

# ESTIMAÇÃO DE ESTADOS A PARTIR DE MEDIÇÕES NÃO SINCRONIZADAS E AMOSTRADAS IRREGULARMENTE

TAIGUARA M. TUPINAMBÁS\*, LEONARDO A. B. TÔRRES\*, BRUNO O. S. TEIXEIRA\*

\*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)  
Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil

Emails: taiguara@ufmg.br, leotorres@ufmg.br, brunoot@ufmg.br

**Abstract**— This paper addresses the impact of irregular sampling and the lack of synchronization among sensors in state estimation via sensor fusion, considering that the measurements are obtained with the recording of the time instants in which they are realized. An illustrative case study of position estimation of a vehicle, modeled as a unicycle on a surface, that counts on inertial sensors and makes use of noisy measurements from a GPS receptor, is presented and discussed.

**Keywords**— State estimation, irregular sampling, sensor fusion, sensor network synchronization, timestamp

**Resumo**— Avalia-se o impacto da amostragem irregular e da falta de sincronização entre sensores no processo de estimação de estados via fusão sensorial, considerando que as medições são obtidas registrando-se os instantes de tempo em que elas são realizadas. Um caso ilustrativo de estimação de posição de um veículo, modelado como um unicyclo sobre um plano, que conta com sensores inerciais e faz uso de medições ruidosas de um receptor GPS, é apresentado e discutido.

**Palavras-chave**— Estimação de estados, amostragem irregular, fusão sensorial, sincronização de rede de sensores, carimbo de tempo

## 1 Introdução

A estimação de estados a partir de medições e modelos incertos é aplicada em diversas áreas, tais como Robótica, Engenharia Aeroespacial, Economia, etc. Para o caso linear e Gaussiano, o filtro de Kalman (KF) garante estimação ótima, e aproximações como o filtro de Kalman *Unscented* (UKF) são utilizados para sistemas não-lineares (Julier and Uhlmann, 2004).

Em geral, considera-se que as observações são amostradas e disponibilizadas para o estimador a uma taxa regular. No entanto, para muitas aplicações práticas, essa consideração não é verdadeira. Limitações nos instrumentos de medição ou na rede de comunicação podem causar atrasos aleatórios e não conhecidos no envio de dados. Esquemas de amostragem baseada em eventos, utilizados para otimizar recursos de comunicação (Hu et al., 2017), geram intervalos de amostragem variáveis. Além disso, a sincronização entre diferentes dispositivos, com diferentes sistemas operacionais, e por vezes distantes entre si, muitas vezes não é viável. Neste cenário, tem-se fluxos de dados irregularmente amostrados e não sincronizados.

Quando o registro do instante de tempo em que a medição foi realizada, neste trabalho chamado de carimbo de tempo dos dados, está disponível, é possível aplicar métodos modificados de fusão sensorial. No trabalho de (Fatehi and Huang, 2017) é apresentado um algoritmo para estimação de estados de um processo industrial com observações oriundas tanto de instrumentação *online*, quanto de dados laboratoriais. Considerou-se que o primeiro conjunto de observações possui alta frequência de amostragem, é regular, sem

atrasos, mas com valores pouco precisos. Por outro lado, em (Fatehi and Huang, 2017) também se considerou que dados medidos em laboratórios são de baixa frequência de amostragem, irregulares, com atraso, mas muito mais precisos. Em (Gopalakrishnan et al., 2010) é apresentada uma análise crítica de várias abordagens utilizadas para se tratar atrasos de medições amostradas de forma não-uniforme, separando-os em métodos que fazem a fusão das medições irregulares assim que elas chegam e métodos que utilizam uma matriz de estados aumentada, para incorporar as medições atrasadas entre etapas de estimação.

Por outro lado, quando não há carimbos de tempo nas medições ou quando eles não são confiáveis devido à falta de sincronização da rede de sensores, a maioria dos métodos disponíveis na literatura não são aplicáveis. Para contornar esse problema, existem esquemas de sincronização temporal, como NTP (do inglês, *network time protocol*), ou a utilização de GPS na rede. Muitas vezes, no entanto, a alta complexidade ou o alto custo necessário podem inviabilizar a aplicação. Outros métodos mais viáveis são estudados em (Sivrikaya and Yener, 2004), como o RBS (do inglês, *Reference Broadcast Synchronization*), ou o TPSN (do inglês, *Timing-Sync Protocol for Sensor Networks*).

Antes de investir em um esquema de sincronização, é importante avaliar se os ganhos em precisão justificam o esforço. Muitas vezes, dependendo da combinação entre a dinâmica do sistema, o nível de ruído das medições e o intervalo de tempo médio das observações, pode ser que o erro adicional ao se ignorar a irregularidade amostral seja desprezível. De acordo com o conheci-

mento dos autores, parece haver poucos trabalhos que estudem o efeito de se considerar ou não o carimbo de tempo nos dados na qualidade de estimação. Tendo isso em vista, o objetivo deste artigo é apresentar resultados preliminares relativos à seguinte questão: sob quais condições compensa investir em sincronização da rede de sensores para evitar perda de qualidade na estimação de estados? Para isso, um estudo de caso é conduzido, por meio do problema de rastreamento de um robô não-holonômico em movimento. Diferentes cenários são simulados, variando-se: (i) o nível de ruído de observação; (ii) o intervalo de tempo de amostragem médio; e (iii) a relação entre o intervalo de discretização do modelo e o intervalo de tempo de amostragem médio.

## 2 Formulação do Problema

Considere o sistema dinâmico estocástico não-linear amostrado

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t), t), \quad (1)$$

$$y(t_k) = g(x(t_k), v(t_k), t_k), \quad (2)$$

em que  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  são, respectivamente, os modelos de processo e observação, assumidamente conhecidos. Considere também que para todo  $k \geq 1$ , as medições  $y(t_k) \in \mathbb{R}^m$  e o ruído de medição  $v(t_k) \in \mathbb{R}^r$  são conhecidos. Os instantes de tempo  $t_k, \forall k \in \mathbb{N}^+$ , são ordenados ( $t_{k+1} > t_k, \forall k \in \mathbb{N}^+$ ) e definidos pelos intervalos de tempo  $h_0 \triangleq t_1$ ,  $h_k \triangleq t_k - t_{k-1}, \forall k \geq 1$ . As entradas  $u(t)$  são medidas em intervalos regularmente espaçados  $T$ , i.e.  $u(iT) \in \mathbb{R}^p, \forall i \geq 1$  são conhecidas.  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  é o ruído de processo.

Neste trabalho, assumem-se que os instantes de medição  $t_k$  são dados por um processo aleatório de Poisson. Ou seja, os intervalos de tempo  $h_k$  são variáveis aleatórias exponenciais i.i.d. com parâmetro  $\lambda$  conhecido,  $h_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , em que  $\mathcal{E}(\lambda)$  define uma função de distribuição de probabilidade (pdf) exponencial, com parâmetro  $\lambda$  (tempo médio), conforme Figura 1. Esse modelo de amostragem caracteriza uma aplicação comum para um esquema de amostragem por eventos ou para um sistema com rede de sensores dessincronizados. No trabalho de (Micheli and Jordan, 2002), por exemplo, considerou-se um conjunto de  $N$  sensores idênticos realizando as medições dos estados de um processo físico a cada  $L$  segundos. Eles provaram matematicamente que, se os sensores forem independentes e não sincronizados e  $N$  for grande o suficiente, o tempo de espera entre o recebimento de dois sinais consecutivos pode ser aproximado por uma variável aleatória exponencial  $\mathcal{E}(\lambda)$ , em que o parâmetro  $\lambda = N/L$ .

Quando o carimbo de tempo está disponível, a assimilação de dados do algoritmo pode ser feita no momento exato da medição. Para isso, a integração das equações diferenciais via discretização deve acontecer com intervalos de tempo  $\delta t$  variáveis, no caso deste trabalho utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Dessa forma, (1) pode ser reescrita como

$$x(t_j^*) = f_d(x(t_{j-1}^*), u(t_{j-1}^*), w(t_{j-1}^*), t_{j-1}^*), \quad (3)$$

em que  $t_j^* = t_{j-1}^* + \delta t_j^*$  e  $t_0^* = 0$ . Cada valor  $\delta t_j^*$  corresponde ao intervalo de tempo entre o último instante em que se registrou a chegada de um sinal, seja ele de entrada ou de medição, e o próximo instante de tempo em que um valor de entrada ou de medição é obtido, conforme será detalhado na Seção 3.1. Como as entradas são conhecidas em intervalos regulares  $T$ , é utilizado um segurador de ordem zero, para os instantes em que não há informação disponível de entrada. Por outro lado, se o carimbo de tempo não é levado em conta, (1) pode ser reescrito como

$$x_i = f_d^*(x_{i-1}, u_{i-1}, w_{i-1}, i), \quad (4)$$

em que  $t = iT$ .

Deseja-se estimar o estado  $x(iT)$  de forma recursiva, em intervalos regularmente espaçados  $T$  igual ao período de amostragem regular dos sinais de entrada, utilizando o conjunto de medições  $y(t_k) : t_k \leq iT$  e de entradas passadas  $u_{i-1}$ . O conhecimento dos intervalos de tempo  $h_{k-1} : t_k \leq iT$  também é levado em consideração para o cenário com carimbo de tempo. O tempo médio de observações  $\lambda$  é maior que o intervalo de tempo  $T$ , por um fator  $\alpha > 1$ , ou seja,  $\lambda = \alpha T$ .

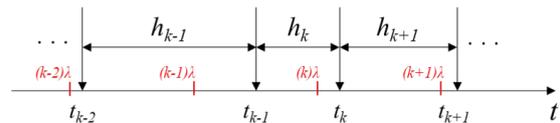


Figura 1: Processo de amostragem irregular modelado por um processo de Poisson. Os intervalos regularmente espaçados  $\lambda$  são apresentados em cinza escuro, e um exemplo de realização de instantes  $t_k$  é mostrado, com seus respectivos intervalos de tempo  $h_k$  aleatórios. O valor esperado  $E(h_k) = \lambda$ .

## 3 Metodologia

Para avaliar o efeito de se considerar ou não o carimbo de tempo das medições no desempenho de sistemas de estimação via fusão sensorial, filtros de Kalman *unscented* (UKF) são utilizados. O algoritmo UKF é descrito de forma detalhada

no trabalho de (Julier and Uhlmann, 2004) e uma revisão recente e bastante completa pode ser encontrada em (Menegaz et al., 2015). Assim como o filtro de Kalman original (Kalman, 1960), o UKF é composto pelas etapas de predição e de assimilação de dados. As informações dos modelos em (2) e (3) ou (4) são utilizadas durante a predição, enquanto as observações medidas são introduzidas nas estimativas de estado na fase de assimilação de dados.

Devido à amostragem irregular descrita na Seção 2, os instantes de medição  $t_k$  das observações não coincidem com os de estimação  $iT$ . Além disso, o modelo de processo é discretizado a uma taxa  $1/T$  mais rápida que a frequência média das observações  $1/\lambda$ . Como consequência, há intervalos de tempo  $T$  em que apenas a etapa de predição pode ser realizada e outros em que há dados a serem assimilados. Um exemplo de aplicação em que essa característica acontece é o problema de rastreamento de alvos. Sensores inerciais que fornecem as informações de entrada para o modelo, e.g. aceleração linear e velocidade angular, operam em uma frequência mais alta que os sensores GPS, mas, geralmente, apresentam níveis de ruído superiores.

Um esquemático ilustrativo é apresentado na Fig. 2, onde  $\alpha = 5$ , i.e., a taxa média de amostragem das observações  $1/\lambda$  é cinco vezes mais lenta que a frequência de amostragem  $1/T$  dos sensores que disponibilizam informações de entrada. A cada  $T$  segundos, ou seja no intervalo de tempo entre dois instantes de amostragem das entradas pode haver ou não informações de observação. No cenário ilustrado pela letra **A** na Fig. 2, não há medições disponíveis. Durante o intervalo **B** há apenas uma medição, ao passo que em **C** há mais de uma observação disponível.

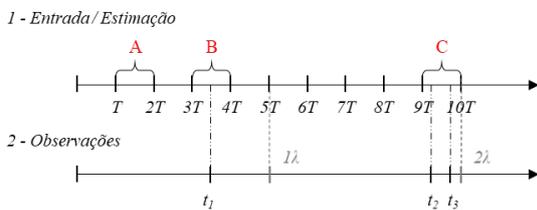


Figura 2: Exemplos de instantes de amostragem da entrada e das estimações (1) e das observações (2). Os instantes múltiplos de  $\lambda$ , igual ao intervalo médio de amostragem das observações são apresentados em cinza escuro, para referência.

Nas próximas subseções é apresentado como os algoritmos de estimação tratam os cenários **A**, **B** e **C** para os casos em que o carimbo de tempo está e não está disponível.

### 3.1 Com carimbo de tempo

Sabendo o momento exato  $t_k$  em que as observações são medidas, é possível assimilá-las no instante correto, considerando intervalos de tempo variáveis para o algoritmo de filtragem. Para isso, o modelo matemático em (3) é discretizado a uma taxa  $\delta t_j^*$  variável. Para a simulação deste artigo, os valores de  $\delta t_j^*$  são calculados a partir da união de todos os instantes de tempo correspondentes às chegadas de sinais de entrada ou de medição em um único vetor, de forma ordenada. Por meio da subtração de dois instantes consecutivos, é possível obter os intervalos de tempo de integração  $\delta t_j^*$  correspondente. No caso de uma versão *online*, a integração das equações diferenciais é executada a medida que um sinal de entrada ou um sinal de medição de saída é recebido. Nesses momentos, são utilizados o intervalo de tempo entre o último sinal recebido e o instante atual. Além disso, quando o sinal recebido é um sinal de entrada, é executada apenas a etapa de predição. E, quando o sinal for de medição, acontecem as duas etapas de predição e assimilação de dados, considerado um segurador de ordem zero para a entrada. O fluxograma da Fig. 3 representa o passo a passo desse algoritmo, apresentando as etapas executadas quando o sinal é de entrada ou de observação.

Dessa forma, no cenário **B** da Fig. 2, o algoritmo executa uma etapa completa de predição e assimilação de dados dos instantes  $3T$  até  $t_1$ , considerando o intervalo  $\delta t_4^* = t_1 - 3T$  (note que há 3 intervalos de tempo  $\delta t_j^*$ , antes do instante  $t_1$ ). Em seguida é feita uma etapa de predição entre  $t_1$  e  $4T$ . Durante o intervalo de tempo de integração entre  $t_1$  e  $4T$ , considerou-se que a entrada permaneceu constante desde a sua última atualização em  $3T$ . Ou seja, assume-se que não houve variação na entrada para essa etapa de predição. Caso mais de uma observação seja medida entre duas entradas (cenário **C**), são executadas etapas completas de filtragem para cada observação disponível e, ao final, uma etapa de predição entre a última observação e a próxima entrada.

### 3.2 Sem carimbo de tempo

Quando não há carimbo de tempo nas medições, o algoritmo de filtragem não sabe o momento exato da medição  $t_k$ . Assim, o instante de tempo considerado para a etapa de assimilação de dados é sempre o próximo instante múltiplo de  $T$ , i.e. quando a próxima informação de entrada está disponível.

Existem apenas dois cenários de estimação nesse caso. Primeiro, quando não há medições disponíveis entre duas entradas, o estimador executa apenas a etapa de predição entre os intervalos de tempo  $iT$  e  $(i+1)T$ , conforme cenário **A** da Fig. 2. Segundo, nos casos representados pela letra **B**, o estimador considera que a observação foi feita no

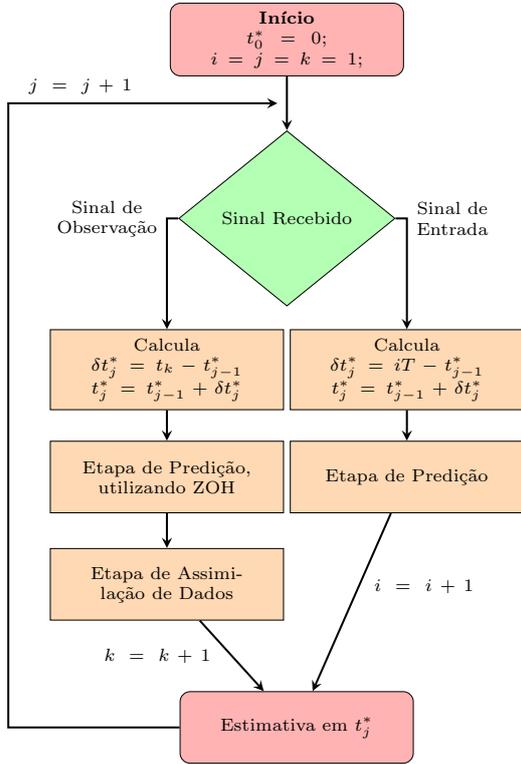


Figura 3: Diagrama ilustrativo da versão *online* do estimador que considera o carimbo de tempo. Os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  representam, respectivamente, os contadores dos sinais de entrada, estimação e da saída.

próximo instante múltiplo de  $T$  em que há informações de entrada. No exemplo da Fig. 2, a medição feita no instante  $t_1$  é assimilada no instante  $4T$ . Caso haja mais de uma observação entre duas entradas (cenário **C**), a mais antiga é descartada. Os passos de discretização do modelo utilizados pelo UKF são sempre  $\delta t = T$ , havendo ou não observações disponíveis.

## 4 Resultados Simulados

### 4.1 Descrição do Sistema

Considere um robô móvel não-holonômico, cujo modelo de processo cinemático é dado por

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= v \cos(\theta), \\ \dot{p}_y &= v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= u_1(t), \\ \dot{v} &= u_2(t), \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $p_x$  e  $p_y$  são as coordenadas de posição,  $\theta$  a orientação angular,  $v$  a velocidade linear e as entradas  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente, a velocidade angular ( $\omega$ ) e a aceleração linear ( $a$ ).

O sistema descrito por 5 é discretizado por meio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem

e o vetor de estados  $x_i$  é dado por  $x_i \triangleq [p_{x,i} \ p_{y,i} \ \theta_i \ v_i]^T$ .

O modelo de observações é dado por

$$y(t_k) = \begin{bmatrix} p_x(t_k) \\ p_y(t_k) \end{bmatrix} + v(t_k), \quad (6)$$

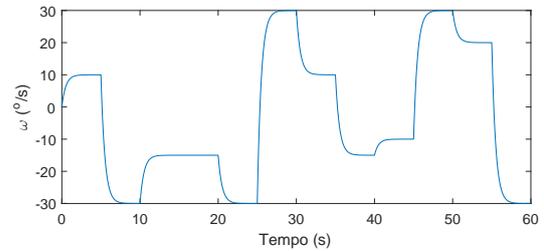
em que  $v(t_k) \sim \mathcal{N}(0, R_{t_k})$  é o ruído de observação com média nula e covariância  $R_{t_k}$ . Para o cenário sem carimbo de tempo, o vetor de observações é aproximado por  $\tilde{y}_i \approx y(t_k)$ , em que  $i$  é o índice do próximo instante de tempo múltiplo de  $T$ .

O vetor de entradas  $u_i = [\omega_i \ a_i]^T$ , é medido por meio de girômetro e acelerômetro, respectivamente. Assume-se que

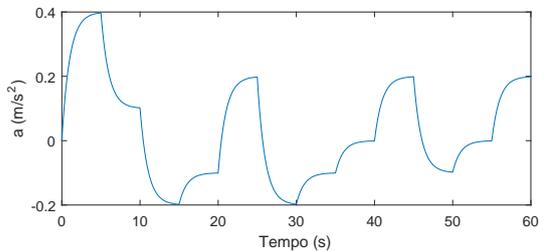
$$u_i = \tilde{u}_i - w_i, \quad (7)$$

em que  $\tilde{u}$  é o valor medido pelos sensores e  $w \sim \mathcal{N}(0, Q_i)$  representa o ruído correspondente, de média nula e covariância  $Q_i$ .

São considerados 60 segundos de simulação, com um passo de integração  $\delta t_{\text{sim}} = 10^{-4}$ . Para simular a amostragem irregular, os intervalos de tempo  $h_k$  são calculados por meio da função de distribuição exponencial do MatLab<sup>TM</sup> e aproximados para o instante de tempo mais próximo, dentre as 600.000 amostras. As entradas utilizadas para a simulação são apresentadas na Fig. 4. A Fig. 5 apresenta o deslocamento do robô no plano  $xy$  partindo do ponto  $(0, 0)$ , uma realização de medições ruidosas com relação sinal-ruído  $\text{SNR}_y = 30$  dB e  $\lambda = 0.3$  s e a estimativa de deslocamento do UKF, considerando carimbo de tempo e um  $\alpha = 5$ .



(a)



(b)

Figura 4: Entradas utilizadas para a simulação. A sequência temporal da velocidade angular  $\omega$  é mostrada em (a), e da aceleração linear  $a$  é apresentada em (b).

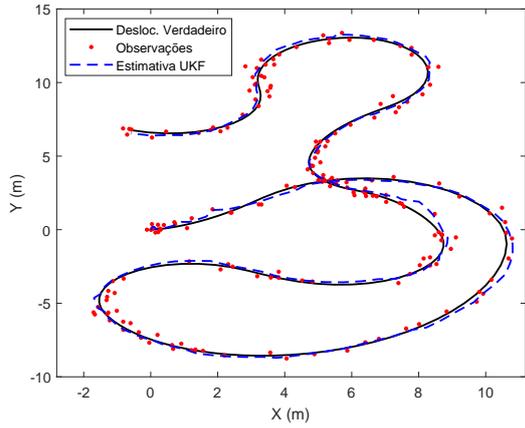


Figura 5: Deslocamento verdadeiro, medições ruidosas e estimativa do UKF considerando o carimbo de tempo, para nível do ruído de medição igual a  $\text{SNR}_y = 30$  dB,  $\lambda = 0.3$  s e  $\alpha = 5$ .

Para comparar a qualidade das estimativas obtidas, o seguinte índice de desempenho é utilizado

$$J = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{(\hat{p}_{x,i} - p_{x,i})^2 + (\hat{p}_{y,i} - p_{y,i})^2}}{N} \quad (8)$$

em que  $\hat{p}_{x,i}$  e  $\hat{p}_{y,i}$  são as estimativas de posição em intervalos regulares  $T$ ,  $p_{x,i}$  e  $p_{y,i}$  as coordenadas verdadeiras do robô, também em intervalos regulares  $T$  e  $N$  é a quantidade total de estimativas. Esse índice representa a média dos erros de deslocamento no plano  $xy$  obtidos pelos estimadores.

Uma realização da evolução do índice  $J$  para os dois estimadores, considerando  $\lambda = 0.5$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\text{SNR}_y = 60$  dB e  $\text{SNR}_u = 20$  dB pode ser observada na Fig. 6, no intervalo de 0 a 1.3 segundos. Os pontos pretos representam os instantes regulares  $kT$  e os asteriscos marcados no eixo das abcissas representam os instantes de medição  $t_k$ . É possível observar que, antes das primeiras observações serem assimiladas, o índice  $J$  de ambos estimadores é igual. Na primeira observação  $t_1$ , realizada próximo do instante 0.4 s, não há diferença significativa entre a mudança no índice  $J$  para os dois estimadores, pois o instante de tempo real de medição foi muito próximo do instante de entrada e, desta forma, o erro da aproximação  $\tilde{y}_i \approx y(t_k)$  é desprezível. No instante  $t_2$ , no entanto, a diminuição do índice  $J$  para o estimador que faz a assimilação no instante correto é visivelmente maior e acontece no momento exato da medição. Esse mesmo efeito pode ser observado no instante  $t_4$ , após 1 segundo, quando há uma diferença significativa entre o instante de medição  $t_k$  e o instante em que a próxima informação de entrada está disponível.

Para a análise de resultados desse artigo, foram feitas 3 simulações distintas, em que um parâmetro diferente foi variado para cada uma delas

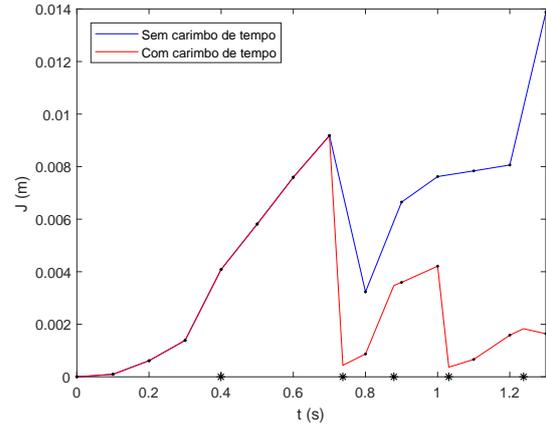


Figura 6: Recorte temporal de 1 a 1.3 segundo, do índice  $J$  de uma realização dos dois estimadores, com e sem carimbo de tempo. Os asteriscos no eixo  $x$  representam os instantes de amostragem das observações  $t_k$ . Os pontos pretos apresentados nas linhas representam os instantes de tempo regulares de amostragem da entrada

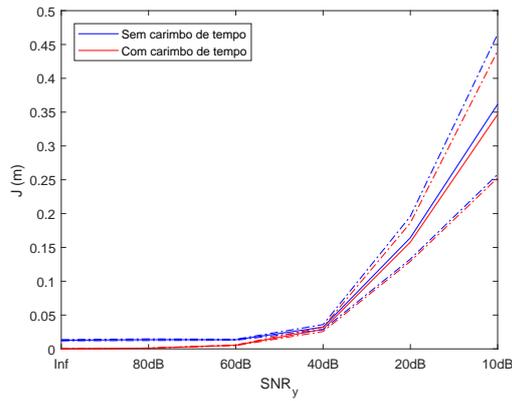
e os outros foram mantidos fixos. Em todos os casos foram simuladas 100 realizações para cada filtro e para cada parâmetro. Os valores médios do índice de desempenho  $J$  para cada caso, assim como os intervalos de confiança de 95% são apresentados na Fig. 7. As próximas subseções apresentam uma discussão sobre os resultados.

#### 4.2 Variação do Nível de Ruído de Observação

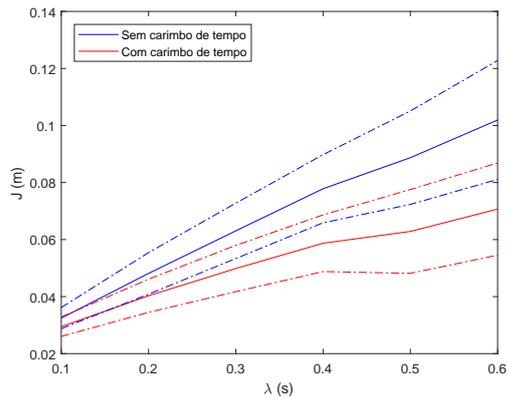
Inicialmente, o efeito do nível de ruído de observação no desempenho dos filtros com e sem carimbo de tempo é avaliado. A relação sinal ruído dos sensores de entrada e o intervalo de tempo médio das observações são mantidos fixos,  $\text{SNR}_u = 20$  dB e  $\lambda = 0.1$  s.

Variou-se a relação sinal-ruído das observações conforme  $\text{SNR}_y = \infty, 80, 60, 40, 20, 10$  dB. Ou seja, inicialmente considera-se que não há ruído nas observações e em seguida o nível de ruído é aumentado gradativamente. A Fig. 7a apresenta os resultados obtidos.

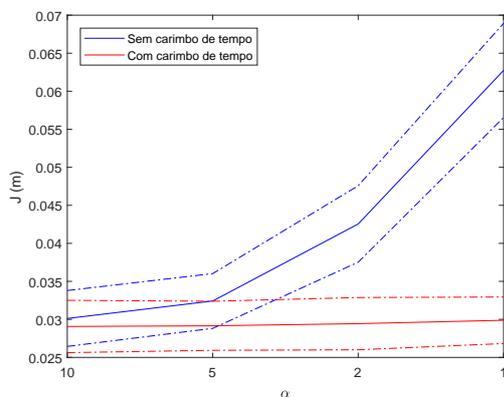
É possível observar que o estimador que considera o carimbo de tempo possui desempenho estatisticamente superior apenas para baixos níveis de ruído da observação. Quando  $\text{SNR}_y$  é igual a  $\infty$  e 80 dB, o índice de desempenho  $J$  do filtro com carimbo de tempo é aproximadamente 1.25 e 1.26 cm, respectivamente, mais preciso do que sem carimbo de tempo e com variância pequena. Quando a relação sinal ruído se aproxima de 40 dB, no entanto, não é possível distinguir estatisticamente o efeito de se considerar ou não carimbo de tempo.



(a)



(b)



(c)

Figura 7: Variação do índice desempenho  $J$  em função de (a) redução da relação sinal-ruído das observações  $\text{SNR}_y$ , (b) aumento do intervalo de tempo médio das observações  $\lambda$  e (c) relação entre o intervalo de tempo de entrada  $T$  e o valor de  $\lambda$ , dada por  $\alpha$ . As linhas azuis representam os resultados para o cenário sem carimbo de tempo e as linhas vermelhas os resultados quando o carimbo de tempo é considerado. São apresentados os valores médios e o intervalo de confiança de 95%.

#### 4.3 Variação do Intervalo Médio de Amostragem de Observação

Em seguida, variou-se o intervalo de tempo médio das observações, conforme  $\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4,$

$0.5, 0.6$  s, mantendo-se o nível de ruído das entradas e das observações fixos em, respectivamente,  $\text{SNR}_u = 20$  dB e  $\text{SNR}_y = 40$  dB. Os resultados são apresentados na Fig.7b.

Os resultados obtidos demonstram que a diferença no desempenho dos filtros é mais significativa para intervalos de tempo mais espaçados, mantendo-se a dinâmica do sistema e os outros parâmetros fixos. Inicialmente, para valores pequenos de  $\lambda$ , não há diferença estatística entre o desempenho dos estimadores, mas a medida que o intervalo cresce, ela aparece, chegando a aproximadamente 3.1 cm para  $\lambda = 0.6$  s. Uma interpretação possível é que se o intervalo de tempo médio das observações for muito pequeno em comparação com a velocidade em que a dinâmica do sistema varia, o erro de aproximação do instante de amostragem das observações  $t_k$  é reduzido. O ruído do sensor pode acabar sendo mais relevante do que o erro devido ao instante incorreto de assimilação.

#### 4.4 Variação da Relação $\alpha = T/\lambda$

Finalmente, o valor de  $\alpha$ , i.e., a relação entre o intervalo de tempo regular das entradas  $T$  e o intervalo de tempo médio das observações  $\lambda$  foi alterado entre  $\alpha = 10, 5, 2, 1$ . Os resultados são apresentados na Fig. 7c.

Nota-se que, quando o carimbo de tempo é considerado, não há diferença significativa em se variar  $\alpha$  no desempenho do filtro, com o índice de desempenho  $J$  se mantendo pouco abaixo dos 3 cm. Ou seja, não importa a relação entre as frequências de amostragem da observação e das entradas. Por outro lado, quando não se considera o carimbo de tempo, essa relação se torna relevante para o índice de desempenho do estimador. Quanto mais lento a frequência da entrada em comparação com a frequência da saída, maior o erro obtido. Para o caso mais extremo utilizado,  $\alpha = 1$ , a diferença no índice  $J$  foi mais do que o dobro. Esse resultado era esperado, uma vez que quanto maior o valor de  $\alpha$ , mais rápida é a taxa de discretização do modelo de processo em relação à frequência dos sensores de observação. Consequentemente, o erro obtido na aproximação  $\tilde{y}(i) \approx y(t_k)$  diminui.

## 5 Conclusões

Neste trabalho, os efeitos de se considerar ou não o carimbo de tempo na estimação de estados foram analisados por meio de um estudo de caso. Filtros de Kalman *Unscented* foram utilizados para estimar a localização de um robô móvel não-holonômico para ambos cenários. Os parâmetros relação sinal-ruído da saída, intervalo médio de amostragem das observações e relação entre intervalo de tempo das entradas e intervalo médio

das observações foram variados para a condução do estudo.

Resultados preliminares sugerem que, para os três parâmetros estudados, o estimador que considera carimbo de tempo confere uma maior precisão nas estimativas, com diferença estatística significativa, apenas para uma faixa de valores. Ou seja, a depender da relação entre o nível de ruído de observação, o intervalo médio de amostragem de observação e a razão  $\alpha = T/\lambda$ , não há diferença relevante em se considerar ou não o carimbo de tempo na estimação.

A abordagem adotada para o estudo pode ser empregada, por exemplo, em tomadas de decisão que envolvem investimento em sincronização de sensores, em situações que apresentem as mesmas premissas adotadas pela simulação. Nesses casos, para sistemas com modelos de processo com pouco nível de ruído em comparação ao nível de ruído da saída, por exemplo, o investimento pode não compensar, como mostrado pela Seção 4.2. Redes de sensores com alta frequência média de amostragem da saída podem tornar a necessidade do carimbo de tempo irrelevante, como apontado pela Seção 4.3. Se a alta frequência de amostragem for utilizada para a entrada, em comparação com a frequência dos sensores de saída, os desempenhos também não diferem estatisticamente, conforme resultados descritos pela Seção 4.4. Por outro lado, caso o carimbo de tempo esteja disponível, a relação entre as frequências de entrada e saída não parecem influenciar no desempenho do estimador. De qualquer forma, é importante ressaltar que, sempre que o carimbo de tempo estiver disponível, compensa assimilá-lo no momento correto, pois o aumento no custo computacional é desprezível.

Como propostas para trabalhos futuros, a amostragem irregular pode ser introduzida nos sensores de entrada, além da consideração de cenários mais complexos de amostragem. A introdução de atrasos na transmissão dos dados, de medições fora de ordem, ou observações faltantes podem levar a conclusões mais abrangentes. Além disso, um estudo mais aprofundado da natureza do ruído introduzido pela amostragem irregular pode levar a métodos alternativos de sintonia para estimadores.

### Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio das agências brasileiras CNPq e CAPES.

### Referências

Fatehi, A. and Huang, B. (2017). Kalman filtering approach to multi-rate information fusion in the presence of irregular sampling rate and

variable measurement delay, *Journal of Process Control* **53**(2017): 15–25.

Gopalakrishnan, A., Kaisare, N. S. and Narasimhan, S. (2010). Incorporating delayed and infrequent measurements in Extended Kalman Filter based nonlinear state estimation, *Journal of Process Control* **21**(1): 119–129.

Hu, R. J., Wang, Z., Alsaadi, F. E. and Hayat, T. (2017). Event-based filtering for time-varying nonlinear systems subject to multiple missing measurements with uncertain missing probabilities, *Information Fusion* **38**: 74–83.

Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. (2004). Unscented Filtering and Nonlinear Estimation, *Proceedings of the IEEE* **92**(3): 401–422.

Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of ASME – Journal of Basic Engineering* **82**: 35–45.

Menegaz, H. M. T., Ishihara, J. Y., Borges, G. A. and Vargas, A. N. (2015). A Systematization of the Unscented Kalman Filter Theory, *IEEE Transactions on Automatic Control* **60**(10): 2583–2589.

Micheli, M. and Jordan, M. I. (2002). Random sampling of a continuous-time stochastic dynamical system, *Proc. of the 15th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, number 1, pp. 1–15.

Sivrikaya, F. and Yener, B. (2004). Time synchronization in sensor networks: a survey, *IEEE Network* **18**(4): 45–50.