo de comunicação, tipicamente presente em sistemas de controle via redes (Lai and Hsu, 2010; Yang, 2006). Neste trabalho, o preditor de Artstein será utilizado para compensar o efeito de \bar{h} , ao passo que o teorema do pequeno ganho será aplicado para definir a faixa admissível de $\delta(t)$ tal que se assegure a estabilidade.

A predição relativa ao instante $t + \bar{h}$, obtida no instante t pode ser definida a partir de (1) por:

$$\hat{x}_p(t) = e^{A\bar{h}} + \int_{t-\bar{h}}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (4)$$

Do ponto de vista numérico, esta integral pode ser obtida como apontado em (Zhong, 2005). A combinação do preditor de Artstein com uma realimentação de estados estabilizante é conhecida como alocação do espectro finito - do inglês *FSA* (Manitius and Olbrot, 1979). Assim, a lei de controle pode ser definida como:

$$u(t) = K\hat{x}_p(t), \quad (5)$$

de tal maneira que todos os auto-valores da matriz $A + BK$ devem pertencer ao semi-plano esquerdo (matriz Hurwitz). A grande vantagem do método proposto, se comparado ao preditor de Smith, decorre do fato de que a estabilidade interna depende apenas da matriz $A + BK$ na presença de atraso constante conhecido. No entanto, na presença de atraso variável, a estabilidade não está assegurada uma vez que a variação no atraso pode ser traduzida como uma incerteza variante no tempo.

O sistema de controle com compensação de tempo-morto e presença de atraso variável está indicado na Fig. 1, sendo que Δ representa o efeito do atraso variável. Note que o efeito do tempo-morto pode ser representado antes (atraso na medição) ou após o atraso variável (atraso de atuação) sem qualquer perda de generalidade. Pode-se inferir da Fig. 1 que a variação do atraso insere uma dinâmica desconhecida. Este fenômeno pode ser descrito a partir da Eq. (1) alternativamente

da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \bar{h}) + w(t) \quad (6)$$

$$w(t) = B[u(t - \bar{h} - \delta(t)) - u(t - \bar{h})] \quad (7)$$

Neste trabalho, pretende-se estabelecer o limite tolerável para $\delta(t)$ com vistas a garantir estabilidade interna considerando a lei de controle definida em (5), obtida a partir da predição estabelecida na Eq. (4).

3 Novo critério de estabilidade

O teorema do pequeno ganho será aplicado devido à simplicidade de utilização no contexto de sistemas incertos (Kao and Lincoln, 2004). Neste problema, um rearranjo de malha pode ser utilizado para decompor o sistema numa partição nominal e outra partição incerta que decorre da variação do atraso conforme indicado na Fig. 2. Deve-se observar que $H_{vw}(s)$ representa o sistema nominal em malha fechada enquanto $H_{wv}(s)$ descreve o efeito do atraso. A interconexão do sistema nominal com o efeito das incertezas se manifesta nos sinais $w(t)$ e $v(t)$.

O termo $w(t)$ é uma perturbação equivalente causada pela variação do atraso. Note que o efeito do atraso fixo permanece na Eq. 6 e na Fig. 2. Entretanto, a representação equivalente do preditor apresentada na Fig. 3 é mais conveniente para eliminar a componente \bar{h} da malha de controle e obter a função de transferência $H_{vw}(s)$. Esta representação possui a seguinte equação dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_p(t) &= A\hat{x}_p(t) + Bu(t) \\ &+ e^{A\bar{h}}B[u(t - \bar{h} - \delta(t)) - u(t - \bar{h})] \end{aligned} \quad (8)$$

sendo $\hat{x}_p(t)$ o vetor de predição e $e^{A\bar{h}}B[u(t - \bar{h} - \delta(t)) - u(t - \bar{h})]$ a perturbação equivalente obtida pelo método da redução (Santos, 2016).

De maneira mais ampla, o método da redução pode ser descrito por:

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A\hat{x}_p(t) + Bu(t) + w_m(t), \quad (9)$$

$$w_m(t) = e^{A\bar{h}}B[u(t - \bar{h} - \delta(t)) - u(t - \bar{h})], \quad (10)$$

$$x(t) = \hat{x}_p(t - \bar{h}) + e_p(t), \quad (11)$$

$$e_p(t) = \int_{t-\bar{h}}^{t-2\bar{h}} e^{A(t-\bar{h}-\tau)} w(\tau + \bar{h}) d\tau. \quad (12)$$

Desta forma, a função de transferência $H_{vw}(s)$ passa a representar a descrição nominal, a qual não depende da incerteza. Assim, o método da redução permite que o sistema de controle se encarregue de estabilizar $\hat{x}_p(t)$, o que consequentemente levará à estabilização de $x(t)$ desde que as condições de estabilidade robusta sejam asseguradas. Note que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_p(t)\| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t)\| = 0$ de tal maneira que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_p(t)\| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|w_m(t)\| = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_p(t)\| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_p(t)\| = 0$.

Teorema 1 (Condição de estabilidade)

Assuma que:

i) a matriz $A + BK$ possui todos os autovalores pertencentes ao semi-plano esquerdo;

ii) $0 \leq \delta(t) \leq \delta_{\max}$.

O sistema de controle da Fig. 1 será internamente estável se

$$\|j\omega e^{A\bar{h}}BK(j\omega I - A - BK)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\delta_{\max}}. \quad (13)$$

A interpretação deste resultado é baseada no teorema do pequeno ganho baseado na Fig. 3. Observe que o sistema equivalente invariante no tempo definido por $H_{wv}(s)$ é perturbado pelo sistema variante no tempo $H_{vw}(s)$.

Prova: Este resultado foi inspirado em Kao and Lincoln (2004), o qual tratava de um sistema com apenas uma entrada e uma saída sem compensação de atraso. Neste trabalho, o efeito do preditor de Artstein será incorporado ao estudo. Inicialmente observe que a norma L_2 de um sinal $w(t)$ é definida por:

$$\|w(t)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{t=0}^{\infty} w(\tau)^T w(\tau) d\tau}. \quad (14)$$

Em um sistema linear invariante no tempo representado por uma função de transferência $P(s)$ em que $Z(s) = P(s)U(s)$, o ganho L_2 é definido pela seguinte relação (Khalil, 2001, Chapter 5):

$$\|z(t)\|_{L_2}^2 \leq \left(\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|P(j\omega)\|_2 \right)^2 \|u(t)\|_{L_2}^2. \quad (15)$$

Além disso, o ganho L_2 pode ser descrito também da seguinte forma:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|P(j\omega)\|_2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega)) \quad (16)$$

em que $\bar{\sigma}(P(j\omega))$ representa o valor singular máximo da matriz $P(j\omega)$ (Khalil, 2001, Capítulo 5). Este ganho L_2 também é denominado norma infinita de um sistema linear invariante no tempo, ou seja $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega)) = \|P(j\omega)\|_{\infty}$.

Por simplicidade de apresentação, os detalhes das provas são apresentados no Apêndice A. De maneira resumida, demonstra-se que o ganho do subsistema $\|H_{wv}(j\omega)\|_{\infty} \leq \sup_{\omega \in [0, \infty)} \bar{\sigma}(j\omega e^{A\bar{h}}BK[j\omega I - A - BK]^{-1})$ ao passo que $H_{vw}(j\omega) \leq \delta_{\max}$. \square

O teorema do pequeno ganho fornece uma condição apenas suficiente e, portanto, conservadora. Este é um resultado esperado, uma vez que a natureza da variação do atraso é desconhecida. Por outro lado, como discutido em Kao and Lincoln (2004), este conservadorismo não é excessivo em diversos casos. Essa característica desejável foi verificada em casos sem compensação de

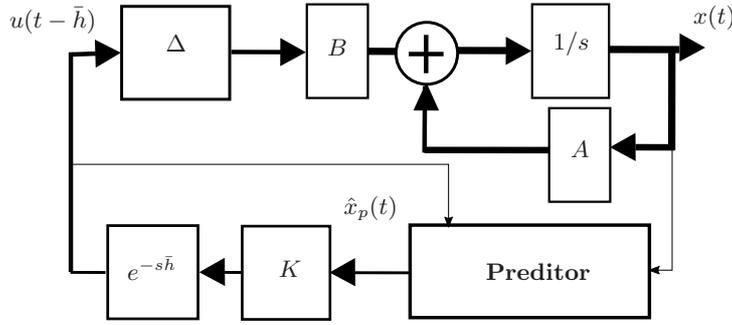


Figura 1: Descrição do sistema de controle com o preditor de Artstein na presença de atraso variável

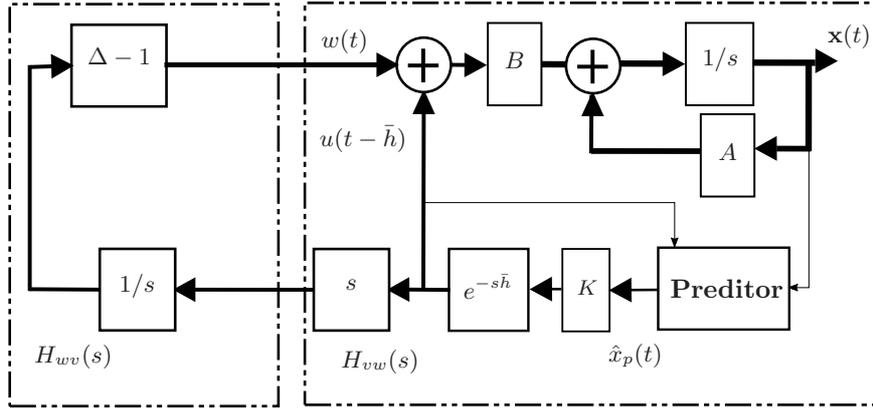


Figura 2: Representação equivalente via decomposição do sistema: modelo nominal interconectado com dinâmica incerta.

atraso apresentados recentemente em Santos et al. (2018). Uma das vantagens desse critério advém do fato de que não se faz qualquer suposição a respeito da taxa de variação de $\delta(t)$.

Comentário 1 O método proposto requer apenas o cálculo da norma de $H_{vw}(j\omega)$, o que pode ser obtido diretamente de programas de matemática computacional convencionais. Assim, a abordagem apresentada é sistemática, mas não requer a programação de desigualdades matriciais.

Comentário 2 O valor exato do atraso mínimo não precisa ser conhecido, apenas um limitante inferior. Deve-se notar que toda a discussão é válida caso $u(t - \bar{h} - \tilde{h} - \tilde{\delta}(t))$ com $\delta(t) = \tilde{h} + \tilde{\delta}(t)$ e $\tilde{h} > 0$.

4 Estudos de caso: reator perfeitamente agitado

Um reator perfeitamente agitado (RPA) realiza uma transformação irreversível de $A \rightarrow B$ em que podem ocorrer múltiplos tipos de atrasos. Outros processos industriais possuem o comportamento dinâmico semelhante ao modelo do RPA. Reatores catalíticos e reações de hidrólise são alguns exemplos de utilização (Albertos and García, 2012).

Neste exemplo, é possível ilustrar a estratégia proposta aplicada a um sistema de duas entradas

e duas saídas, instável em malha aberta e com a presença de atraso como em Albertos and García (2012). Por simplicidade de discussão, será desprezado o efeito do atraso interno dos estados.

O modelo linearizado em torno de um ponto de equilíbrio é dado por (Albertos and García, 2012):

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_a(t) \\ \dot{T}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,1779 & -0,30067 \\ 37,557 & 5,9545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_a(t) - C_a^* \\ T(t) - T^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,6206 & 0 \\ -34,656 & -49,158 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t - h(t)) - q^* \\ q_J(t - h(t)) - q_J^* \end{bmatrix}, \quad (17)$$

Neste caso, assume-se que o ponto de equilíbrio é formado por vazões de equilíbrio definidas como $q^* = q_J^* = 1,41 \text{ m}^3/\text{s}$, o que resultaria em:

$$C_a^* = 3,0577 \text{ kmolA/m}^3; \quad T^* = 340,17^\circ \text{K}.$$

O sistema possui como variáveis manipuladas as vazões q (vazão de saída) e q_J (vazão do líquido refrigerante) e como variáveis de processo a concentração do reagente A ($C_a(t)$) e $T(t)$ a temperatura no reator. Assim, define-se:

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_a(t) - C_a^* \\ T(t) - T^* \end{bmatrix}$$

e

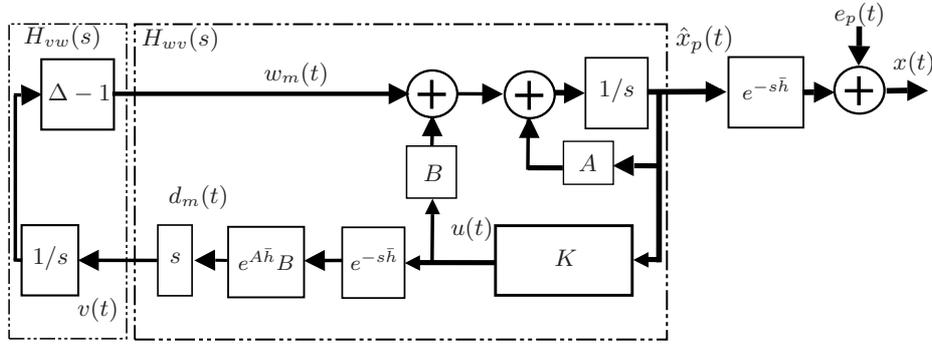


Figura 3: Representação equivalente obtida através do método da redução

Tabela 1: Valores de δ_{max} e $\bar{h} + \delta_{max}$ com ($\bar{h} = 110 \cdot 10^{-3}$) e sem compensação ($\bar{h} = 0$)

| \bar{h} | 0 | 110 ms |
|--------------------------|-------|--------|
| δ_{max} | 21 ms | 11 ms |
| $\delta_{max} + \bar{h}$ | 21 ms | 121 ms |

$$u(t) = \begin{bmatrix} q(t) - q^* \\ q_I(t) - q_I^* \end{bmatrix}.$$

O ganho de realimentação foi definido como

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,0007 & 0,2037 \\ 0,8037 & 0,3728 \end{bmatrix},$$

sendo este obtido através da solução do Regulador Quadrático Linear (do inglês LQR), com objetivo de minimizar função custo (18)

$$J = \int_0^\infty x(t)^T x(t) + u(t)^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} u(t) dt. \quad (18)$$

O atraso utilizado na compensação através do preditor de Artstein, assim como o limite teórico da componente variante no tempo segundo o critério proposto estão apresentados na Tabela 1. Para fins de compensação do atraso, assume-se $\bar{h} = 110$ ms. Note que $\bar{h} = 0$ corresponde à estratégia sem compensação de atraso, sendo possível garantir estabilidade para qualquer variação de atraso entre 0 e 21 ms. A faixa tolerável de variação do atraso torna-se menor uma vez que a norma da matrix $e^{A\bar{h}}$ tende a aumentar com o crescimento de \bar{h} . Por outro lado, conforme esperado, o valor máximo de atraso aumenta de maneira significativa, uma vez que o preditor cumpre o papel de eliminar o atraso mínimo da malha. Neste exemplo, o atraso tolerável deve pertencer ao intervalo de 110 a 121 ms.

Nesta primeira simulação, utilizou-se um atraso variável dado por:

$$h(t) = [115 + 5\text{sen}(1t)]10^{-3}. \quad (19)$$

O sistema parte da condição inicial $x_0 = [-0,02; 0,2]$ com $u(\tau) = 0$, $\tau < 0$. As respostas com preditor e sem preditor são exibidas nas Figs. 4a e 4b respectivamente.

Nota-se, como esperado, que o atraso variável não foi capaz de instabilizar a simulação com o preditor de Artstein, conforme indicado na Fig. 4a.

Com relação à resposta sem preditor (Fig. 4b), a inexistência de compensação de atraso é suficiente para causar instabilidade, sendo esta a principal consequência indesejada da presença de tempo-morto numa malha de controle.

Para tornar mais clara a importância da utilização do critério foi aplicado o controlador definido como

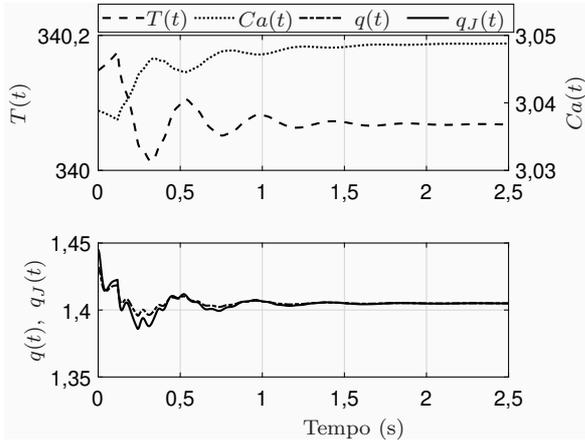
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,6297 & 0,083 \\ 1,2079 & 0,8511 \end{bmatrix}.$$

Para este controlador, o valor máximo de atraso variável, segundo o critério, é $\delta_{max} = 8,8$ ms.

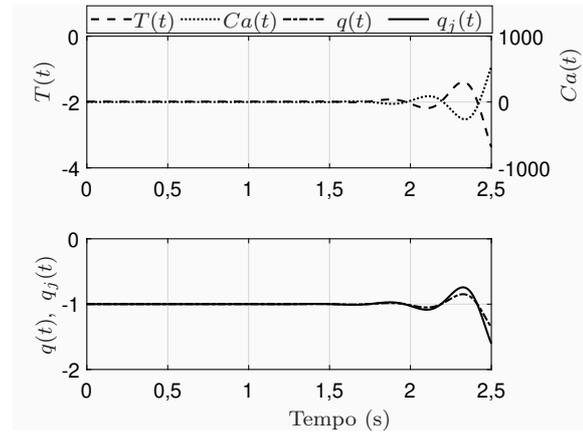
Neste cenário, simula-se primeiramente o sistema com o controlador K_2 considerando somente a componente fixa do atraso e o resultado é apresentado na Fig. 5a. O sistema se mantém estável, uma vez que ainda há uma margem de atraso 8,8 ms. Em contrapartida, quando o sistema é submetido ao efeito da componente variável do atraso o resultado da simulação mostrado na Fig. 5b demonstra instabilidade. Este atraso variável adicional foi de 110 ms a 125 ms excedendo o δ_{max} para o qual a estabilidade é garantida.

O resultado demonstrado pelas Figs. 5a e 5b reforça a importância de cuidar para que a sintonia do controlador leve em consideração o atraso variável máximo admissível. O critério proposto oferece uma forma simples de verificar este atraso variável máximo admissível.

Estes resultados ilustram o benefício da solução proposta no controle de sistemas com atraso variável, mitigando o efeito do atraso constante por meio do preditor de Artstein. Se comparado ao preditor de Smith, não há a necessidade de qualquer ajuste específico, o que simplifica o processo de síntese. Uma realimentação de estados convencional pode ser ajustada de tal maneira que a estabilidade é verificada com o critério proposto. Desta forma, o problema de síntese e compensação de tempo-morto na presença de atraso variável pode ser tratado de maneira similar a um sistema

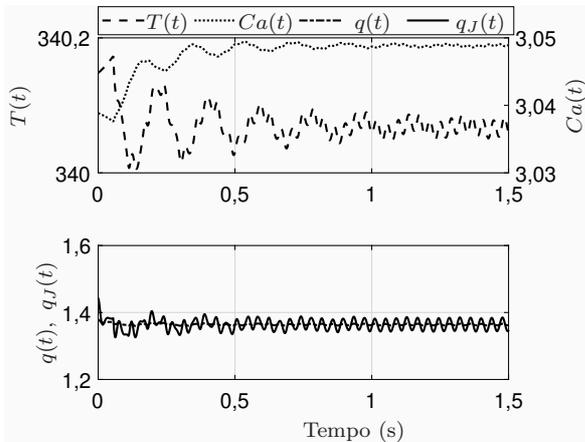


(a) Com o predictor e atraso variável - Controlador K_1

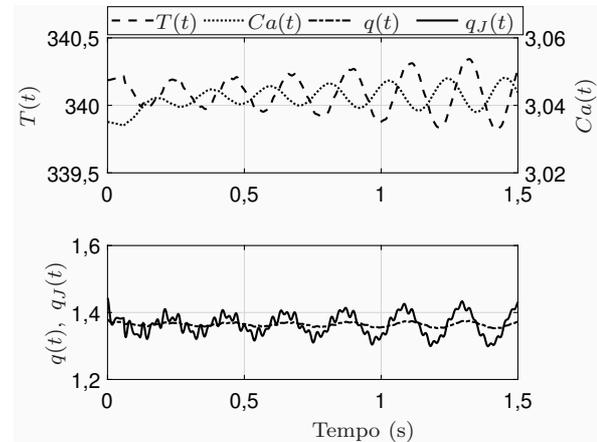


(b) Sem o predictor e com atraso variável - Controlador K_1

Figura 4: Resposta ao degrau do RPA



(a) Controlador K_2 e $h(t) = 110 \text{ ms}$



(b) Controlador K_2 e $h(t) = (117,5 + 7.5\text{sen}(1t)) \text{ ms}$

Figura 5: Resposta ao degrau do RPA com o predictor

sem atraso. A única diferença decorre da verificação de estabilidade por meio de um critério simplificado baseado no teorema do pequeno ganho.

5 Conclusões

Neste artigo, apresentou-se um critério de estabilidade simplificado para sistemas lineares com atraso inspirado no teorema do pequeno ganho. Utiliza-se o predictor de Artstein para compensar o atraso mínimo tendo em vista aplicações nas quais este valor é conhecido. A principal diferença se comparado a resultados anteriores advém da simplicidade do critério, uma vez que o mesmo é definido a partir da norma infinito de um sistema linear modificado. O benefício do método proposto foi ilustrado por meio de um caso inspirado em um reator instável com duas entradas e duas saídas. Verificou-se que é possível mitigar os efeitos indesejáveis do atraso fixo, assegurando estabilidade por meio do método proposto.

Como expectativa de trabalhos futuros,

pretende-se considerar a análise de técnicas de preditores modificados baseados em observadores de perturbação com o intuito de melhorar o desempenho regulatório.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao SENAI CIMATEC e ao departamento de engenharia elétrica e computação (DEEC) da UFBA pelo apoio à participação no evento e também aos revisores anônimos e ao editor.

Referências

- Albertos, P. and García, P. (2012). Control of multi delayed plants: Recycling cstr, *Fourth International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks*.
- Artstein, Z. (1982). Linear systems with delayed controls: a reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control* **27**(4): 869–879.

- Kao, C.-Y. and Lincoln, B. (2004). Simple stability criteria for systems with time-varying delays, *Automatica* **40**(8): 1429–1434.
- Kao, C.-Y. and Rantzer, A. (2007). Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays, *Automatica* **43**(6): 959 – 970.
- Karafyllis, I. and Krstic, M. (2013). Delay-robustness of linear predictor feedback without restriction on delay rate, *Automatica* **49**(6): 1761–1767.
- Khalil, H. (2001). *Nonlinear Systems*, 3rd edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Kim, J.-H. (2011). Note on stability of linear systems with time-varying delay, *Automatica* **47**(9): 2118–2121.
- Krstic, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: Inverse optimality and robustness to delay mismatch, *Automatica* **44**(11): 2930–2935.
- Lai, C.-L. and Hsu, P.-L. (2010). Design the remote control system with the time-delay estimator and the adaptive smith predictor, *IEEE Transactions on Industrial Informatics* **6**(1): 73–80.
- Li, Z.-Y., Zhou, B. and Lin, Z. (2014). On robustness of predictor feedback control of linear systems with input delays, *Automatica* **50**(5): 1497–1506.
- Manitius, A. Z. and Olbrot, A. (1979). Finite spectrum assignment problem for systems with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* **24**(4): 541–552.
- Normey-Rico, J. and Camacho, E. (2007). *Control of dead-time processes*, Springer.
- Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2008). Dead-time compensators: A survey, *Control Engineering Practice* **16**(4): 407 – 428.
- Roca, L., Guzman, J. L., Normey-Rico, J. E., Berenguel, M. and Yebra, L. (2011). Filtered smith predictor with feedback linearization and constraints handling applied to a solar collector field, *Solar Energy* **85**(5): 1056 – 1067.
- Santos, T. (2016). Modified Artstein predictor for LTI systems with dead time and unknown disturbances, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **27**(3): 263–273.
- Santos, T. L., Araújo, J. M. and Franklin, T. S. (2018). Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay (aceito), *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing* **355**: 3541 – 3566.
- Santos, T. L. and Franklin, T. S. (2018). Enhanced finite spectrum assignment with disturbance compensation for lti systems with input delay (aceito), *Journal of The Franklin Institute* **110**: 428 – 441.
- Sanz, R., Garcia, P. and Albertos, P. (2016). Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay, *Automatica* **72**: 205–208.
- Smith, O. (1957). Closer control of loops with dead time, *Chemical Engineering Progress* **53**(5): 217–219.
- Sun, J., Liu, G., Chen, J. and Rees, D. (2010). Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays, *Automatica* **46**(2): 466–470.
- Yang, T. C. (2006). Networked control system: a brief survey, *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications* **153**(4): 403–412.
- Zhong, Q.-C. (2005). On distributed delay in linear control laws - part ii: Rational implementations inspired from the Δ -operator, *IEEE Transaction on Automatic and Control* **50**(5): 729–734.
- Zhou, B. and Egorov, A. V. (2016). Razumikhin and krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems, *Automatica* **71**: 281–291.

A Ganho dos subsistemas

Nesta seção serão definidos os ganhos dos subsistemas $H_{wv}(s)$ e $H_{vw}(s)$. Inicialmente, faz-se necessário definir os operadores Δ e Δ_F descritos na Fig. 3 como segue:

$$\Delta(v) = v(t - \delta(t)), \quad (20)$$

$$\Delta_f(v) = \int_{t-\delta(t)}^t v(\theta) d\theta, \quad (21)$$

sendo $\delta(t)$ uma função que representa o atraso variante no tempo, $\delta \in [0, \delta_{\max}]$ e $w(t) = -\Delta_f(v)$. Verifique também que, por se tratar de múltiplas entradas, $v(t)$ pode ser escrito como $v(t) = [v_1(t) v_2(t) \dots v_p(t)]^T$. Para obtenção da norma induzida de $w(t)$ é necessário desenvolver o seguinte produto:

$$w(t)^T w(t) = \left[\int_{t-\delta(t)}^t v(\theta) d\theta \right]^T \left[\int_{t-\delta(t)}^t v(\tau) d\tau \right] \quad (22)$$

$$= \sum_{j=1}^p \left\{ \left[\int_{t-\delta(t)}^t v_j(\theta) d\theta \right] \left[\int_{t-\delta(t)}^t v_j(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (23)$$

Através da desigualdade de Jensen, torna-se possível escrever:

$$w(t)^T w(t) \leq \delta(t) \sum_{j=1}^p \left[\int_{t-\delta(t)}^t v_j^2(\theta) d\theta \right] \quad (24)$$

Com a inequação (24) encontra-se o limite para $w(t)^T w(t)$ dado por:

$$w(t)^T w(t) \leq \delta(t) \int_{t-\delta(t)}^t v(\theta)^T v(\theta) d\theta \quad (25)$$

$$\leq \delta_{max} \int_{t-\delta_{max}}^t v(\theta)^T v(\theta) d\theta. \quad (26)$$

Em seguida, substitui-se o resultado anterior na Eq. (14) para obter o máximo ganho L_2 com $v(t) \equiv 0_{p,1}$ para $t < 0$:

$$\|w(t)\|_{L_2}^2 \leq \int_0^\infty \delta_{max} \int_{t-\delta_{max}}^t v(\theta)^T v(\theta) d\theta dt \quad (27)$$

$$= \int_0^\infty \delta_{max} \int_{-\delta_{max}}^0 v(t+s)^T v(t+s) ds dt \quad (28)$$

$$= \delta_{max} \int_{-\delta_{max}}^0 \int_0^\infty v(t+s)^T v(t+s) dt ds \quad (29)$$

$$= \delta_{max} \int_{-\delta_{max}}^0 \int_0^\infty v(t)^T v(t) dt ds \quad (30)$$

$$= \delta_{max} \int_{-\delta_{max}}^0 \|v(t)\|_{L_2}^2 ds \quad (31)$$

$$= \delta_{max} \|v(t)\|_{L_2}^2 \int_{-\delta_{max}}^0 ds \quad (32)$$

$$= \delta_{max}^2 \|v(t)\|_{L_2}^2, \quad (33)$$

o que finaliza a definição do ganho L_2 para o caso com múltiplas entradas de maneira similar a Kao and Lincoln (2004). Assim, fazendo uso da definição de norma induzida (∞), tem-se:

$$\|H_{wv}(j\omega)\|_\infty = \sup_{v(t) \neq 0} \frac{\|w(t)\|_{L_2}}{\|v(t)\|_{L_2}} \leq \delta_{max}. \quad (34)$$

Este resultado finaliza a definição do ganho do subsistema $H_{wv}(s)$.

Observe ainda que o limitante da norma de $v(t)$ é dado por:

$$\|\Delta_f(v)\|_{L_2}^2 \leq \delta_{max}^2 \|v(t)\|_{L_2}^2 \quad (35)$$

uma vez que $\|\Delta_f(v)\| = \|w(t)\|$ para qualquer norma por definição. Por simplicidade, o limitante definido pela Eq.(35) pode ser representado de uma forma mais compacta através de:

$$\|\Delta_f\|_{L_2} \leq \delta_{max}. \quad (36)$$

A partir de agora considera-se o sistema nominal descrito por:

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A\hat{x}_p(t) + Bu(t) \quad (37)$$

$$+ e^{A\bar{h}} B[u(t - \bar{h} - \delta(t)) - u(t - \bar{h})]. \quad (38)$$

Note que este sistema compensado não conta com o atraso mínimo. Por outro lado, a perturbação equivalente é dependente do valor de \bar{h} devido ao método da redução. Aqui, considera-se a lei de controle $u(t) = K\hat{x}_p(t)$.

Este sistema pode ser reescrito por:

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A\hat{x}_p(t) + Bu(t) + w_m(t) \quad (39)$$

$$w_m(t) = e^{A\bar{h}} B[u(t - \bar{h} - \delta(t)) - u(t - \bar{h})] \quad (40)$$

$$u(t) = K\hat{x}_p(t), \quad (41)$$

$$v(t) = e^{A\bar{h}} B\dot{u}(t - \bar{h}). \quad (42)$$

A variável auxiliar $v(t)$ será utilizada para definir o ganho do sistema incerto conforme indicado na Fig 3.

Portanto, utilizando a Transformada de Laplace é possível escrever:

$$\hat{X}_p(s) = [sI - A - BK]^{-1} W_m(s) \quad (43)$$

$$V(s) = s e^{-s\bar{h}} e^{A\bar{h}} BK \hat{X}_p(s) \quad (44)$$

Logo, a função de transferência de $w_m(t)$ para $v(t)$ será dada por:

$$H_{wv}(s) = s e^{-s\bar{h}} e^{A\bar{h}} BK [sI - A - BK]^{-1} \quad (45)$$

Para o sistema em questão o ganho L_2 é dado por:

$$\|\mathbf{H}_{wv}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(H_{wv}(s)) \quad (46)$$

$$= \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(j\omega e^{-j\omega\bar{h}} e^{A\bar{h}} BK [j\omega I - A - BK]^{-1}) \quad (47)$$

$$= \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(j\omega e^{A\bar{h}} BK [j\omega I - A - BK]^{-1}) \quad (48)$$

em que $\bar{\sigma}()$ corresponde ao máximo valor singular.

A estabilidade robusta pode ser finalmente verificada em sistemas com atraso variável, a partir do Teorema do Pequeno Ganho:

$$\|\mathbf{H}_{wv}(j\omega)\|_\infty \delta_{max} < 1. \quad (49)$$

Este resultado conclui a prova do novo critério simplificado.