

# ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COM ATRASO ESTOCÁSTICO EM REDES SEM FIOS

IAN HENRIQUES DE ANDRADE\*, JOSÉ PAULO VILELA SOARES DA CUNHA\*

\**Departamento de Eletrônica e Telecomunicações — Faculdade de Engenharia  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro — Rua São Francisco Xavier 524, sala 5001E — 20550-900*

Emails: iandeandrade@hotmail.com, jpaulo@ieee.org

**Abstract**— This paper discusses the stability of real-time control systems subjected to stochastic delays generated by wireless communication networks. A method of measuring delays in wireless networks is presented and the experimental stochastic distributions of three different networks are shown. The results are applied in simulations that use the stochastic delays measured in the wireless networks being considered.

**Keywords**— Stochastic delay, Stability, State feedback, Wireless network.

**Resumo**— É abordada a estabilidade de sistemas de controle em tempo real sujeitos a atrasos estocásticos gerados por redes de comunicação sem fios. Um método de medição de atrasos em redes sem fios é apresentado e são mostradas as distribuições estocásticas experimentais dos atrasos em três redes diferentes. Os resultados são aplicados em simulações que usam os atrasos estocásticos medidos nas redes sem fios consideradas.

**Palavras-chave**— Atraso estocástico, Estabilidade, Realimentação de estado, Rede sem fios.

## 1 Introdução

Sistemas de controle com redes sem fios são cada vez mais usuais devido à sua aplicabilidade, facilidade de instalação e manutenção. Entretanto, as deficiências das redes sem fios, tais como atrasos de comunicação (Gao et al., 2008), perdas de pacotes (Yu et al., 2004) e limite de taxa de transferência, prejudicam o desempenho e a estabilidade de sistemas de controle.

Geromel (2014) mostra a necessidade de incorporar na análise ou no projeto de controladores os efeitos da transmissão de dados. O principal foco da pesquisa nessa área é a estabilidade de sistemas com atrasos variáveis (Hespanha et al., 2007; Zhang et al., 2016). Pode-se mencionar a abordagem por cadeia e saltos Markovianos em sistemas de tempo discreto (Seiler e Sengupta, 2005) ou em tempo contínuo (Huang e Nguang, 2008).

Neste artigo é abordada a estabilidade de sistemas de controle com sinais amostrados e atrasos estocásticos, assim como em (Nilsson et al., 1998) e (Donkers et al., 2010). Aqui será utilizada a esperança da norma de uma matriz de transição de estado que, como será mostrado, permite obter condições menos conservadoras do que numa abordagem que condicionaria a estabilidade a um valor máximo de atraso admissível. Também é apresentado um método de medição de atrasos em redes sem fios. Foram medidas experimentalmente as características de redes *Zig-Bee* (Callaway et al., 2002) e *Wi-Fi*. Os atrasos estocásticos medidos são aplicados em simulações que ilustram os conceitos apresentados de forma bastante realista.

### 1.1 Conceitos e Notações Básicos

- A norma de um vetor  $x$  é denotada  $\|x\|_p$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, \infty\}$  (Strang, 2003). A norma Euclidiana é denotada  $\|x\| := \|x\|_2$ .
- A norma de uma matriz  $\Phi$  induzida pela norma vetorial  $p \in \{1, 2, \dots, \infty\}$  é denotada  $\|\Phi\|_p$ . A norma induzida pela norma Euclidiana é o seu maior valor singular,  $\|\Phi\| := \|\Phi\|_2 = \sigma_{\max}(\Phi)$  (Strang, 2003).
- O maior módulo dos autovalores de uma matriz  $\Phi$  é denotado  $\lambda_{\max}(\Phi) := \max\{|\lambda_i|\}$ , no qual  $\{\lambda_i\}$  é o seu conjunto de autovalores.

O conceito de *estabilizabilidade*, definido abaixo, alivia os requisitos de *controlabilidade* ou *alcançabilidade* onde se requer apenas a estabilização de um sistema por realimentação de estado.

**Definição 1** *Um sistema no espaço de estado em tempo contínuo é estabilizável se todos os seus autovalores não controláveis forem estáveis (Chen, 1999, Seção 8.3.2).*

**Definição 2** *Um sistema no espaço de estado em tempo discreto é estabilizável se todos os seus autovalores não alcançáveis (Åström e Wittenmark, 2011, Seção 3.4) forem estáveis.*

## 2 Formulação do Problema

### 2.1 Realimentação de estado amostrado periodicamente sem atraso

Considera-se um sistema dinâmico linear, invariante no tempo (*linear time invariant* — LTI) e estabilizável, representado pela equação de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

no qual  $t \in \mathbb{R}$  é o tempo contínuo em segundos,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle. Assume-se o conhecimento das matrizes  $A$  e  $B$ .

Para realizar seu controle por computador, o estado é amostrado,

$$x[k] := x(kh), \quad (2)$$

com período de amostragem  $h > 0$ , dado em segundos. O tempo discreto é  $k \in \mathbb{Z}$ .

A lei de controle ideal, sem atraso, seria a realimentação de estado:

$$u[k] = -Lx[k], \quad (3)$$

no qual  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de realimentação de estado. O sinal de controle é mantido por um *zero-order-hold* (ZOH) durante o intervalo de amostragem (Åström e Wittenmark, 2011, Seção 2.3):

$$u(t) = u[k], \quad t \in [kh, kh + h). \quad (4)$$

A análise clássica do sistema (1), com estado amostrado (2) e o ZOH (4) resulta no seguinte modelo em tempo discreto:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k], \quad (5)$$

no qual:

$$\Phi = e^{Ah}, \quad (6)$$

$$\Gamma = \left[ \int_0^h e^{At} dt \right] B. \quad (7)$$

O sistema (5) controlado pela lei (3) resulta:

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma L)x[k], \quad (8)$$

cujas matrizes de realimentação  $L$  deve ser escolhida de forma que  $\lambda_{\max}(\Phi - \Gamma L) < 1$  para garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio na origem do espaço de estado. Isto é sempre possível desde que o sistema (5) seja estabilizável.

## 2.2 Realimentação de estado amostrado periodicamente e sinal de controle atrasado

Um dos principais efeitos colaterais do uso de redes de comunicação em sistemas de controle é o atraso na transmissão de sinais. Outros efeitos indesejados são ocasionados por falhas de comunicação, por exemplo, a perda de pacotes de dados, que não são considerados neste artigo.

Aqui assume-se que o estado seja amostrado periodicamente, mas o sinal de controle é aplicado atrasado no sistema (1), isto é,

$$u(t) = \begin{cases} u[k], & \text{se } t \in [kh + \tau_k, kh + h), \\ u[k-1], & \text{se } t \in [kh, kh + \tau_k), \end{cases} \quad (9)$$

no qual  $\tau_k \in [0, h)$  é o atraso dependente do instante de amostragem  $k$ .

O modelo do sistema dinâmico (1), com estado amostrado (2) e controle atrasado gerado por ZOH (9) é dado por:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma_{0\tau_k} u[k] + \Gamma_{1\tau_k} u[k-1], \quad (10)$$

com  $\Phi$  dado por (6) e

$$\Gamma_{0\tau_k} = \left[ \int_{\tau_k}^h e^{A(h-t)} dt \right] B, \quad (11)$$

$$\Gamma_{1\tau_k} = \left[ \int_0^{\tau_k} e^{A(h-t)} dt \right] B, \quad (12)$$

o que é semelhante ao descrito por Åström e Wittenmark (2011, pp. 38–39), porém aqui é generalizado para o caso em que o atraso  $\tau_k$  é variável.

Para analisar este sistema com a realimentação do estado amostrado, o sinal de controle atrasado é reescrito como:

$$u[k-1] = -Lx[k-1]. \quad (13)$$

Assim, incluindo-se os sinais de controle atual (3) e atrasado (13) no modelo (10), obtém-se:

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma_{0\tau_k} L)x[k] - \Gamma_{1\tau_k} Lx[k-1]. \quad (14)$$

Definindo-se o vetor de estado estendido que inclui o estado atual e o atrasado,

$$X[k] := \begin{bmatrix} x[k] \\ x[k-1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (15)$$

pode-se reescrever a equação (14) como

$$X[k+1] = \Phi_{\tau_k} X[k], \quad (16)$$

na qual a matriz de transição de estado,

$$\Phi_{\tau_k} := \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma_{0\tau_k} L) & -\Gamma_{1\tau_k} L \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

é variante no tempo devido às variações do atraso.

## 3 Estabilidade do Sistema de Controle

Nas seções a seguir, são analisadas as propriedades de estabilidade do sistema de controle, partindo-se do caso sem atraso, o mais simples, atraso constante e atraso variante no tempo, tendo-se em vista o atraso estocástico, o foco deste artigo.

### 3.1 Sistema sem atraso

Se não houver atraso, ou seja  $\tau_k \equiv 0$ s, então, a matriz de transição de estado do modelo (16) será

$$\Phi_{\tau_k} \equiv \Phi_0 = \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma L) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

cujos autovalores são aqueles do sistema em malha fechada sem atraso (8) e  $n$  autovalores na origem devidos ao bloco diagonal  $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### 3.2 Sistema com atraso invariante no tempo

Se o atraso for constante  $\tau_k \equiv \tau$ , então a solução da equação de estado (16) com condição inicial  $X[0]$  é dada por:

$$X[k] = \Phi_\tau^k X[0], \quad k \geq 0. \quad (19)$$

Para garantir a estabilidade, deve-se escolher a matriz  $L$  para que todos os autovalores da matriz de transição de estado  $\Phi_\tau$  estejam no interior do círculo unitário, isto é,  $\lambda_{\max}(\Phi_\tau) < 1$ .

### 3.3 Sistema com atraso variante no tempo

Se o atraso  $\tau_k$  for variante no tempo, então a solução da equação de estado (16) com condição inicial  $X[0]$  é dada por:

$$X[k] = (\Pi_{i=0}^{k-1} \Phi_{\tau_i}) X[0], \quad k > 0, \quad (20)$$

cujas análise de estabilidade é mais complexa.

A convergência de  $X[k]$  à origem do espaço de estado a partir de qualquer condição inicial ocorre se e somente se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\Pi_{i=0}^{k-1} \Phi_{\tau_i}\|_p = 0. \quad (21)$$

Uma condição suficiente para isto poderia ser obtida da desigualdade

$$\|\Pi_{i=0}^{k-1} \Phi_{\tau_i}\|_p \leq \Pi_{i=0}^{k-1} \|\Phi_{\tau_i}\|_p, \quad \forall k > 0. \quad (22)$$

Para que o lado direito desta desigualdade tenda a zero na medida que  $k \rightarrow +\infty$ , é necessário que  $\exists \|\Phi_{\tau_k}\|_p < 1$ . Entretanto, é possível verificar que qualquer norma matricial induzida satisfaz

$$\|\Phi_{\tau_k}\|_p \geq 1, \quad \forall \tau_k \in [0, h), \quad (23)$$

devido ao bloco  $I$  na matriz  $\Phi_{\tau_k}$  (17) cuja norma é  $\|I\|_p = 1, \forall p \in \{1, 2, \infty\}$ . Uma alternativa, seria escolher uma base mais apropriada,

$$\bar{X}[k] = TX[k], \quad (24)$$

com  $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  não singular, resultando na representação do sistema (16) transformado:

$$\bar{X}[k+1] = \bar{\Phi}_{\tau_k} \bar{X}[k], \quad (25)$$

com

$$\bar{\Phi}_{\tau_k} = T\Phi_{\tau_k}T^{-1}. \quad (26)$$

A solução da equação de estado (25) é:

$$\bar{X}[k] = (\Pi_{i=0}^{k-1} \bar{\Phi}_{\tau_i}) \bar{X}[0], \quad k > 0. \quad (27)$$

Se for possível encontrar um base tal que

$$\|\bar{\Phi}_{\tau_k}\|_p \leq \mu, \quad \forall k \geq 0, \quad (28)$$

seja satisfeita para algum  $\mu \in [0, 1)$ , então:

$$\begin{aligned} \|\bar{X}[k]\|_p &= \|(\Pi_{i=0}^{k-1} \bar{\Phi}_{\tau_i}) \bar{X}[0]\|_p \\ &\leq \left( \Pi_{i=0}^{k-1} \|\bar{\Phi}_{\tau_i}\|_p \right) \|\bar{X}[0]\|_p \\ &\leq \mu^k \|\bar{X}[0]\|_p, \quad \forall k > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

que tende a zero exponencialmente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ .

Uma representação alternativa do estado é:

$$\bar{X}[k] := \begin{bmatrix} x[k] \\ x[k] - x[k-1] \end{bmatrix}, \quad (30)$$

obtida pela transformação (24) com

$$T = T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Aplicando-se a transformação de similaridade (26) e (31) na matriz (17), obtém-se:

$$\bar{\Phi}_{\tau_k} = \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma_{0\tau_k}L - \Gamma_{1\tau_k}L) & \Gamma_{1\tau_k}L \\ (\Phi - \Gamma_{0\tau_k}L - \Gamma_{1\tau_k}L - I) & \Gamma_{1\tau_k}L \end{bmatrix}.$$

De (7), (11) e (12) pode-se concluir que  $\Gamma = \Gamma_{0\tau_k} + \Gamma_{1\tau_k}$ , o que possibilita a simplificação:

$$\bar{\Phi}_{\tau_k} = \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma L) & \Gamma_{1\tau_k}L \\ (\Phi - \Gamma L - I) & \Gamma_{1\tau_k}L \end{bmatrix}. \quad (32)$$

É possível obter matrizes da forma (32) cujas normas satisfazem a condição (28), o que é suficiente para se garantir a estabilidade exponencial do sistema com atraso variante no tempo.

Para reduzir o conservadorismo desta análise de estabilidade, seria melhor obter uma transformação que minimizasse o majorante  $\mu$ . Caso a matriz  $\Phi_\tau$  seja constante e tenha um conjunto de autovetores  $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$  linearmente independentes, então pode ser diagonalizada pela matriz de transformação de similaridade  $V = [v_1, \dots, v_{2n}] \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  (Strang, 2003), que resulta na norma  $\|V^{-1}\bar{\Phi}_\tau V\|_p$  mínima.

Para matrizes variantes no tempo, foi adotada uma transformação de similaridade constante que gerou bons resultados em exemplos práticos,

$$\tilde{\Phi}_{\tau_k} := V^{-1}\bar{\Phi}_{\tau_k}V, \quad (33)$$

na qual a matriz  $V$  é formada pelos autovetores de norma unitária computados para uma “matriz mais frequente”, aquela com atraso médio.

### 3.4 Sistema com atraso estocástico

Se o atraso  $\tau_k$  for variante no tempo de forma estocástica, assume-se que a sua distribuição tenha densidade de probabilidade  $f(\tau_k)$  conhecida, independente do tempo discreto  $k$  e que tenha as seguintes propriedades:

$$f(\tau_k) \geq 0, \quad \forall \tau_k \in [0, h), \quad (34)$$

$$f(\tau_k) = 0, \quad \forall \tau_k < 0, \quad (35)$$

$$f(\tau_k) = 0, \quad \forall \tau_k \geq h, \quad (36)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau_k) d\tau_k = \int_0^h f(\tau_k) d\tau_k = 1. \quad (37)$$

As propriedades (34)–(36) implicam que  $f(\tau_k) \geq 0, \forall \tau_k \in \mathbb{R}$ , que juntamente com a integral (37) são propriedades fundamentais para que esta seja uma densidade de probabilidade. A propriedade (35) é natural pois não há atrasos negativos, enquanto que a propriedade (36) está de acordo com a hipótese de que o atraso é inferior ao período de amostragem. Assume-se também a decorrelação entre os tempos de atraso  $\tau_{k_1}$  e  $\tau_{k_2}$  de amostras distintas, isto é,  $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \neq k_2$ .

No teorema sobre a estabilidade do sistema dinâmico (16)–(17) com atraso estocástico apresentado a seguir, utiliza-se a esperança:

$$E \left\{ \left\| \tilde{\Phi}_{\tau_k} \right\|_p \right\} = \int_0^h \left\| \tilde{\Phi}_{\tau_k} \right\|_p f(\tau_k) d\tau_k. \quad (38)$$

Para que os resultados sejam menos conservadores, é usada a matriz de transição de estado  $\tilde{\Phi}_{\tau_k}$  (33) que é similar à  $\Phi_{\tau_k}$  (17).

**Teorema 1** *Considere o sistema dinâmico (16)–(17) com atraso estocástico  $\tau_k$ , cuja densidade de probabilidade  $f(\tau_k)$  tem as propriedades (34)–(37). Se  $\exists \mu \in [0, 1)$  que satisfaça a desigualdade*

$$E \left\{ \left\| \tilde{\Phi}_{\tau_k} \right\|_p \right\} \leq \mu, \quad (39)$$

então a esperança da norma do estado  $E \left\{ \|X[k]\|_p \right\} \rightarrow 0$  exponencialmente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ .

**Prova:** Para obter resultados menos conservadores, aplica-se uma transformação não singular no vetor de estado

$$\tilde{X}[k] := V^{-1}TX[k], \quad (40)$$

na qual a matriz  $T$  é definida em (31) e  $V$  é usada em (33). Para  $k > 0$ , a esperança da norma do estado  $\tilde{X}[k]$  é dada por:

$$E \left\{ \left\| \tilde{X}[k] \right\|_p \right\} = E \left\{ \left\| \left( \prod_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_{\tau_i} \right) \tilde{X}[0] \right\|_p \right\},$$

que pode ser majorada por:

$$E \left\{ \left\| \tilde{X}[k] \right\|_p \right\} \leq \left( \prod_{i=0}^{k-1} E \left\{ \left\| \tilde{\Phi}_{\tau_i} \right\|_p \right\} \right) \left\| \tilde{X}[0] \right\|_p \leq \mu^k \left\| \tilde{X}[0] \right\|_p, \quad \forall k > 0, \quad (41)$$

uma vez que a condição inicial  $\tilde{X}[0]$  não é incerta e  $\mu$  satisfaz a desigualdade (39). Desde que  $|\mu| < 1$ , pode-se concluir que a progressão geométrica  $\mu^k \rightarrow 0$  exponencialmente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ , o que implica a convergência exponencial da esperança  $E \left\{ \left\| \tilde{X}[k] \right\|_p \right\} \rightarrow 0$ . Da inversão da transformação (40), obtém-se

$$\|X\|_p = \left\| T^{-1}V\tilde{X} \right\|_p \leq \|T^{-1}V\|_p \left\| \tilde{X} \right\|_p, \quad (42)$$

que permite concluir que a esperança de  $\|X[k]\|_p$  também converge exponencialmente a zero.  $\square$

**Corolário 2** *Considere o sistema dinâmico (16)–(17) com atraso estocástico  $\tau_k$ , cuja densidade de probabilidade  $f(\tau_k)$  tem as propriedades (34)–(37). Se  $\exists \mu \in [0, 1)$  que satisfaça a desigualdade*

$$\left\| \tilde{\Phi}_{\tau_k} \right\|_p \leq \mu, \quad \forall \tau_k \in [0, h) : f(\tau_k) > 0, \quad (43)$$

então o sistema dinâmico será globalmente exponencialmente estável.

**Prova:** Para obter resultados menos conservadores, aplica-se a transformação (40) no vetor de estado. A norma do estado  $\tilde{X}[k]$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{X}[k] \right\|_p &= \left\| \left( \prod_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_{\tau_i} \right) \tilde{X}[0] \right\|_p \\ &\leq \left( \prod_{i=0}^{k-1} \left\| \tilde{\Phi}_{\tau_i} \right\|_p \right) \left\| \tilde{X}[0] \right\|_p \\ &\leq \mu^k \left\| \tilde{X}[0] \right\|_p, \quad \forall k > 0, \end{aligned} \quad (44)$$

uma vez que  $\mu$  satisfaz a desigualdade (43). Desde que  $|\mu| < 1$ , pode-se concluir que a progressão geométrica  $\mu^k \rightarrow 0$  exponencialmente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ , o que implica a convergência exponencial da norma do estado  $\left\| \tilde{X}[k] \right\|_p \rightarrow 0$ . Da desigualdade (42), conclui-se que  $\|X[k]\|_p$  também converge exponencialmente a zero.  $\square$

O Corolário 2 garante a estabilidade global exponencial, mais forte do que a convergência exponencial da esperança do estado no Teorema 1. Entretanto, o Corolário 2 assume a condição (43), mais restritiva do que a condição (39).

## 4 Medição de Atrasos em Redes sem Fios

Nesta seção é abordado o método experimental utilizado para medir os atrasos de comunicação das redes *ZigBee* e *Wi-Fi* utilizando *User Datagram Protocol* (UDP) ou *Transmission Control Protocol* (TCP). O objetivo é utilizar a distribuição estocástica dos atrasos obtido para cada caso nas simulações e análises de um exemplo numérico a ser definido.

Os testes realizados consistiam no envio periódico de um pacote de dados de um módulo transmissor para um módulo receptor, ambos acoplados a dois microcontroladores Arduino UNO e também conectados fisicamente por um par de fios. As Figuras 1 e 2 mostram os diagramas de blocos dos arranjos utilizados nos experimentos com a rede *ZigBee* e a rede *Wi-Fi*, respectivamente. Nos experimentos foram utilizados os componentes relacionados na Tabela 1.

Ao enviar um pacote, o Arduino transmissor também sinalizava por meio do elo digital físico (par de fios), o que permitia que o temporizador interno do microcontrolador receptor registrasse esse tempo ( $t_{ref}[k]$ ). Posteriormente, ao receber

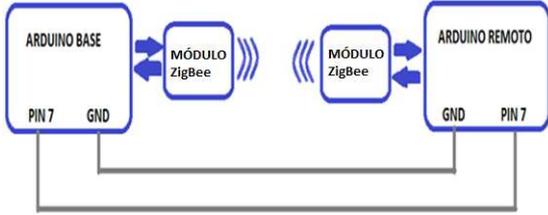


Figura 1: Diagrama de blocos dos experimentos com a rede *ZigBee*.

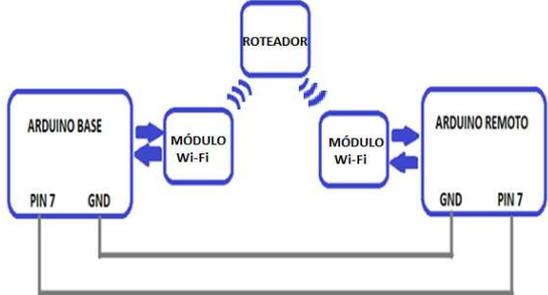


Figura 2: Diagrama de blocos dos experimentos com a rede *Wi-Fi*.

Tabela 1: Componentes utilizados nos experimentos para medição de atrasos em redes sem fios.

Quantidade	Componente
2	Arduinos UNO
2	Módulos <i>Wi-Fi</i> RN-171XV
2	Módulos <i>XBee Series 2</i>
2	<i>XBee Shields</i>
1	Roteador TP-LINK N750

o comando via rede sem fios, o Arduino receptor registrava o tempo em que o pacote foi recebido ( $t_a[k]$ ). Esses dados eram enviados por meio de uma porta *Universal Serial Bus* (USB) a um microcomputador que os registrava para processamento posterior. Dessa forma, é possível calcular o tempo de atraso, dado por:

$$\tau_k = t_a[k] - t_{\text{ref}}[k], \quad (45)$$

e a partir do conjunto de dados obtém-se a distribuição estocástica dos atrasos.

Para cada configuração das redes, os testes foram repetidos três vezes, com uma duração de cerca de uma hora cada teste. A resolução do temporizador utilizado é de  $4 \mu\text{s}$ .

#### 4.1 Resultados experimentais

A Tabela 2 apresenta os principais resultados dos experimentos para cada configuração: o maior valor dos atrasos, o menor valor dos atrasos, a média dos atrasos, o desvio padrão dos atrasos e o número de pacotes perdidos (absoluto e relativo). Além disso, foi gerado um histograma para cada configuração (Figuras 3, 4 e 5) para melhor visualização da distribuição estocástica dos atrasos.

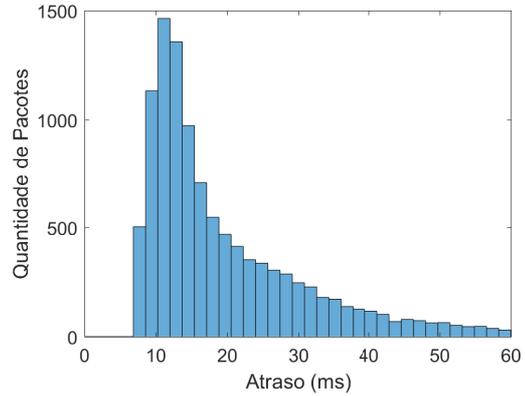


Figura 3: Histograma dos atrasos medidos na rede *Wi-Fi* TCP.

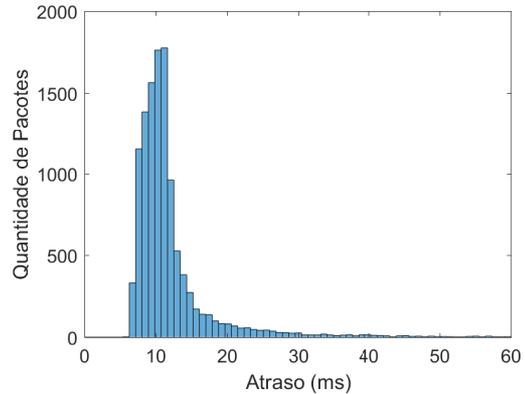


Figura 4: Histograma dos atrasos medidos na rede *Wi-Fi* UDP.

A Figura 3 sugere que o valor médio dos atrasos utilizando *Wi-Fi* TCP é o maior das três configurações. Além disso, nesta configuração não aconteceu perdas de pacotes, o que já era esperado pois no TCP é previamente estabelecida uma conexão entre o transmissor e o receptor e essa conexão permite haver um mecanismo de controle de envio e recebimento, garantindo a entrega do pacote ao destinatário (Kurose e Ross, 2013, Cap. 3).

A Figura 4, mostra que o *Wi-Fi* UDP é o mais rápido das três configurações. Entretanto, observando-se a Tabela 2, houve a perda de cerca de 1% do total pacotes, pois no protocolo UDP não há o estabelecimento de uma conexão entre o transmissor e o receptor, ou seja, a comunicação é unilateral e não garante a entrega do pacote (Kurose e Ross, 2013, Cap. 3).

A Figura 5 mostra que os atrasos da rede *ZigBee* estão concentrados em torno de dois picos, o que se deve ao reenvio de pacotes que essa rede realiza quando os pacotes não são entregues (Bezerra, 2012), de forma semelhante ao TCP. Além disso, esta teve o menor valor médio de atrasos e o menor desvio padrão dentre as redes testadas. Também não houve perdas de pacotes.

Tabela 2: Dados coletados e estatísticas para cada configuração de rede sem fios testada.

	Módulo <i>Wi-Fi</i> (UDP)	Módulo <i>Wi-Fi</i> (TCP)	Módulo <i>ZigBee</i>
Total de pacotes	11620	11087	11306
Atraso mínimo (ms)	5,764	7,080	7,944
Atraso máximo (ms)	212,124	410,424	74,212
Atraso médio (ms)	12,465	21,863	10,666
Desvio padrão (ms)	9,178	18,929	2,814
Pacotes perdidos	117 (1%)	0	0
Vezes que $\tau_k > 17,3$ ms	1139 (9,8%)	4883 (44%)	433 (3,9%)

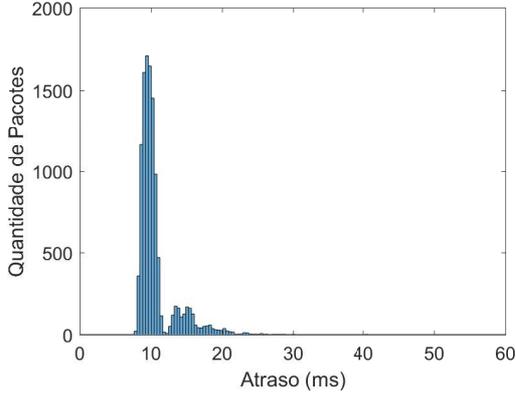


Figura 5: Histograma dos atrasos medidos na rede *ZigBee*.

## 5 Exemplos Numéricos

Nestes exemplos numéricos, considera-se o sistema com autovalores instáveis:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (46)$$

Escolheu-se o período de amostragem  $h = 0,5$  s, maior que o atraso máximo das redes sem fios na Tabela 2. O modelo dinâmico em tempo discreto (5) tem as matrizes

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1,3104 & 0,7039 \\ 1,4078 & 2,0144 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0,1552 \\ 0,7039 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Os autovalores desejados são  $\lambda_1 = 0,95$  e  $\lambda_2 = 0,96$ . Para obtê-los no sistema sem atraso, calcula-se a matriz de realimentação de estado  $L = [2,0059; 1,5676]$ .

### 5.1 Sistema sem atraso ou com atraso constante

Para avaliar a estabilidade do sistema com atraso constante, a Figura 6 apresenta o máximo autovalor da matriz  $\tilde{\Phi}_\tau$  em função do atraso. Nota-se que  $\lambda_{\max}(\tilde{\Phi}_\tau) \geq 1$  para  $\tau > 45,9$  ms, ou seja, atrasos grandes violam a condição de estabilidade.

As Figuras 7, 8 e 9 apresentam os resultados das simulações do sistema de controle em malha fechada sem atraso ou com atrasos constantes  $\tau = 25$  ms e  $\tau = 50$  ms, respectivamente. O estado

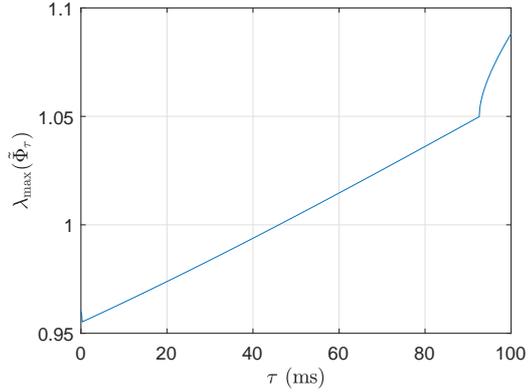


Figura 6: Máximo autovalor em função do atraso.

inicial é  $x(0) = [1; -2]^T$ . Como esperado, a resposta do sistema sem atraso, Figura 7, é estável. Na Figura 8 o atraso é  $\tau = 25$  ms, o transitório também é estável, conforme esperado da análise do maior autovalor, mas é um pouco mais lento e oscilatório do que no caso sem atraso. O atraso  $\tau = 50$  ms instabiliza o sistema, o que é evidente na Figura 9, pois o maior autovalor está fora do círculo unitário, conforme a Figura 6.

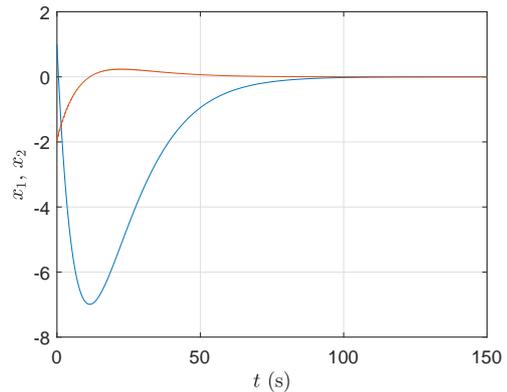


Figura 7: Simulação da realimentação de estado sem atraso.

### 5.2 Sistema com atrasos estocásticos

Para analisar a estabilidade de forma menos conservadora, a matriz  $\tilde{\Phi}_\tau$  dada por (33) foi computada com a matriz  $V$  formada pelos autovetores

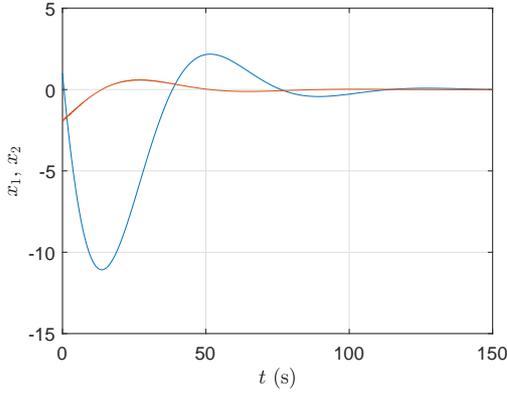


Figura 8: Simulação da realimentação de estado com atraso constante  $\tau = 25$  ms.

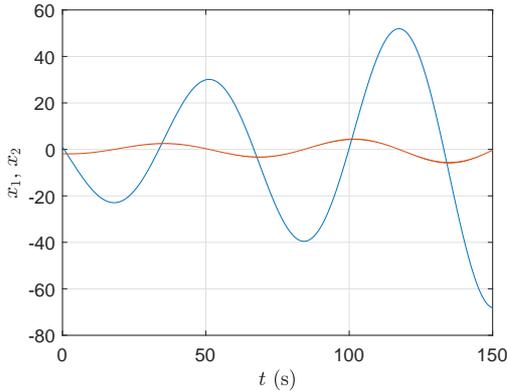


Figura 9: Simulação da realimentação de estado com atraso constante  $\tau = 50$  ms.

da matriz  $\bar{\Phi}_{\bar{\tau}}$ , na qual  $\bar{\tau}$  é o atraso médio da rede *ZigBee* (vide Tabela 2). Pode-se observar na Figura 10 que a norma da matriz de transição de estado é  $\|\bar{\Phi}_{\bar{\tau}}\| < 1$  para  $\tau < 17,3$  ms. Conforme o Corolário 2, a estabilidade do sistema com atraso estocástico seria garantida se esse atraso máximo fosse respeitado. Na Tabela 2, que mostra o número de vezes que o atraso ultrapassou 17,3 ms, verifica-se que isto não é atendido por nenhuma das redes testadas. Naturalmente, esse resultado é mais conservador do que a condição sobre o máximo autovalor válida para atraso constante.

Para obter resultados menos conservadores por meio do Teorema 1, deve-se calcular a esperança  $E\{\|\bar{\Phi}_{\tau_k}\|\}$ . Isto foi feito numericamente para os atrasos estocásticos das redes sem fios testadas. Os resultados são apresentados na Tabela 3. Nota-se que,  $E\{\|\bar{\Phi}_{\tau_k}\|\} < 1$ , para as redes *ZigBee* e *Wi-Fi* UDP, o que garante a convergência exponencial da esperança do estado. Entretanto, isto não pode ser garantido para a distribuição da rede *Wi-Fi* TCP, pois  $E\{\|\bar{\Phi}_{\tau_k}\|\} > 1$ .

O sistema de controle foi simulado com os atrasos das redes *ZigBee* e *Wi-Fi* medidos experimentalmente. As Figuras 11, 12 e 13 apresentam

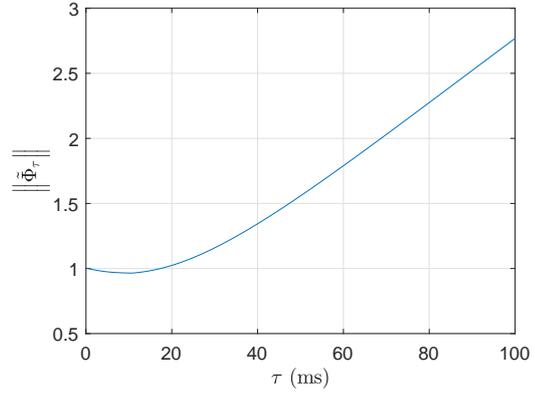


Figura 10: Norma  $\|\tilde{\Phi}_{\tau}\|$  em função do atraso.

Tabela 3: Esperanças  $E\{\|\tilde{\Phi}_{\tau_k}\|\}$  para o controle com cada rede sem fios.

Rede	$E\{\ \tilde{\Phi}_{\tau_k}\ \}$
<i>ZigBee</i>	0,9702
<i>Wi-Fi</i> UDP	0,9905
<i>Wi-Fi</i> TCP	1,0310

as variáveis de estado simuladas. As Figuras 11 e 12 indicam que os comportamentos para as redes *ZigBee* e *Wi-Fi* UDP são estáveis, o que já era esperado. Além disso, seus desempenhos são bem semelhantes, o que talvez seja atribuído ao fato do atraso médio de ambas as configurações serem parecidos. A Figura 13 também indica a estabilidade no caso da rede *Wi-Fi* TCP, o que não pode ser garantido pelo Teorema 1. Além disso, o transitório é mais lento e oscilatório, possivelmente devido ao seu maior atraso médio.

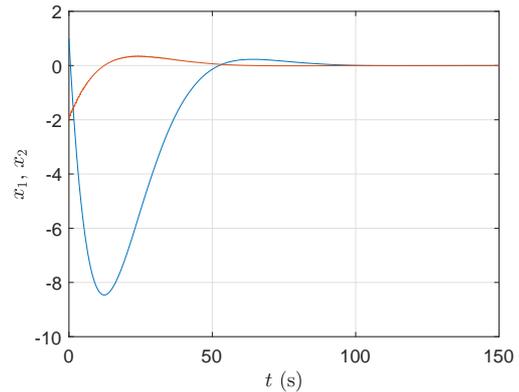


Figura 11: Simulação da realimentação de estado com atraso estocástico da rede *ZigBee*.

## 6 Conclusões

Foi estudada a estabilidade de sistemas com sinais de controle transmitidos por redes sem fios com atrasos estocásticos. Para isso, aplicou-se

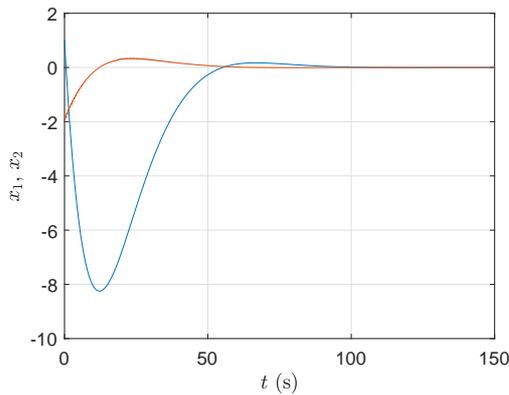


Figura 12: Simulação da realimentação de estado com atraso estocástico da rede *Wi-Fi* UDP.

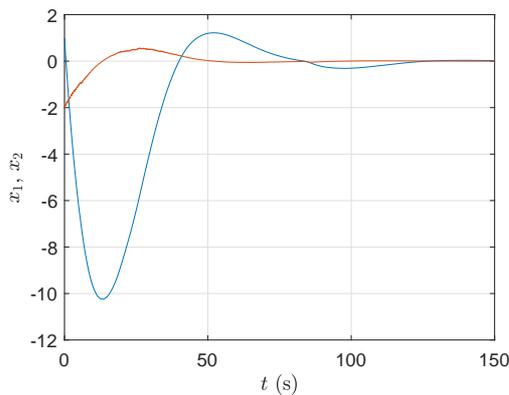


Figura 13: Simulação da realimentação de estado com atraso estocástico da rede *Wi-Fi* TCP.

uma abordagem baseada na esperança da norma de uma matriz de transição de estado, que é dependente da distribuição estocástica do atraso.

Foi apresentado também um método de medição de atrasos que permitiu obter características dos atrasos de três redes sem fios distintas. Os resultados dos experimentos foram utilizados em simulações realistas que ilustram a teoria desenvolvida. Esta é uma diferença significativa em relação a outros trabalhos que apresentam resultados conservadores ou em condições pouco realistas, tais como atrasos constantes ou com distribuição gaussiana.

### Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo CNPq, CAPES e FAPERJ.

### Referências

Åström, K. J. e Wittenmark, B. (2011). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, 3<sup>rd</sup> edn, Dover Publications.

Bezerra, J. (2012). *Instrumentação eletrônica sem fio: transmitindo dados com módulos Xbee*

*ZigBee e PIC16F877A*, 1<sup>a</sup> edn, São Paulo: Érica.

- Callaway, E., Gorday, P., Hester, L., Gutierrez, J. A., Naeve, M., Heile, B. e Bahl, V. (2002). Home networking with IEEE 802.15.4: a developing standard for low-rate wireless personal area networks, *IEEE Communications Magazine* **40**(8): 70–77.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3<sup>rd</sup> edn, Oxford University Press.
- Donkers, M. C. F., Heemels, W. P. M. H., Bernardini, D., Bemporad, A. e Shneer, V. (2010). Stability analysis of stochastic networked control systems, *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD, pp. 3684–3689.
- Gao, H., Meng, X. e Chen, T. (2008). Stabilization of networked control systems with a new delay characterization, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **53**(9): 2142–2148.
- Geromel, J. C. (2014). Sistemas de controle em rede: Análise, projeto e aplicação prática, *Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, MG, pp. 375–384.
- Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P. e Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings of the IEEE* **95**(1): 138–162.
- Huang, D. e Nguang, S. (2008). State feedback control of uncertain networked control systems with random time-delays, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **53**(3): 829–834.
- Kurose, J. F. e Ross, K. W. (2013). *Computer Networking: a top-down approach*, 6<sup>th</sup> edn, Pearson Education.
- Nilsson, J., Bernhardsson, B. e Wittenmark, B. (1998). Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays, *Automatica* **34**(1): 57–64.
- Seiler, P. e Sengupta, R. (2005). An  $H_\infty$  approach to networked control, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **50**(3): 356–364.
- Strang, G. (2003). *Introduction to Linear Algebra*, 3<sup>rd</sup> edn, Wellesley Cambridge Press.
- Yu, M., Wang, L., Xie, G. e Chu, T. (2004). Stabilization of networked control systems with data packet dropout via switched system approach, *Proc. IEEE Int. Symp. Computer Aided Control Systems Design*, New Orleans, LA, pp. 3106–3107.
- Zhang, X.-M., Han, Q.-L. e Yu, X. (2016). Survey on recent advances in networked control systems, *IEEE Trans. Ind. Informatics* **12**(5): 1740–1752.